Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1909)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS

Autor: Rousseau, Th.

Kapitel: Angles.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11850

On en déduit que la somme de plusieurs longueurs est commutative et associative.

21. — *Postulat VIII.* Etant donnée une longueur AB quelconque et une longueur CD non nulle, on peut toujours trouver un entier n assez grand pour que $AB > n \cdot CD$.

22. — *Postulat IX.* Etant donnée une longueur AB, on peut toujours trouver une longueur CD telle que

$$AB = 2 \cdot CD .$$

Les longueurs sont donc des grandeurs directement mesurables [1].

23. — Théorème. *Quand on retourne une portion de droite sur elle-même, il y a un point qui ne bouge pas.* Ce point s'appelle le *milieu* de la portion de droite.

Segments. Ici se place la théorie classique des segments.

Angles.

24. — *Définition.* J'appelle *angle* la figure formée par deux semi-droites ayant la même origine.

25. — *Postulat X.* Etant donnés deux angles xoy, $x'o'y'$, on ne peut pas, en général, trouver un déplacement qui amène ox sur $o'x'$ et oy sur $o'y'$. Si on peut en trouver un, on peut en trouver un autre qui amène ox sur $o'y'$ et oy sur $o'x'$.

En particulier on peut retourner un angle sur lui-même.

26. — Théorème. *Le déplacement qui retourne un angle sur lui-même est une rotation.*

Car, si nous portons sur les côtés deux longueurs égales $OA = OB$, le déplacement qui retourne l'angle sur lui-même retourne la portion de droite AB sur elle-même. Son milieu I ne bouge donc pas, et le déplacement est une rotation autour de OI.

La droite OI s'appelle la *bissectrice* de l'angle xoy.

Remarque I. Le carré de la rotation R qui retourne un angle sur lui-même est la rotation identique. Cette rotation R s'appelle une *transposition.*

27. — *Postulat XI.* Nous admettrons qu'il n'y a qu'une rotation autour d'une droite donnée dont le carré est la rotation identique, autrement dit qu'il n'existe qu'une transposition autour d'une droite donnée.

28. — Théorème. *Deux angles opposés par le sommet* xoy, x'o'y' *sont égaux.*

Car il suffit de retourner l'angle xoy' sur lui-même pour les faire coïncider.

[1] Voir : Tannery, *Leçons d'Arithmétique*, chap. X et XIII.

29. — *Définition.* On dit qu'une semi-droite oy est *perpendiculaire* sur une droite $x'x$ en un point o, si elle fait avec ox et ox' deux angles égaux. Ces deux angles égaux sont dits *droits.*

30. — THÉORÈME. *Si une semi-droite* oy *est perpendiculaire sur une droite* x'x, *la semi-droite* o'y *opposée à* oy *est aussi perpendiculaire sur* x'x. De même ox et ox' sont perpendiculaires sur yy'. On dit que les deux droites $x'x$, $y'y$ sont perpendiculaires.

31. — THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites* xx' *et* yy' *soient perpendiculaires est qu'une transposition autour d'une des deux droites retourne l'autre sur elle-même.*

La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire, car si les angles yox, yox' sont égaux, la rotation autour de oy qui amène ox sur ox', amène ox' sur ox et est une transposition.

32. — THÉORÈME. *Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont confondues. Les deux bissectrices des quatre angles formés par deux droites concourantes sont rectangulaires.*

La première partie est évidente, car si on retourne un angle xoy sur lui-même, on retourne aussi l'angle $x'oy'$ opposé par le sommet. De plus, par une transposition autour de la bissectrice commune des deux angles xoy et $x'oy'$, les deux angles xoy' et $x'oy$ viennent l'un sur l'autre. Leur bissectrice s'est donc retournée sur elle-même : elle est donc perpendiculaire à la première.

33. — THÉORÈME. *D'un point M pris hors d'une droite D on peut abaisser sur cette droite une perpendiculaire et une seule.*

Car elle doit passer par le transposé M′ de M par rapport à D.

Remarque. Par un point o d'une droite zz' on peut mener une infinité de perpendiculaires à cette droite. Il suffit de porter le côté oy d'un angle droit xoy sur oz. Toutes ces perpendiculaires peuvent être considérées comme des bissectrices de l'angle particulier zoz'.

34. — THÉORÈME. *Si une droite est perpendiculaire à deux droites concourantes, à leur point de rencontre, elle est aussi perpendiculaire sur les bissectrices des angles formés par ces deux droites.*

Supposons en effet que zz' soit perpendiculaire sur $x'x$ et $y'y$ en leur point commun O. Portons sur Ox, On', Oy, Oy', respectivement, quatre longueurs égales OA = OA′ = OB = OB′. Soient I, I′, H, H′, les milieux de AB′, A′B′, AB′, A′B. Les droites II′, HH′ sont les bissectrices des angles xOy, $x'Oy'$; $x'Oy$, xOy'.

Effectuons une transposition autour de zz'; on voit facilement que les droites II′ et HH′ se retournent sur elles-mêmes. Donc elles sont perpendiculaires à zz'.

35. — THÉORÈME. *Tous les angles droits sont égaux.*

Soit xoz un angle droit. Amenons un des côtés d'un autre angle droit à coïncider avec le prolongement oz' de oz. Soit ox' la position que vient occuper le deuxième côté. Puisque ox et ox' sont perpendiculaires sur zz', il en est de même de la bissectrice ou

de l'angle xox'. Par suite une transposition autour de ou amène xoz sur $x'oz'$.

36. — Théorème. *Si deux droites* ox, ox' *sont perpendiculaires à une droite* zz' *au point* o, *et si* oy *est bissectrice de l'angle* xox', *le produit des deux transpositions autour de* oy *et* ox' *est égal à la rotation autour de* zz' *qui amène* ox *sur* ox'. — Car l'angle xoz vient sur $x'oz$ dans les deux cas.

37. — Théorème. *Si deux droites* ox, ox' *sont perpendiculaires à une droite* zz' *au point* o *et si* oy *est bissectrice de l'angle* xox', *la rotation autour de* zz' *qui amène* ox *sur* ox' *est le carré de celle qui amène* ox *sur* oy.

Si ou est la bissectrice de l'angle xoy, la rotation qui amène ox sur oy est égale au produit des deux transpositions autour de ou et oy. Or ce produit amène aussi oy sur ox'.

38. — *Corollaires.* I. On peut toujours remplacer une rotation autour de zz' par le produit de deux transpositions autour d'axes ox, oy perpendiculaires à zz' en o.

39. — II. Etant donnée une rotation autour de zz', on peut toujours trouver une rotation R dont le carré soit égal à la rotation donnée.

40. — III. La transformée d'une rotation par une transposition autour d'une perpendiculaire à la charnière est la rotation inverse.

Soit ox une perpendiculaire autour de la charnière zz'. La rotation donnée R amène zox en zox'. Une transposition autour de ox amène zox en $z'ox$ et zox' en $z'ox'_1$. Or la rotation qui amène $z'ox$ sur $z'ox'_1$, et par suite zox sur zox'_1, est la même que celle qui amène zox' sur zox, c'est-à-dire $\overset{-1}{\mathrm{R}}$.

41. — IV. Le produit de deux rotations autour de la même charnière zz' est commutatif.

Soit R la rotation qui amène zox sur zox', R_1 la rotation qui amène zox' sur zox''. Effectuons une transposition autour de la bissectrice oy de xox'' : zox' vient $z'ox'_1$.

La rotation qui amène $z'ox''$ sur $z'ox'_1$ est la transformée de celle qui amène zox sur zox' : c'est donc $\overset{-1}{\mathrm{R}}$. De même la rotation qui amène zox'_1 sur zox est la rotation R_1^{-1}. Or zox'' provient de zox par le produit de la rotation qui amène zox sur zox'_1 par celle qui amène zox'_1 sur zox''. Donc $\mathrm{RR}_1 = \mathrm{R}_1\mathrm{R}$.

42. — Théorème. *Etant donnée une rotation* R, *il n'y a que deux rotations* r *telles que* $\mathrm{r}^2 = \mathrm{R}$ *; l'une d'elles est le produit de l'autre par une transposition.*

En effet, soit r et r' deux rotations telles que

$$r^2 = r'^2 = \mathrm{R}\ .$$

Ces rotations ont lieu évidemment autour de la même charnière que la rotation R. Or il y a une rotation ρ telle que $r' = \rho r$. Donc :

$$\left\{\begin{array}{l} r'^2 = \rho r \,.\, \rho r = \rho\rho \,.\, rr = \rho^2 r^2 = r^2 \\ \text{d'où} \qquad \rho^2 = (r^2)\,(r^2)^{-1} = 1\,; \end{array}\right.$$

Donc ρ est une transposition,

43. — *Corollaire.* Il existe deux rotations dont le carré est égal à une transposition autour d'une droite.

Je les appelle des rotations d'un *quartier*.

44. — Théorème. *Etant données deux droites concourantes rectangulaires, on peut leur mener par leur point de rencontre une perpendiculaire commune et une seule.*

Si xx', yy' sont ces deux droites, on obtient une perpendiculaire zz' satisfaisant à la question en donnant quartier à xx' autour de yy'. Réciproquement si la droite z_1z_1' satisfait à la question, elle provient de xx' par une rotation d'un quartier. C'est donc zz' ou cette droite retournée sur elle-même.

45. — Théorème. *Etant données deux droites concourantes, on peut leur mener, par leur point de rencontre, une perpendiculaire commune et une seule.*

Soient xx' et yy' les deux droites concourantes en o ; uu', vv', leurs bissectrices, qui sont, comme on sait, rectangulaires. Soit zz' la perpendiculaire à uu' et vv' menée par o. Je dis qu'elle est perpendiculaire à xx'. Il suffit de prouver que l'angle xoz est égal à l'angle $x'oz$. Or on les fait manifestement coïncider par une transposition autour de uu' suivie d'une transposition autour de vv'. De même zz' est perpendiculaire à yy'.

Enfin, toute perpendiculaire z_1z_1' à xx' et yy', devant être perpendiculaire sur les bissectrices uu' et vv', se confond avec zz'.

46. — *Composition des rotations dont les charnières sont concourantes.*

Ici se place la théorie classique de la composition des rotations autour de charnières concourantes, basée sur les théorèmes des nos 36 et 38.

On conclut de cette théorie :

47. — *Corollaire I.* Les rotations autour de charnières concourantes en un point o forment un groupe. On les appelle les rotations autour du point o.

Remarque. Le sous-groupe g des rotations autour d'un point o n'est pas *invariant,* car un déplacement qui transforme o en o' transforme le sous-groupe g dans un autre sous-groupe g', celui des rotations autour de o'.

48. — *Corollaire II.* Tout déplacement est le produit de deux rotations.

Soit en effet un déplacement D qui amène trois points A, B, C, non en ligne droite en A', B', C'. On peut amener A sur A' par une transposition T autour d'une charnière Δ, perpendiculaire sur AA′ en son milieu. B et C sont venus en B_1 et C_1. On peut maintenant amener B_1 en B′ par une rotation autour de la perpendiculaire Δ' à A′B′ et $A'B_1$, au point A′. C_1 vient alors en C_2. Enfin, une rotation autour de A′B′ amène C_2 en C_1. Comme les deux charnières Δ' et A′B′ sont concourantes, on peut remplacer le produit des deux dernières rotations par une seule, R_1, autour d'une charnière Δ_1 passant par A′, et on a $D = TR_1$.

49. — Applications. *Définition.* J'appelle *triangle* la figure formée par trois portions de droite ayant deux à deux une extrémité commune.

Hauteurs, médianes, bissectrices. Triangle isocèle.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit isocèle, est que la médiane et la hauteur issues d'un sommet soient confondues.*

Démonstration par une transposition.

Plan.

50. — *Définitions préliminaires.* Je dis que l'espace est en *mouvement* s'il est soumis à un ensemble continu de transformations, comprenant la transformation identique.

Le mouvement est dit *à un, deux, ...n paramètres,* suivant que cet ensemble est à une, deux, ...*n* dimensions.

Si le mouvement est à un paramètre, ce paramètre t s'appelle le *temps mathématique*.

Si les transformations de l'ensemble sont des déplacements, on dit que toute figure qui participe au mouvement est de *forme invariable*.

Je dirai qu'un mouvement à un paramètre est *limité*, quand l'ensemble des transformations qui le définit est limité. Il y a alors deux positions extrêmes F_0 et F_1 pour toute figure qui participe au mouvement.

La position F_0 qui correspond à la première valeur du paramètre t s'appelle *position initiale* et l'autre F_1 la *position finale*.

Remarquons que tout mouvement limité à un paramètre définit une transformation, savoir celle qui fait correspondre à la configuration initiale E_0 de l'espace la configuration finale E_1.

On dit que deux mouvements limités sont *équivalents* quand ils définissent la même transformation.

J'appelle *mouvement de rotation* le mouvement défini par un ensemble continu de rotations.

51. — *Définition.* J'appelle *plan* la figure engendrée par une semi-droite ox, perpendiculaire à une droite zz', dans un mouvement de rotation autour de zz'. Le plan est une surface, car c'est