

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1909)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** Pierre Boutroux. — Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, avec une note de M. Paul Painlevé. — 1 vol. gr. in-8°, 190 p.; 6 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

**Autor:** Buhl, A.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## BIBLIOGRAPHIE

---

F. BENNECKE. — **Eine konforme Abbildung** als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. — 1 fasc. in-4° : O. Sall, Berlin.

C'est une application de la représentation conforme à la résolution graphique des opérations à effectuer sur des nombres complexes. La table, établie avec beaucoup de soin par l'auteur, permet de chercher directement le logarithme vulgaire de  $x + iy$  et réciproquement. Elle est obtenue à l'aide de la correspondance par points sur deux plans de la fonction  $Z = \log z$ .

Si l'on a  $X + iY = \log(x + iy)$ , on obtient les deux familles de courbes

$$x = 10^X \cos(Y \ln 10), \quad y = 10^X \sin(Y \ln 10).$$

Lorsqu'on n'exige pas une très grande approximation, cette méthode graphique conduit très rapidement au résultat.

Pierre BOUTROUX. — **Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre**, avec une note de M. Paul PAINLEVÉ. — 1 vol. gr. in-8°, 190 p. ; 6 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Pour comprendre exactement l'objet et la portée de ces leçons il est bon, il me semble, de partir d'abord d'une remarque qui, depuis nombre d'années, s'impose aux géomètres et qui a été particulièrement précisée par M. Painlevé. De toutes les transcendentes définies par les équations différentielles il n'y en a qu'un très petit nombre dont l'étude révèle une propriété exacte telle, par exemple, que la périodicité. Dès lors, à défaut de propriétés exactes, l'effort présent et l'effort à venir ne peuvent être tournés que vers l'étude de propriétés approchées. M. Pierre Boutroux est déjà entré dans cette voie en étudiant, dans sa thèse, les fonctions méromorphes nouvelles satisfaisant à des équations différentielles formées par M. Painlevé et en montrant que ces intégrales, quotients de fonctions entières, croissaient suivant le mode exponentiel.

Il s'agit maintenant de recherches qu'on peut rattacher au point de départ précédent, mais qui sont beaucoup plus avancées et intéressent d'ailleurs de nouvelles équations, notamment celles de la forme  $y'Q = P$ ,  $P$  et  $Q$  étant des polynômes en  $x$  et  $y$  et plus particulièrement

$$y' + A_0 + A_1y + A_2y^2 + A_3y^3 = 0,$$

les  $A$  étant des polynômes en  $x$ .

Ce qu'il faut remarquer tout d'abord, et ce qui constitue un pas en avant d'une importance capitale, c'est l'apparition nécessaire de fonctions multiformes à une infinité de branches. On démontre que, parmi les équations des types précédents, l'équation de Riccati est la seule dont l'intégrale soit uniforme et que des fonctions à un nombre fini de branches ne peuvent

satisfaire qu'à des équations se ramenant par une transformation rationnelle à une équation de Riccati. Quoique très simple, la démonstration de ces faits n'en va pas moins sans un certain étonnement. Nous avons donc devant nous le champ de fonctions à une infinité de branches et rien pour ainsi dire dans l'analyse créée jusqu'à ce jour ne donne de méthodes pour en aborder l'étude. Les fonctions multiformes considérées jusqu'ici n'avaient, en général, qu'un nombre fini de branches, elles étaient en relation simple, par leurs inverses avec les fonctions uniformes et enfin on savait construire des surfaces de Riemann, à un nombre fini de feuillet, sur lesquelles des coupures appropriées les rendaient uniformes.

Ici les questions sont d'une autre nature. M. Pierre Boutroux cherche à étudier d'abord la croissance et l'allure de certaines branches de l'intégrale de  $y'Q = P$  où  $P$  est de degré  $p$  en  $y$  et  $Q$  de degré  $q$ . Il montre que, moyennant certaines conditions initiales et pour  $p - q = 1$ , il existe des branches qui, dans de certains angles ayant leur sommet à l'origine, n'ont ni zéros ni points singuliers d'aucune sorte. Ce sont des branches à croissance exponentielle. Si la condition  $p - q = 1$  n'est pas réalisée, des circonstances plus complexes se présentent, mais il existe alors des branches également fort remarquables qui, sur une surface de Riemann dont on excepte certains cercles dont la somme des aires est en rapport nul avec l'aire totale de la surface, croissent moins vite qu'une puissance finie de  $x$ . Ce sont des branches à croissance rationnelle.

La classification des points singuliers transcendants paraît devoir être fort laborieuse à cause du très grand nombre de cas qu'il faudrait considérer. Si encore il n'existait que des points autour desquels se permutent une infinité de branches ! Mais en dehors de ces points que l'auteur appelle *directement critiques*, il en existe d'autres, *indirectement critiques*, qui sont limites d'un ensemble de points tels qu'autour de chacun d'eux les permutations sont possibles. Dans ces conditions les divers types de singularités se divisent en cas qui comprennent des sous-cas, et il semble même que l'on puisse subdiviser indéfiniment la classification. Au milieu de cet échecomplicé, l'auteur trouve des fils conducteurs par des procédés ingénieux et simples. Il considère des équations particulières, même certaines dont les intégrales sont déterminables par les procédés élémentaires et, partant de tels repères, établit par analogie des résultats plus généraux et qui semblent de la plus haute importance. Il revient sur les points singuliers classiques de Briot et Bouquet et montre qu'il n'y avait là qu'une classification provisoire, ces points pouvant être de natures fort diverses et n'ayant été rapprochés que par suite d'un point de vue très spécial. Enfin il étudie les relations qui peuvent exister entre diverses branches d'intégrales sans s'astreindre à rester dans le voisinage d'un point critique.

M. Paul Painlevé a terminé l'ouvrage par une note de 46 pages où il étudie la réduction à des formes canoniques des équations dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de branches. Les problèmes qui restent posés, soit par les recherches de M. Boutroux, soit par celles de M. Painlevé, nous permettent sans doute des résultats non moins intéressants que ceux déjà obtenus. Et que l'on ne croie pas que la complexité des questions entraîne quelque difficulté dans la lecture de l'œuvre ; au contraire, tout paraît intuitif, inspiré de l'esprit d'analogie et construit, non pas en démontrant et en entassant des détails ardu, mais en faisant de larges appels à la notion de continuité.

A. BUNL (Montpellier).