

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Notations rationnelles pour le système vectoriel .
Autor: Burali-Forti, C. / Marcolongo., R.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Or le premier membre de cette congruence est congru à $\frac{2^p - 2}{p} \pmod{p}$ (cf. P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, p. 163).

D'où

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv 0 \pmod{p}.$$

C. Q. F. D.

D. MIRIMANOFF (Genève).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations rationnelles pour le système vectoriel¹.

8. — Réponse de MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO à MM. Timerding et Wilson.

Nous remercions vivement M. FEHR d'avoir ouvert, dans l'*Enseignement mathématique*, une discussion sur les notations rationnelles pour le système vectoriel minimum que nous avons proposées en 1908; nous remercions aussi MM. TIMERDING, WILSON et PEANO, qui ont accepté l'invitation de M. Fehr, et ont bien voulu faire connaître leurs observations.

Le tableau qui contient nos propositions a été publié dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXV, 1908, à la fin de notre *Nota IV, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*. L'un de nous le présenta au IV^{me} Congrès international des mathématiciens à Rome; il a été ensuite imprimé à part et reproduit par plusieurs journaux scientifiques et par l'*Enseignement* (15 janvier 1909).

Il semble, malheureusement, que nos notations soient connues surtout par notre tableau; mais ce tableau est le résumé de toutes les études que nous avons faites sur la question de l'unification et que nous avons publiées dans les *Rendiconti del Circolo mate-*

¹ Voir l'*Ens. math.*, XI^e année, n^o du 15 janvier 1909, p. 41-45; n^o du 15 mars, p. 124-134; n^o du 15 mai, p. 211-217; n^o du 15 juillet, p. 341.

*matico di Palermo*¹. C'est donc à ces notes que nous devons toujours nous reporter pour répondre aux critiques qui nous ont été faites.

Les idées que nous avons exposées dans ces travaux ont été ensuite développées dans deux livres qui viennent de paraître².

Après avoir rappelé tout cela, qu'il nous soit permis de répondre brièvement aux observations de MM. Timerding et Wilson, pour éclaircir surtout quelques questions scientifiques étroitement liées à la question des notations vectorielles.

SUR LES REMARQUES DE M. TIMERDING.

1. M. Timerding a présenté sans doute des observations très intéressantes. Nous trouvons aussi, comme M. Peano, très opportunes les modifications de \times et \wedge en \times et \wedge , indépendamment des difficultés typographiques, ainsi que les locutions proposées par M. Timerding. Nous n'insistons pas davantage sur la notation *mod*, et nous trouvons très concluants les arguments de M. Peano pour changer *mod* en T, ou M, ou m. La notation $|a|$ est à rejeter absolument; elle empêcherait l'usage du signe $|$ (*index*) très utile dans le système de Grassmann; elle est contraire à toutes les notations employées pour les fonctions, et nous ne pouvons pas admettre, avec M. Timerding, que *mod a* « n'est pas une fonction proprement dite ».

Mais le changement de $—$ en $-$, ne nous paraît pas admissible. En voici les raisons. Avant tout si, comme a observé justement M. Peano, les *petits signes* ont le but de *lier* et les *grands signes* celui de *séparer*, le changement proposé donnerait au signe $—$ une signification qu'il n'a certainement pas.

L'observation que, sans les formations géométriques F_1 de première espèce de Grassmann, d'une équation de la forme

$$A - S + B - S + C - S = 0,$$

on ne peut pas déduire

$$S = \frac{A + B + C}{3},$$

est juste (Nota II, nos 6, 7); mais cette résolution devient possible dès que l'on a fixé l'algorithme de ces formations, qui fait partie du système minimum.

¹ *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; Nota 1^a, t. XXIII, 324-328 (1907); Nota 2^a, t. XXIV, 65-80; Nota 3^a, t. XXIV, 318-332 (1907); Nota 4^a, t. XXV, 352-375; Nota 5^a, t. XXVI, 369-377 (1908).

² *Elementi di Calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla Geometria, alla Meccanica e alla Fisica-matematica*. Bologna, N. Zanichelli, 1909; pp. I-V; 1-174.

Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla Fisico-matematica. Torino, G.-B. Petrini, 1909; pp. I-XI, 1-111.

Enfin il y a une autre considération pour ne pas accepter ce changement. On peut déduire tous les systèmes vectoriels de celui de Grassmann, et de tout système vectoriel (y compris le système minimum) on doit pouvoir déduire le système de Grassmann (Note V, n° 36); or, dans celui-ci, on ne saurait pas changer + et —, qui ont toutes les propriétés des mêmes signes algébriques, en + et —.

2. La notation de bivecteur est certainement nécessaire; sur ce point, non seulement nous sommes de la même opinion que M. Timerding, mais nous allons bien plus loin encore, car nous croyons nécessaire tout entier le beau système de Grassmann (Note V, n° 36). Cependant il y a des cas où cette notion n'est pas nécessaire et les applications que nous avons faites, sans nous servir de la notion de bivecteur, n'ont rien perdu, croyons-nous, de leur caractère géométrique.

M. Timerding croit, peut-être, que ce prétendu défaut de caractère géométrique dérive de l'impossibilité de considérer le produit interne d'un vecteur \mathbf{u} par un bivecteur φ .

Or il est facile de voir que cette impossibilité subsiste encore même après l'introduction des bivecteurs et des trivecteurs.

Si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont des vecteurs; φ et ψ des bivecteurs, et si les produits internes (ou scalaires) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\varphi \times \psi$, ont la signification usuelle, l'on a

$$(1) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} | \mathbf{v}}{\Omega}, \quad \varphi \times \psi = \frac{\varphi | \psi}{\Omega};$$

Ω est le trivecteur unité; $| \mathbf{v}$ le bivecteur (index) de \mathbf{v} ; $| \psi$ le vecteur (index) de ψ ; $\mathbf{u} | \mathbf{v}$ le produit alterné (progressif) de \mathbf{u} par $| \mathbf{v}$; $\varphi | \psi$ celui de φ par $| \psi$.

Le produit scalaire $\mathbf{u} \times \varphi$ de \mathbf{u} et φ , est, pour M. Timerding, le volume d'un parallélépipède dont la base est φ , et \mathbf{u} est l'arête. Par conséquent

$$(2) \quad \mathbf{u} \times \varphi = \frac{\mathbf{u} \varphi}{\Omega},$$

puisque $\mathbf{u} \varphi$ est le produit alterné de \mathbf{u} et φ (trivecteur).

Alors pour le produit scalaire $\mathbf{u} \times (| \varphi)$, ou brièvement $\mathbf{u} \times \varphi$, de \mathbf{u} et $| \varphi$, on aura, d'après (1),

$$(3) \quad \mathbf{u} \times | \varphi = \frac{\mathbf{u} || \varphi}{\Omega} = \frac{\mathbf{u} \varphi}{\Omega},$$

puisque l'opérateur $|$ a pour carré l'unité.

Les expressions (2) et (3) montrent que la notation $\mathbf{u} \times \varphi$ n'est pas régulière et doit être remplacée par $\mathbf{u} \times | \varphi$.

On peut certainement admettre la notation $\mathbf{u} \times \varphi$; mais à con-

dition de rejeter les notations (1), qui sont acceptées par tous les auteurs.

L'opération \wedge confirme la régularité de la notation $\mathbf{u} \times |\varphi$ et l'irrégularité de l'autre $\mathbf{u} \times \varphi$. En effet, si φ est le produit alterné des deux vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , on a

$$|\varphi = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} ,$$

et, pour (3),

$$\mathbf{u} \times |\varphi = \mathbf{u} \times \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} ,$$

qui exprime le volume considéré par M. Timerding, tandis que de (2) on obtiendrait

$$\mathbf{u} \times \varphi = \mathbf{u} \times (\mathbf{a}\mathbf{b}) .$$

et le second membre n'a pas de signification.

3. Dans les *Elementi*, p. 72; et dans les *Omografie vettoriali*, n° 25, p. 61, nous avons donné les deux formules

$$\Delta m = \text{div grad } m$$

$$\Delta' \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} .$$

On voit aussitôt quelle immense différence il y a entre les deux opérateurs Δ et Δ' , pour lesquels les auteurs ont adopté la seule notation Δ_2 ou ∇ , parce que ces opérateurs ont la même expression cartésienne. Ce n'est pas une raison qui peut justifier l'usage d'un seul signe pour indiquer des choses bien différentes; au contraire, elle prouve encore une fois que l'usage systématique des coordonnées peut faire envisager des *pseudo-opérateurs* qui n'ont plus de caractère géométrique et logique! L'exemple des quaternions de Hamilton est très instructif (Note III, n° 15).

M. Timerding croit trouver une autre justification, puisqu'il observe que l'on a une même notation pour la dérivée de u (nombre) ou de \mathbf{u} (vecteur) par rapport à une direction \mathbf{n} (vecteur) fonctions d'un point P, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial n} , \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} .$$

Même en faisant abstraction du défaut de caractère absolu de la notation $\frac{\partial}{\partial n}$, car il n'est pas possible de définir n ; nous voulons lui faire observer que, dans ce cas, l'application d'un même signe $\frac{\partial}{\partial n}$ (à n ou à \mathbf{u}) n'est pas illogique; car nous avons, sous la forme absolue,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{du}{dP} \mathbf{n} , \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n}$$

et $\frac{d}{dP}$ est toujours le symbole d'une transformation linéaire (*Omografie vettoriali*, n° 21, p. 45) applicable à un nombre, à un vecteur ou à une homographie fonctions de P. C'est donc un cas bien différent de celui de ∇ .

4. M. Timerding dit enfin : « *De plus, on doit se demander, comment il faut définir les opérations, quand on ne veut pas se servir des méthodes cartésiennes, comme est, à ce qu'il paraît, dans les idées des auteurs.* »

La réponse à cette question a été déjà donnée dans nos deux livres : *Elementi*, pp. 66-74; *Omografie vettoriali*, n° 22-25, pp. 49-64.

A la fin de son important article, M. Timerding a bien voulu reconnaître l'importance de l'unification des notations vectorielles, car « *le désaccord actuel dans la terminologie vectorielle est presque sans exemple* » ; et le progrès réel qu'il y aurait si nos notations rationnelles étaient adoptées.

En le remerciant de son *adhésion presque entière* à notre système, nous espérons atteindre le but, que nous poursuivons depuis quelques années, par nos travaux et surtout par nos deux livres.

SUR LES REMARQUES DE M. WILSON.

1. La variété des notations employées dans le calcul différentiel et intégral est seulement formelle ; elle est parfaitement logique, et n'a rien à voir avec le *chaos* des notations vectorielles.

Ainsi en analyse, la dérivée (totale ou partielle), l'intégrale (simple ou multiple) sont désignées par des opérateurs qui peuvent indifféremment changer de forme et de position.

Dans le calcul vectoriel, au contraire, pour le produit vectoriel de \mathbf{a} et \mathbf{b} , on a la notation complète $V \{ (I^{-1} \mathbf{a}) (I^{-1} \mathbf{b}) \}$, abrégée en $V(\mathbf{ab})$; la notation $|(\mathbf{ab})$, qui, dans le calcul de Hamilton et de Grassmann, sont très exactes. V et $|$ sont des symboles de fonction d'une seule variable ; c'est-à-dire, dans les deux cas, le produit quaternional de deux quaternions droits ou le produit alterné de deux vecteurs (bivecteur).

Pour les auteurs qui, ne faisant pas usage des quaternions, emploient la notation abrégée de Hamilton, $V(\mathbf{ab})$ est fonction d'un certain produit (le *produit complet*) que nous n'avons pas encore réussi à comprendre, ou bien il est fonction de deux variables.

Dans les notations $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ le symbole de fonction est $[]$, contrairement à toutes les lois ordinaires algébriques et l'on ne sait pas s'il s'agit d'une fonction d'une ou de deux variables. Enfin, dans la notation de Gibbs, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; et dans la nôtre, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, l'opération a pris la place de la fonction.

Peut-on, sérieusement, comparer tout cela avec la variété purement logique des notations de Leibniz, Lagrange, Cauchy ?

2. M. Wilson se demande ensuite : « *L'uniformité des notations dans l'analyse vectorielle est-elle réellement importante ?* » Il croit que non, parce que « *les formules et les opérations d'analyse vectorielle actuellement employées dans les divers traités de mécanique, électricité, magnétisme et théorie électromagnétique sont en fort petit nombre et ne sont par conséquent pas difficiles à comprendre, quelle que soit la notation employée par l'auteur.* »

C'est, sans doute, une raison fort concluante !

Les applications à la géométrie, à la mécanique, à la physique que nous avons faites (Note IV ; *Elementi*, pp. 95-155 ; *Omografie vettoriali*, pp. 65-111) prouvent clairement que le calcul vectoriel est applicable d'une manière complète à toutes les questions qui se présentent dans ces sciences. Et nous croyons, avec M. Timerding, que c'est surtout la variété des notations qui a jusqu'ici borné les applications de l'analyse vectorielle. Naturellement nous parlons de la variété et du défaut de correction logique, la variété formelle n'ayant pas une grande importance.

3. « *Une uniformité quelconque pourrait-elle être imposée ?* » se demande encore M. Wilson.

M. Klein a très justement observé que dans le calcul vectoriel ne sont pas en jeu des intérêts matériels d'ordre extérieur, comme dans l'Electrotechnique ; on ne saurait donc imposer une uniformité quelconque.

Mais l'uniformité logique, qui domine l'algorithme universel de l'algèbre et de l'analyse, doit s'imposer d'elle-même. Et cela n'arrivera pas par la force brutale des intérêts matériels, mais par la force de la rigueur scientifique, la seule admise dans les mathématiques.

Une fois que l'on aura rejeté les idées imprécises ou absurdes et les notations qui en dérivent, le champ est si borné que l'uniformité sera obtenue tout de suite, exception faite pour la forme des symboles, ce qui est une question tout à fait secondaire. Tel est le but que nous espérons atteindre par nos travaux. Ces travaux n'ont pas permis l'acceptation officielle, de la part du IV^{me} Congrès international des mathématiciens à Rome, de l'un des systèmes vectoriels actuellement connus. Cela nous fait espérer que nous réussirons !

4. M. Wilson, après avoir observé la grande variété des applications de l'analyse vectorielle, ajoute encore : « *Il semble impossible et certainement inutile d'établir un ensemble de notations uniformes pour un nombre aussi considérable de sujets et de méthodes que ceux auxquels les vecteurs peuvent s'appliquer.* »

Il n'y a rien d'impossible et nous l'avons démontré avec nos Notes et avec nos deux livres.

Les vecteurs changent-ils de nature selon leurs applications à des questions de physique ou de géométrie? Alors il est certainement inutile de fixer un ensemble de notations uniformes. Mais M. Wilson sait très bien que les vecteurs, leurs opérations et leurs fonctions restent toujours les mêmes dans les applications; l'unification des notations, dans le sens dont nous avons déjà parlé, s'impose alors comme une nécessité absolue.

M. Wilson a parfaitement raison, s'il parle des auteurs qui nous ont précédés, lorsqu'il observe: « *On doit remarquer que, tant que l'analyse vectorielle traite de questions de physique, elle se sert presque exclusivement du système de coordonnées rectangulaires.....* » Mais nous croyons qu'il n'a pas le droit de juger le futur; pour le présent, nos travaux lui prouvent qu'il a tort.

5. Nous n'avons pas considéré les fonctions vectorielles linéaires. « *C'est une omission sérieuse, observe M. Wilson, car la considération de la fonction vectorielle linéaire peut jeter un jour nouveau sur la question de ce qui est nécessaire pour le système minimum.* »

A la fin de la Note III nous avons dit la même chose; et dans la Note V nous avons rappelé bien d'autres lacunes du système minimum. Nous avons commencé nos études par ce système; mais tout était déjà prêt pour l'étude des fonctions linéaires que nous avons faite dans notre livre *Omografie vettoriali*. En un mot, nos travaux vont bien au delà du système minimum.

Dans notre livre M. Wilson pourra voir que l'étude de la *dyade* de Gibbs n'est pas le seul moyen pour comprendre ce que sont les vecteurs et leurs opérations. La *dyade* est un opérateur vectoriel [Note V, note 8] défini par deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} . Cet opérateur pourra donner, peut-être, notre homographie $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, p. 20, mais il est impossible qu'il donne aussi les opérateurs généraux, c'est-à-dire les « dérivées par rapport à un point ». Ces opérateurs sont en effet à neuf dimensions, et ils devraient dépendre de trois et non pas de deux vecteurs; mais il est important d'observer qu'on peut seulement exprimer une telle dépendance de trois vecteurs au moyen des trois autres *vecteurs fixes de référence*; la dépendance est donc tachygraphique et non absolue. La *dyade* n'a pas le caractère que M. Wilson lui attribue.

Il semble que M. Wilson est de l'opinion que *la seule manière de voir qu'il y a non seulement 2, mais 3 produits de vecteurs, soit: le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit « dyade », est la considération des systèmes linéaires de Gibbs*. Nous demandons alors: le produit alterné (bivecteur) de Grassmann dérive-t-il de ces trois? n'est-il pas fondamental? les autres opérateurs de notre *Omografie* sont-ils inutiles? les quaternions, ou les quaternions droits, dérivent-ils de la *dyade*?

6. On peut toujours exprimer un opérateur vectoriel par des

coordonnées; il fonctionne alors comme *tachygraphe*. C'est un *tachygraphe accidentel*, s'il peut être défini indépendamment des coordonnées; il est au contraire *essentiel*, si une telle définition absolue n'est pas possible.

Les opérateurs ∇ , $\nabla \times$ de Gibbs (Note III, n. 17) sont des opérateurs absolus, car la div et la rot peuvent être définies sans les coordonnées [*Elementi*, pp. 66-71; *Omografie vettoriali*, pp. 56-60]; ∇ , au contraire, est un *tachygraphe essentiel* et le signe \cdot , ou \times , qui le suit, est un opérateur, qui, sans les coordonnées, n'a plus de valeur. La même chose a lieu pour \mathbf{u} grad, qui n'a rien à voir avec la fonction grad [*Omografie vettoriali*, p. 51], et dans lequel grad figure pour une analogie cartésienne tout à fait accidentelle; et aussi pour Δ et Δ' , comme nous avons déjà observé dans notre réponse aux observations de M. Timerding (n. 3)¹.

Après avoir rappelé tout cela, il nous faut observer que si Δ , dans certaines formules, suit les mêmes lois que des vecteurs, ce n'est pas une raison pour justifier la dénomination de *vecteur symbolique*; car la qualité d'être symbolique ne peut pas détruire l'autre d'être vecteur et ∇ n'est pas un vecteur, c'est un *tachygraphe*. Et si M. Wilson se fût donné la peine de lire ce que nous avons écrit au n° 17 de notre Note III, à propos des notations de Gibbs, il n'aurait pas écrit *que notre affirmation est fausse*.

En conclusion, peut-on admettre, dans les mathématiques, un même nom, un même signe, pour indiquer deux choses différentes? Nous ne le croyons pas; par conséquent nous n'avons pas suivi et nous ne suivrons jamais cette voie, qui conduit inévitablement à faire des confusions.

Août 1909.

C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO.

Sur le principe d'induction complète.

On reste, semble-t-il, encore indécis sur le rôle à attribuer, en Arithmétique, au principe d'induction complète. Ce principe ne serait-il pas tout bonnement, selon l'expression de M. Poincaré, une *définition déguisée*?

Si l'on admet qu'une théorie purement rationnelle doit se rapporter aux concepts les plus généraux possédant les propriétés dont elle s'occupe, le véritable objet de l'Arithmétique est l'étude de certains *types ordinaux* et, en premier lieu, du type ordinal auquel appartient la suite des nombres naturels et que G. Cantor

¹ La tachygraphie cartésienne ne peut se passer de tels *pseudo-opérateurs* vectoriels.

M. KLEIN [*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, cours autographié, t. II, pp. 42-139] expose, en la simplifiant, la première méthode analytique de Grassmann.

Il est bien connu que M. PEANO [*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, ecc., Torino, Fratelli Bocca, 1888] a, depuis longtemps, réduit à une forme absolue les formations de Grassmann; mais M. Klein ne fait pas même allusion à ce livre!