

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1909)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS  
**Autor:** Rousseau, Th.  
**Kapitel:** Plan.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-11850>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

une transposition  $T$  autour d'une charnière  $\mathcal{A}$ , perpendiculaire sur  $AA'$  en son milieu.  $B$  et  $C$  sont venus en  $B_1$  et  $C_1$ . On peut maintenant amener  $B_1$  en  $B'$  par une rotation autour de la perpendiculaire  $\mathcal{A}'$  à  $A'B'$  et  $A'B_1$ , au point  $A'$ .  $C_1$  vient alors en  $C_2$ . Enfin, une rotation autour de  $A'B'$  amène  $C_2$  en  $C_1$ . Comme les deux charnières  $\mathcal{A}'$  et  $A'B'$  sont concourantes, on peut remplacer le produit des deux dernières rotations par une seule,  $R_1$ , autour d'une charnière  $\mathcal{A}_1$  passant par  $A'$ , et on a  $D = TR_1$ .

49. — APPLICATIONS. *Définition.* J'appelle *triangle* la figure formée par trois portions de droite ayant deux à deux une extrémité commune.

*Hauteurs, médianes, bissectrices. Triangle isocèle.*

**THÉORÈME.** *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit isocèle, est que la médiane et la hauteur issues d'un sommet soient confondues.*

Démonstration par une transposition.

### Plan.

50. — *Définitions préliminaires.* Je dis que l'espace est en *mouvement* s'il est soumis à un ensemble continu de transformations, comprenant la transformation identique.

Le mouvement est dit à *un, deux, ...n paramètres*, suivant que cet ensemble est à une, deux, ... $n$  dimensions.

Si le mouvement est à un paramètre, ce paramètre  $t$  s'appelle le *temps mathématique*.

Si les transformations de l'ensemble sont des déplacements, on dit que toute figure qui participe au mouvement est de *forme invariable*.

Je dirai qu'un mouvement à un paramètre est *limité*, quand l'ensemble des transformations qui le définit est limité. Il y a alors deux positions extrêmes  $F_0$  et  $F_1$  pour toute figure qui participe au mouvement.

La position  $F_0$  qui correspond à la première valeur du paramètre  $t$  s'appelle *position initiale* et l'autre  $F_1$  la *position finale*.

Remarquons que tout mouvement limité à un paramètre définit une transformation, savoir celle qui fait correspondre à la configuration initiale  $E_0$  de l'espace la configuration finale  $E_1$ .

On dit que deux mouvements limités sont *équivalents* quand ils définissent la même transformation.

J'appelle *mouvement de rotation* le mouvement défini par un ensemble continu de rotations.

51. — *Définition.* J'appelle *plan* la figure engendrée par une semi-droite  $ox$ , perpendiculaire à une droite  $zz'$ , dans un mouvement de rotation autour de  $zz'$ . Le plan est une surface, car c'est

un ensemble ponctuel à deux dimensions. Le plan et la droite  $zz'$  sont dits *perpendiculaires*.

*Remarque.* Le plan est complètement défini par la droite  $zz'$  et le point  $o$ .

52. — THÉORÈME I. *Deux plans quelconques sont égaux.*

Soient deux plans  $P$  et  $P_1$  définis par la droite  $zz'$  et le point  $o$ , la droite  $z_1z'_1$ , et le point  $o_1$ . Il suffit de faire coïncider  $zz', o$  et  $z_1z'_1, o_1$ , pour que les deux plans coïncident.

53. — THÉORÈME II. *Toute transposition autour d'une droite passant par le pied de la perpendiculaire à un plan, et située dans ce plan, retourne le plan sur lui-même.*

54. — THÉORÈME III. *Dans un mouvement de rotation autour de la perpendiculaire à un plan, le plan coïncide avec sa position primitive. — On dit qu'il glisse sur lui-même.*

55. — THÉORÈME. *Par deux droites concourantes on peut toujours faire passer un plan.*

Car on peut leur mener une perpendiculaire commune.

56. — THÉORÈME. *Le lieu des points équidistants de deux points donnés est le plan perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.*

57. — THÉORÈME. *Toute droite qui a deux points dans un plan y est toute entière contenue.*

Soit le plan  $P$  perpendiculaire en  $O$  à  $zz'$ .

1° Soient d'abord deux points  $A$  et  $B$  équidistants de  $O$  dans le plan  $P$ . Si  $I$  est le milieu de  $AB$ , la droite  $OI$  est bissectrice de l'angle  $AOB$  et nous savons qu'elle est perpendiculaire à  $zz'$ . Donc  $I$  est dans le plan  $P$ .

Prenons deux points  $HH'$  sur  $zz'$  tels que  $OH = OH'$ . On a évidemment  $AH = AH'$ ,  $BH = BH'$  et aussi  $AH = BH$ , car on peut amener  $AH$  sur  $BH$  par une rotation. Donc dans les triangles isocèles  $ABH, ABH'$ , les médianes  $HI, H'I$  sont perpendiculaires sur  $AB$ . De plus elles sont égales puisque  $I$  est dans le plan  $P$ . Donc, par une rotation autour de  $AB$  on peut amener  $H$  sur  $H'$ . Mais dans cette rotation un point  $M$  quelconque de  $AB$  ne bouge pas, ce qui prouve que  $MH = MH'$  et par suite que le point  $M$  est dans le plan  $P$ .

2° Soient maintenant deux points quelconques  $A$  et  $B$  du plan  $P$ ,  $I$  le pied de la perpendiculaire abaissé de  $O$  sur  $AB$ ,  $B'$  le point de  $AB$  tel que  $IB' = IA$  et joignons  $OB'$ . Soit  $z_1z'_1$  la perpendiculaire commune à  $OA$  et  $OB'$  et  $P_1$  le plan perpendiculaire à  $z_1z'_1$  au point  $O$ . Ce plan contient la droite  $AB'$ , car les points  $A$  et  $B'$  sont équidistants de  $O$ . Donc il contient aussi le point  $B$  et la droite  $OB$ . Par suite la droite  $z_1z'_1$  perpendiculaire à  $OA$  et  $OB$  se confond avec  $zz'$ , et le plan  $P_1$ , qui contient  $AB$ , avec le plan  $P$ .

58. — THÉORÈME. *Toute droite d'un plan, qui passe par le pied de la perpendiculaire au plan, partage le plan en deux régions.*

Soit  $P$  le plan perpendiculaire en  $O$  à  $zz'$ ,  $xx'$  la droite considérée. Considérons l'ensemble  $P_1$  formé des points engendrés par la semi-droite  $Ox$  dans le mouvement de rotation qui amène  $Ox$  sur  $Ox'$ , pour la première fois ; puis l'ensemble  $P_2$  formé des points engendrés par  $Ox'$  dans le même mouvement. Je dis que ces deux ensembles sont des *régions*, c'est-à-dire que si  $M$  et  $M'$  sont deux points du même ensemble, on peut passer de  $M$  à  $M'$  par un chemin continu sans sortir de cet ensemble. Il suffit d'amener  $OM$  sur  $OM'$ , ce qui amène  $M$  en  $M_1$ , sur  $OM'$ , puis de suivre le chemin  $M_1M'$  sur  $OM'$ . De plus, ces régions sont séparées par la droite  $x'x$ . En effet, si  $M$  est dans le premier et  $M'$  dans le second ensemble et si un mobile  $N$  va de  $M$  à  $M'$  sur une ligne continue  $C$ , la semi-droite  $ON$  se déplace d'une manière continue et par suite traverse  $xx'$ ; donc  $N$  traverse aussi  $xx'$ .

59. — THÉORÈME. *Deux plans qui ont en commun deux droites concourantes, dont l'une partage les deux plans en deux régions, coïncident.*

Soient  $PP'$  deux plans contenant les deux droites  $D$  et  $\mathcal{A}$ , concourantes en  $o$ . Supposons que  $D$  partage  $P$  et  $P'$  en deux régions  $P_1, P_2$  et  $P'_1, P'_2$ . Alors  $\mathcal{A}$  est partagée par le point  $o$  en deux semi-droites  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  dont l'une est dans  $P_1$  et  $P'_1$ , et l'autre dans  $P_2$  et  $P'_2$ .

Je dis que tout point  $M$  d'un des plans est dans l'autre. Supposons que  $M$  soit dans  $P$  et par exemple dans la région  $P_2$ . Soit  $M'$  un point quelconque de  $\mathcal{A}_1$ , la droite  $MM'$  coupe  $D$ . Donc elle est toute entière dans  $P'$ , et le point  $M$  est dans  $P'$ .

60. — THÉORÈME. *Par chaque point d'un plan on peut mener à ce plan une perpendiculaire et une seule.*

Soit  $P$  le plan perpendiculaire en  $o$  à la droite  $zz'$ ,  $o_1$  un point quelconque de ce plan. Menons par  $o_1$  une droite quelconque  $\mathcal{A}$  dans le plan  $P$ . Soit  $o_1z_1$  la perpendiculaire à  $D$  et à  $oo_1$ ,  $P_1$  le plan perpendiculaire à  $o_1z_1$  au point  $o_1$ . Les plans  $P$  et  $P_1$  passent tous deux par  $oo_1$  et  $D$ . Or  $D$  partage  $P$  et  $P_1$  en deux régions puisqu'elle passe par  $o$  et par  $o_1$ . Donc les deux plans sont confondus, et  $o_1z_1$  est perpendiculaire en  $o_1$  au plan  $P$ .

Toute autre perpendiculaire  $o_1z_1$  au plan  $P$  au point  $o_1$  coïncide avec  $o_1z_1$ , car elle doit être perpendiculaire à  $oo_1$  et à  $D$ .

*Remarque.* Un plan  $P$  peut être considéré comme engendré par une perpendiculaire  $ox$  à une droite  $zz'$ , perpendiculaire en un point quelconque  $o$  du plan  $P$ .

61. — *Corollaire I.* Toute droite d'un plan partage ce plan en deux régions. Chacune d'elles s'appelle un *semi-plan*. La droite s'appelle le *bord* ou l'*arête* du semi-plan.

62. — *Corollaire II.* On peut toujours faire coïncider deux plans  $PP'$  de façon à amener un point  $o$  de  $P$  sur un point  $o'$  quelconque de  $P'$ , et une droite  $D$  passant par  $o$  dans  $P$  sur une droite  $D'$  quelconque passant par  $o'$  dans  $P'$ .

63. — *Corollaire III.* Une transposition autour d'une droite quelconque d'un plan retourne le plan sur lui-même.

64. — THÉORÈME. *Par deux droites concourantes on peut faire passer un plan et un seul.*

Nous avons déjà vu qu'on en peut faire passer un. Tout plan passant par les deux droites données  $D$  et  $D'$  est perpendiculaire à la droite  $oz$ , perpendiculaire commune à  $D$  et  $D'$ . Il n'y en a donc qu'un seul.

65. — *Corollaire I.* Par une droite et un point on peut faire passer un plan et un seul.

66. — *Corollaire II.* Par trois points on peut faire passer un plan et un seul.

67. — THÉORÈME. *Deux plans qui ont un point commun se coupent suivant une droite.*

Soit  $P$  et  $P'$  deux plans ayant en commun le point  $o$ ,  $oz$  et  $oz'$  les perpendiculaires à  $P$  et  $P'$  en  $o$ . La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $M$  soit sur l'intersection est que la droite  $OM$  soit perpendiculaire à  $oz$  et  $oz'$ .

68. — THÉORÈME. *Tout plan partage l'espace en deux régions.*

Soit  $P$  le plan perpendiculaire en  $o$  à une droite  $zz'$ ,  $ox$  une semi-droite quelconque de  $P$ ,  $Q$  le semi-plan  $zz'$ ,  $ox$ ; il est partagé par  $ox$  en deux quarts de plan  $Q_1$  et  $Q_2$ .

Tout l'espace peut être considéré comme engendré par  $Q$  dans un mouvement de rotation autour de  $zz'$ . En effet, un point  $M$  quelconque de l'espace détermine avec  $zz'$  un semi-plan  $Q'$  qui coupe  $P$  suivant une semi-droite  $ox'$ .  $Q'$  est donc une des positions de  $Q$ .

Dès lors les points de l'espace se partagent en deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$ , suivant qu'ils sont rencontrés par  $Q_1$  ou par  $Q_2$ . En raisonnant comme pour le théorème du n° 58, on voit facilement que  $E_1$  et  $E_2$  sont continus, et par suite constituent deux régions de l'espace, que ces régions sont distinctes et séparées par le plan  $P$ .

69. — THÉORÈME. *Etant donnés un plan  $P$ , une droite  $D$  dans ce plan et deux points  $o$  et  $o'$  sur cette droite, il existe un déplacement qui ramène le plan  $P$  sur sa position primitive, sans le retourner, de façon que la droite  $D$  ait glissé sur elle-même et que le point  $o$  soit venu en  $o'$ .*

Il suffit de faire une transposition autour de la perpendiculaire  $D$  à  $oo'$  en son milieu, et située dans le plan  $P$ , suivie d'une autre transposition autour de la perpendiculaire  $D'$  au point  $o'$  à la même droite  $oo'$  et située également dans le plan  $P$ .

*Définition.* J'appelle un tel déplacement, un *glissement plan rectiligne*. Si on fait varier  $oo'$  à partir de  $o$ , on obtient un mouvement que j'appelle un *mouvement de glissement plan rectiligne*;  $oo' = a$  s'appelle l'*amplitude* du mouvement limité qui amène  $o$  en  $o'$ .