

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SCIENCE EXTENSIVE DE GRASSMANN
Autor: Jahnke, Eug.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-11870>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA SCIENCE EXTENSIVE DE GRASSMANN ¹

(*Ausdehnungslehre*.)

« Quand la force caractéristique d'un esprit remarquable pour son temps se manifeste déjà par le fait qu'il sait comprendre et développer les idées vers lesquelles nous pousse le progrès de la science, et qu'il apparaît ainsi comme le représentant de son époque, cette force est encore plus remarquable lorsqu'elle crée un ensemble d'idées qui devançant le temps et tracent à ce dernier en quelque sorte pour des siècles la voie du développement... »

C'est par ces mots que GRASSMANN commence la préface de son mémoire couronné par la Société de Jablonowski et qui prend comme point de départ l'idée profonde de LEIBNIZ concernant une analyse géométrique. On peut les citer encore comme introduction d'un rapport qui a pour objet un des ouvrages les plus remarquables et les plus saillants de tous les temps, la Science extensive (*Ausdehnungslehre*) de Grassmann, que l'on doit considérer comme la réalisation de ce plan de Leibniz. Quand on prononce le nom du maître de Stettin, on pense tout d'abord à cet Ouvrage, le plus significatif entre tous les travaux de Grassmann. Cette importance ne correspond certainement pas à l'accueil qu'il trouva dans le monde mathématique : estimé seulement d'un petit nombre, il est resté plusieurs dizaines d'années sans influence sur le développement des mathématiques. Et il y a quelque temps encore, on pouvait dire, en modifiant une épigramme de Lessing : Qui ne louera pas Grassmann, est-ce que cependant chacun le lira ? — Et si nous nous demandons la cause de cette destinée tragique, nous parvenons à la comprendre si nous suivons le développement mathématique de cette existence de savant se déroulant par des chemins extraordinaires.

Les écrits du père auraient déjà pu, de bonne heure, montrer au fils sa voie dans la culture des mathématiques. Mais le fils y avait plutôt puisé des considérations sur les fondements des mathématiques. En tous cas, l'influence que les écrits mathématiques du père ont exercée sur le fils n'était pas assez forte pour empêcher ce dernier de se livrer à l'Université avec ardeur, d'abord à

¹ Hermann Grassmann's *Ausdehnungslehre*, conférence faite à la Société mathématique de Berlin, le 21 avril 1909, par M. Eug. JAHNKE, président, à l'occasion de la séance solennelle consacrée au centième anniversaire de la naissance de Grassmann (15 avril 1809, 26 septembre 1877). Traduction de M. J. ROSE (Chimay, Belgique). — *Réd.*

Comparer V. SCHLEGEL, *H. Grassmann*. Leipzig, 1878, F.-A. Brockhaus. — V. SCHLEGEL, *Die Grassmannsche Ausdehnungslehre*. Leipzig, 1896, B. G. Teubner.

l'étude de la théologie et plus tard à la philosophie. *Grassmann n'a pas suivi un seul cours mathématique pendant toute la période de ses études universitaires*. C'est seulement à l'âge de trente ans que sa véritable vocation lui est révélée dans toute sa réalité, et qu'il commence à se livrer de plus en plus à l'étude des mathématiques. En 1839 sa conversion décisive se dessine. Un travail écrit *pro fac. doc.* intitulé « Ebbe und Flut » donne à ses études une impulsion dans la direction où le pousse son génie.

Ayant eu l'occasion d'étudier rigoureusement la Mécanique analytique de LAGRANGE et la Mécanique céleste de LAPLACE, il découvre qu'une série de résultats de ces mathématiciens français peut se déduire d'une manière bien plus rapide quand on fait usage de certains principes auxquels il avait déjà été amené auparavant par sa propre réflexion et les écrits de son père. Ce sont l'application du concept des quantités négatives aux segments, l'addition géométrique des vecteurs et la conception de la surface du parallélogramme comme produit extérieur (*äusseres Product*) de deux vecteurs. A Pâques 1842 les résultats de ses études commencent à se cristalliser sous la forme d'un système scientifique; la fière structure de son *Ausdehnungslehre* avec les perspectives s'ouvrant dans toutes les directions, tend de plus en plus à se perfectionner. Le manuscrit arrive bientôt au point que Grassmann peut, dans un cercle restreint, faire des leçons sur la nouvelle science. Parmi ses auditeurs, auprès desquels il met à l'épreuve la puissance de ses idées et la forme choisie d'exposition, nous trouvons son frère Robert, éditeur et rédacteur, et le lieutenant von KAMEKE, le futur ministre de la guerre. Finalement, en 1844, parut la première partie de l'ouvrage qui devait compter deux volumes sous le titre : *Die Wissenschaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre*. Voici la traduction du titre complet¹ :

« La science des grandeurs extensives ou l'*Ausdehnungslehre*,
« nouvelle théorie mathématique exposée et éclaircie par des ap-
« plications, par Hermann GRASSMANN ». Le sous-titre pour la pre-
« mière partie était : « La science extensive réglée (*Die lineale Aus-
« dehnungslehre*), nouvelle branche des mathématiques exposée et
« éclaircie par des applications aux autres branches des mathéma-
« tiques, comme la Statique, la Mécanique, le Magnétisme et la
« Cristallographie. »

Dans la préface Grassmann s'explique sur la forme que l'on doit

¹ *Die Wissenschaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin, dargestellt und durch Anwendungen erläutert von Hermann GRASSMANN, Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin, — und mit dem Untertitel für den ersten Teil. Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert, von Hermann GRASSMANN, Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin. Leipzig, 1844, Verlag von Otto Wigand.*

donner à l'exposition d'une nouvelle science de manière que sa position et son importance, ou plutôt sa nécessité soit bien reconnue, et il prononce clairement qu'il est indispensable d'en révéler les applications et les rapports avec les sciences qui y sont intimement liées. La première idée une fois conçue, le nouveau calcul se développa de plus en plus à l'aide de la mécanique d'une manière très rapide et avec la plus grande fécondité. Grassmann se rend fort bien compte que les mathématiciens de son temps ont une certaine crainte au sujet des débats philosophiques sur des sujets mathématiques et physiques. Pourtant il croit être obligé d'assigner à la nouvelle science sa place dans le domaine scientifique et de choisir l'exposition scientifique abstraite ou, comme il dit, l'exposition rigoureusement scientifique, qui remonte aux concepts originaux. Son esprit philosophique, plein des idées de Schleiermacher, exige qu'au point de vue scientifique il est indispensable de déduire ses idées des principes les plus élevés que la pensée puisse atteindre.

On ne peut nier que l'*Ausdehnungslehre* est redevable des avantages essentiels à ces efforts de l'auteur. La profondeur et l'abondance des idées philosophiques qui sont contenues dans l'ouvrage, la hauteur de l'abstraction et l'étendue de l'horizon où s'élève l'auteur resteront toujours dignes d'admiration et un monument de sa puissante pénétration. Aussi Grassmann est-il arrivé dans cette voie à des vues extrêmement importantes relatives aux fondements des mathématiques. C'est le cas pour les recherches ayant pour but de rendre la théorie des proportions indépendante du principe de continuité, c'est-à-dire sans faire appel au concept des incommensurables. On peut donc le considérer comme ayant ouvert la voie à une telle théorie des proportions, idée réalisée par F. SCHUR et HILBERT¹. L'exposé de l'arithmétique et de ses opérations, tel qu'on le trouve dans l'*Ausdehnungslehre*, a donné lieu à des recherches fondamentales comme celles qui ont été faites par HELMHOLTZ et DEDEKIND sur la notion de nombre². Le nom de Grassmann est lié de la manière la plus intime à l'histoire de la grande révolution qu'a subie le domaine des principes de l'Arithmétique, de la Géométrie et de la Mécanique et qui n'est pas encore terminée. Rappelons en outre que le mathématicien de Stettin est parvenu, avant RIEMANN, au concept de la variété n -uple. Aussi son expression « *Ausdehnungslehre* » ne signifie-t-elle rien d'autre que ce que nous appelons aujourd'hui Géométrie à n dimensions.

¹ Cf. KNESER, *Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischem Axiom und dem Begriff des Inkommensurablen*. — *Sitzungsb. Berl. Math. Ges.* t. 1, 4-9 (1901) et *Math. Ann.*, t. 58, 583-84 (1904).

² V. HELMHOLTZ, *Zählen und Messen*. Philosophische Aufsätze Ed. Zeller gewidmet. Leipzig, 1887, Fues. — DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, 1888, Vieweg u. S.

Toutefois, en ce qui concerne l'introduction des nouvelles idées dans la science mathématique, la forme d'exposition choisie par Grassmann est une méprise qui doit être mise sur le compte de ses études antérieures en philosophie. C'est une erreur, qui se glisse peut-être encore de nos jours dans le cercle restreint de ceux qui pensent avec Grassmann que dans un premier enseignement scientifique des mathématiques, il faut donner la préférence à la méthode la plus rigoureuse possible et que dans l'initiation de la jeunesse aux secrets de la Géométrie, il faut commencer par une introduction scolastique et l'exposition de définitions rigoureuses des éléments. Grassmann était tombé dans une semblable erreur; il le reconnut trop tard, quand un an s'écoula après l'autre, sans que son Ouvrage fût apprécié, sans qu'il eût trouvé une critique malgré les efforts de son auteur ou qu'il eût donné naissance à des recherches analogues. Il aurait dû donner en première ligne des applications, des explications par des exemples, de nouveaux résultats auxquels conduit son calcul; mais il ne se résolut à les indiquer que quelques années plus tard.

Quant à l'impression produite par son Ouvrage sur les mathématiciens contemporains, elle nous est connue par les affirmations de GAUSS, de GRÜNERT et de MÖBIUS. Le grand géomètre GAUSS écrit en 1844 : « En parcourant votre travail au milieu d'une foule d'autres travaux hétérogènes, je crois remarquer que les tendances de votre livre rencontrent partiellement le même chemin que j'ai parcouru depuis presque un demi-siècle et dont, il est vrai, je n'ai fait mention que d'une manière très rapide dans les *Commentaires de la Société de Göttingue*, et plus encore dans les *Göttingische gelehrte Anzeigen*; c'est le cas notamment pour la métaphysique concentrée des grandeurs complexes. J'ai aussi parlé fréquemment dans mes cours de la fécondité infinie de ce principe pour la géométrie de l'espace; mais les démonstrations n'ont été données que ça et là et présentées comme ne pouvant être comprises que par un lecteur attentif. Toutefois cela ne paraît être qu'une similitude partielle et éloignée dans la tendance, et je vois bien que pour découvrir la quintessence propre de votre Ouvrage, il sera nécessaire de se familiariser d'abord avec votre terminologie caractéristique. »

GRÜNERT remarque, dans un écrit de l'année 1844, que la lecture de l'*Ausdehnungslehre*, avec ses réflexions philosophiques, n'a pas toujours été pour lui sans difficulté et qu'il n'a pas réussi complètement à se former une vue déterminée et bien claire de la tendance propre de l'Ouvrage.

Et même celui qui devait compter comme le juge particulièrement compétent sur les idées de Grassmann, MÖBIUS, répond dans un écrit de l'année 1845 : « A ce sujet, j'avoue que je me suis vi-

vement réjoui d'apprendre à connaître en vous un parent de l'esprit, mais que cette parenté spirituelle a lieu seulement en mathématique, et nullement sous le rapport de la philosophie... Apprécier, comme il convient, l'élément philosophique de votre excellent mémoire, sur lequel est basé l'élément mathématique, oui, le comprendre seulement comme il faut, j'en suis incapable ; je l'ai reconnu suffisamment après plusieurs tentatives d'étudier votre Ouvrage *uno tenore*, car j'ai toujours été retenu par sa grande généralité philosophique... »

A une autre occasion¹ l'inventeur du calcul barycentrique signale les difficultés auxquelles est sujette l'étude de l'*Ausdehnungslehre*, difficultés qui, comme il dit, « résultent de ce que l'auteur cherche à établir sa nouvelle analyse géométrique d'une manière qui s'écarte sensiblement de la marche habituelle, admise jusque là dans les recherches mathématiques ; que, de plus, il traite comme des grandeurs, par analogie avec les opérations arithmétiques, des objets qui, par eux-mêmes, ne sont pas des grandeurs et dont on ne peut se faire aucune idée précise... »

Ces grandeurs, ou, comme dit Grassmann, les *éléments* de l'*Ausdehnungslehre* sont définies comme il suit. Il comprend par *élément* une chose qui est capable d'un changement continu, quel que soit son état, en faisant abstraction de toute autre particularité de la chose et de toute autre propriété de son état. Il ajoute alors : « Si l'élément change d'état toujours de la même manière de sorte que si d'un élément a de la figure, il en résulte par un tel changement un autre élément b , on déduit, par un changement *analogue*, de l'élément b un nouvel élément c de la même figure, on parvient alors à une figure correspondant à la ligne droite, c'est-à-dire au domaine du second degré.

Je ne veux pas entrer ici dans les diverses considérations déjà indiquées par Möbius et que l'on peut élever contre ces définitions trop générales ; elles ont été particulièrement mises en évidence par M. Study dans ses Notes ajoutées aux Oeuvres de Grassmann. On ne se méprendra pas en supposant que ces définitions ont été acquises par la traduction en langage abstrait d'idées géométriques. L'indétermination disparaît d'un coup dès que les principes nouveaux sont traduits dans le domaine des concepts géométriques définis d'une manière précise. Alors Grassmann trouve *une méthode d'une fécondité inépuisable qui consiste en ce que les figures de l'espace sont directement soumises au calcul*, méthode par laquelle l'analyse géométrique esquissée par LEIBNIZ se trouve réalisée. La tendance de cette méthode en géométrie est la fusion des méthodes analytique et synthétique. Elle permet de

¹ MÖBIUS, *Ges. W.*, I, p. 615.

suivre la construction pas à pas, et de traduire en langage analytique chaque pas de la construction. Dans l'*Ausdehnungslehre* chaque équation n'est que l'expression analytique d'une relation géométrique ; celle-ci se traduit très nettement par l'équation sans être cachée par des grandeurs arbitraires, comme, par exemple, par les coordonnées de l'analyse ordinaire, et elle peut y être lue sans autre forme de procès.

Grassmann atteint ce but en introduisant une espèce particulière de multiplication, la multiplication extérieure, de sorte que le *produit extérieur* $[AB]$ représente, en grandeur et position, le segment AB de la droite qui passe par les deux points A et B . De même il appelle *produit extérieur* $[ABC]$ de trois points A, B, C , le parallélogramme ABC dont on considère la surface et la position de son plan, de sorte que ce produit devient nul quand la surface disparaît, c'est-à-dire quand les trois points sont collinéaires. Il appelle *produit extérieur* $[ABCD]$ le tétraèdre des sommets A, B, C, D , et *produit extérieur* $[ac]$ le tétraèdre des arêtes opposées a, c ; ces produits s'évanouissent quand les quatre points ou les deux droites sont dans un même plan. Par *produit extérieur régressif* de deux droites *d'un plan*, il entend leur point d'intersection ; le produit régressif $[\pi_1 \pi_2]$ représente l'intersection des deux plans π_1, π_2 ; le produit régressif $[\pi g]$ est le point de rencontre de la droite g et du plan π ; le produit régressif $[\pi_1 \pi_2 \pi_3]$ est le point d'intersection des trois plans π_1, π_2, π_3 , etc. Comme on le sait, la multiplication extérieure se distingue de la multiplication ordinaire par ce fait que la loi commutative n'est plus conservée ; c'est-à-dire que l'on ne peut intervertir les facteurs d'un produit $[AB]$ où A, B sont des éléments de premier degré, à moins que d'en changer en même temps de signe, tandis que les autres propriétés de la multiplication restent conservées. Il faut remarquer toutefois que la dénomination « produit extérieur » n'est pas précisément bien choisie. Il est certain que bien des mathématiciens se sont déjà laissés rebuter de l'étude de l'*Ausdehnungslehre* par le théorème qu'un produit peut devenir nul sans qu'il soit nécessaire qu'un de ses facteurs le soit. Et cependant le théorème en question ne signifie pas autre chose que l'annulation d'un déterminant dont deux séries d'éléments sont identiques, puisque le produit extérieur peut se mettre sous forme de déterminant.

Parmi les plus belles applications de ces nouvelles idées, on peut citer les applications que Grassmann a faites de son analyse à la théorie des courbes et des surfaces. Malheureusement dans son *Ausdehnungslehre* il ne leur a consacré que six pages, et il n'a donné relativement à leur fécondité que de simples indications. L'exposition détaillée, qu'il destinait à la seconde partie de l'Ouvrage, fut publiée plus tard dans une série de travaux écrits d'une

façon très claire, dans le *Journal de Crelle*. On y trouve pour la première fois une théorie purement géométrique des courbes et des surfaces algébriques. Je me contente d'indiquer le théorème principal sur lequel se base la *nouvelle théorie des courbes planes* : « Quand la position d'un point x mobile dans le plan est limitée par ce fait qu'un point et une droite, déduits de ce point et d'une série de points et de droites fixes au moyen d'une règle, doivent coïncider, alors le point x décrit une figure ponctuelle algébrique de degré n si dans cette construction le point x est employé n fois ». Et inversement toute courbe algébrique peut être engendrée par la méthode indiquée. Le théorème correspondant pour les courbes de classe n enveloppées par une droite mobile découle du précédent en changeant point et droite. CASPARY a donné plus tard les théorèmes analogues pour les courbes gauches, les complexes et les congruences linéaires. Grassmann appelle *réglé (lineal)* ce mode de génération, non pas pour exprimer que l'on puisse dessiner les courbes algébriques au moyen de la règle ; il dit expressément que la nouvelle théorie soumet à une recherche purement géométrique même ces courbes algébriques qui ne peuvent pas être simplement engendrées en traçant des lignes droites. On peut dire, chaque fois que l'on réussit à mettre l'équation d'une courbe algébrique sous la forme d'un produit extérieur de points et de droites, qu'on a trouvé également un mécanisme formé de pointes et de barres pour sa génération ; et réciproquement il est toujours possible de trouver un tel mécanisme pour la génération d'une courbe algébrique.

Mais l'introduction des éléments de l'espace dans le produit extérieur, qui égalé à zéro représente une figure de l'espace, n'en fournit pas seulement la construction réglée ; on n'en aurait alors qu'une représentation *symbolique*. Si l'on choisit pour les points, les droites et les plans leur représentation en coordonnées homogènes, le produit extérieur fournit aussi la représentation de la figure en coordonnées, puisque la représentation de Grassmann est plus qu'un symbole, puisqu'elle est un *algorithme*.

Les applications faites par Grassmann à la projectivité et à la perspective d'ordre supérieur dans le plan, sont d'une importance particulière ; elles ont été exposées dans un mémoire ultérieur inséré dans le *Journal de Crelle*. Après avoir montré que les rapports féconds de la projectivité et de la perspective étudiés par STEINER découlent immédiatement de son analyse géométrique, il arrive au théorème fondamental que toute courbe algébrique de degré $m + n$ est engendrée par l'intersection de deux faisceaux projectifs d'ordre m et n , et que les m^2 et n^2 sommets des faisceaux se trouvent sur la courbe d'ordre $m + n$.

Ce mode de génération des courbes d'ordre supérieur au moyen de faisceaux projectifs de courbes d'ordre inférieur a été attribué

jusque dans ces derniers temps à CHASLES et à de JONQUIÈRES, bien que M. SCHEFFERS ait déjà fait remarquer que le travail de Grassmann est de l'année 1851¹, tandis que les mémoires des deux Français ne sont parus qu'en 1852 et 1858. Il serait temps que les nouvelles éditions de CLEBSCH-LINDEMANN : *Vorlesungen über Geometrie*, de SALMON-FIEDLER : *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, de PASCAL : *Repertorium der höheren Mathematik* en tiennent compte et parlent de la génération grassmannienne des courbes algébriques au lieu de celle de Chasles-de Jonquières.

Pour donner une idée juste de l'étendue et de la richesse des notions dont est sortie l'*Ausdehnungslehre*, je devrais encore mentionner les mémoires parus plus tard, qui, en grande partie, ne sont que des développements d'indications contenues dans l'ouvrage de 1844.

Je me contente de faire ressortir comme caractéristique pour la multiplicité des méthodes de Grassmann leur application aux déterminants, à la mécanique, à l'électrodynamique et à la cristallographie. L'exposition détaillée de l'électrodynamique suivit un an plus tard, dans un grand mémoire des *Annales de Poggendorf*, et conduisit Grassmann à la découverte de la loi électrodynamique que CLAUSIUS devait découvrir encore une fois, quelque trente ans plus tard, au moyen de considérations physiques, loi dont l'importance est, d'ailleurs, diminuée aujourd'hui par l'introduction des électrons.

J'ai déjà fait remarquer précédemment que l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann a eu un précurseur dans LEIBNIZ. Or, il est un fait digne de remarque : c'est que à peu près à l'époque où Grassmann est conduit à son calcul, des idées analogues surgissent en d'autres endroits et qu'elles se sont développées d'une manière toute indépendante l'une de l'autre. Et pour un savant qui fera un jour l'histoire des sciences mathématiques au 19^e siècle, il y aurait une mine très riche à exploiter en recherchant comment et pourquoi à l'époque de 1830 à 1850 le terrain était mûr pour le développement de l'*Ausdehnungslehre* ou, en employant une expression moderne, de l'analyse vectorielle. Il y aurait lieu pour lui « de suivre la marche des idées qui se développent communément parmi les générations et de faire voir les tendances générales suivant lesquelles les découvertes d'un seul représentent plutôt les symptômes que les causes elles-mêmes ² ». Ces idées, en faisant abstraction des résultats de GAUSS que l'on ne connaît que depuis peu de temps, furent introduites en 1827 par le *Calcul barycentrique*, toujours trop peu admiré, en 1843 par la *Mécanique céleste* de MÖBIUS à Leipzig, et en 1835 par la *Théorie des équipol-*

¹ Grassmann, *Ges. W.* II, p. 218-219, B.-G. Teubner, Leipzig.

² CLEBSCH, *Gedächtnisrede auf J. Plücker*, *Abh.* I, p. X.

lences de BELLAVITIS à Padoue. Puis suivit la création de la *Méthode des quaternions*, par HAMILTON, à Dublin, dans une série de travaux¹ publiés en 1843, 1844 et dans les *Lectures on quaternions* en 1853. Et finalement en 1845 de S^t-VENANT communiqua une multiplication géométrique des vecteurs qui se déduit de la multiplication extérieure de Grassmann.

Les nouvelles recherches ont, en complétant la lettre citée plus haut de Gauss à Grassmann, tiré au jour une intéressante notice de l'olympien de Göttingue, laquelle paraît avoir été écrite en 1843 au sujet du calcul barycentrique de Möbius². Il y écrit : « Le calcul barycentrique trouve son pendant dans un autre calcul (probablement plus vaste) que l'on peut appeler calcul des résultantes. De même que le premier s'occupe de points où l'on suppose fixées des masses pesantes, l'autre a pour objet des droites suivant lesquelles agissent des forces. Si $a, b, c, d \dots$ sont de telles lignes suivant lesquelles agissent des forces dans un sens déterminé pour chacune d'elles, ces forces étant proportionnelles aux nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$, l'équation

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \dots = 0$$

signifierait que ces forces se font mutuellement équilibre. » Ce calcul des résultantes n'est cependant pas autre chose qu'un cas particulier de l'*Ausdehnungslehre* où les segments (*Linienteile*) ou les vecteurs fixes (*gebundene Vektoren*) sont considérés comme des forces.

Tandis que les idées de MÖBIUS et de BELLAVITIS se retrouvent dans l'Ouvrage de Grassmann qui, cependant, avait dépassé ses prédécesseurs, il existe une différence essentielle entre la *méthode de l'Ausdehnungslehre* et la *méthode des quaternions*. HAMILTON remplace le produit de deux vecteurs par un nouveau vecteur, il ramène ainsi le produit du second degré aux unités fondamentales ; Grassmann, au contraire, bâtit son système sur l'idée de dimension ou de degré (*Stufe*) et il introduit la notion autonome d'un élément de plan, c'est-à-dire le bivecteur. Tandis que Hamilton se contente de la notion de vecteur libre, H. Grassmann doit introduire à côté du vecteur *libre*, le vecteur *fixé*, le bivecteur *libre*, le bivecteur *fixé*, etc.³ Si donc le développement de l'analyse vectorielle dû à Hamilton paraît beaucoup plus simple, l'*Ausdehnungslehre* offre un instrument plus puissant. On peut, d'après cela, parler d'une école *grassmannienne* et d'une école *hamiltonienne* dans l'analyse vectorielle. Mais on ne peut pas dire que cette division a contribué à rendre légitime et à répandre l'analyse vectorielle dans le monde mathématique ; c'est cette division qui

¹ *Researches respecting quaternions* exposées en nov. 1843 et imprimées en 1848. — *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra*. Phil. mag. (2), t. 25 (1844). 10-13.

² GAUSS, *Ges. W.*, VIII, p. 298.

³ Cf. E. JAHNKE, *Vorlesungen über die Vektorenrechnung*. Leipzig, 1905, B.-G. Teubner.

a fait changer les notations vectorielles d'auteur à auteur, de sorte que l'on peut, à juste raison, parler d'une anarchie à cet égard. Il est vrai, l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* a justement proposé des notations que les physiciens et les techniciens ont adoptées. Mais je le considère comme exclusif que les mathématiciens se mettent d'accord sur ces notations. Cependant il me semble possible et désirable, avec BURALI-FORTI et MARCOLONGO¹, que, sans avoir égard aux applications à la physique et à la technique, les mathématiciens se mettent d'accord sur *une* notation, en vue seulement des applications en géométrie et en mécanique.

L'*Ausdehnungslehre* de 1844 ne trouva chez les confrères pour ainsi dire aucune attention ; les germes y déposés restèrent d'abord sans développement, et l'éditeur se vit finalement obligé de mettre au pilon les exemplaires non vendus ! Dans ces conditions l'auteur renonça à la publication de la seconde partie de l'Ouvrage.

L'échec de son Ouvrage engagea Grassmann à remanier complètement son exposé en revenant à celui auquel il avait déjà pensé avant la composition de l'*Ausdehnungslehre* de 1844 ; ce remaniement aboutit, dix-sept années après, à la publication de l'*Ausdehnungslehre* de 1862. Il en fit imprimer à ses propres frais trois cents exemplaires, dont il laissa la commission à l'éditeur Enslin. L'*Ausdehnungslehre* de 1844 est totalement différent de l'*Ausdehnungslehre* de 1862, et quant au sujet et quant à l'exposition. Mais cette fois encore Grassmann se méprend sur la forme d'exposition, chose qu'il est aisé de comprendre en raison de son isolement à Stettin où il était privé de toute relation avec des mathématiciens. On s'attendait à un exposé dans le genre de celui des mémoires de Crelle, tandis que l'auteur choisit la forme euclidienne qui convenait encore moins au public académique que la forme philosophique de l'ouvrage de 1844, et cela à une époque où l'on était réellement gâté par les travaux de JACOBI, STEINER, PLÜCKER et HESSE.

La nouvelle exposition se rattache à l'arithmétique. L'arithmétique élémentaire déduit toutes les grandeurs d'une seule, l'unité e , ainsi que l'avait exposé Grassmann dans son traité classique d'arithmétique (Stettin, 1860, R. Grassmann). De même l'*Ausdehnungslehre* de 1862 emploie plusieurs unités analogues $e_1, e_2, e_3 \dots$ dont aucune ne peut se déduire des autres. Les grandeurs déduites linéairement de ces unités sont appelées *grandeurs extensives*. L'idée générale de la multiplication des grandeurs extensives est d'une importance particulière ; elle conduit à la considération des diverses espèces de multiplication. Parmi ces dernières l'auteur en considère deux : la *multiplication algébrique* et la *multiplication*

¹ Per l'unificazione delle notazioni vettoriali ; *Rend. circ. mat.* Palermo, 1907 et 1908. — Voir la discussion de l'*Ens. math.*, T. XI, 41-46, 129-134, 211-217, 341, 459-465.

extérieure. Tandis que celle-là obéit étroitement aux lois de l'algèbre ordinaire, celle-ci se montre caractéristique de l'*Ausdehnungslehre* parce qu'elle fournit les diverses grandeurs qui y figurent. Grâce au *concept de complément*, le produit *intérieur* peut être réduit au produit *extérieur*. Par le *complément* d'une grandeur extensive \mathbf{E} dans un domaine du n^{me} degré d'unités $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$ où $[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \dots \mathbf{e}_n] = 1$, l'auteur comprend la grandeur \mathbf{E}' qui est égale au produit extérieur positif ou négatif de toutes les unités qui n'entrent pas dans \mathbf{E} , et telles que $[\mathbf{E}\mathbf{E}'] = \pm 1$; c'est-à-dire, par exemple, que $\mathbf{e}_3 = \pm \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ dans un domaine du troisième degré puisque $[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = +1$. De cette manière on établit de nouveau les théorèmes de la première *Ausdehnungslehre* d'une manière rigoureuse; en même temps, en introduisant de nombreuses notions nouvelles, le domaine de l'application du calcul est notablement élargi.

Le premier chapitre intitulé : *Les combinaisons élémentaires des grandeurs extensives* se termine par des applications à la géométrie dont j'ai déjà parlé. Grassmann croyait avoir créé, dans son *Ausdehnungslehre*, un instrument universel pour les recherches géométriques, dont l'avantage principal était d'éviter les systèmes arbitraires de coordonnées. D'après STUDY¹, on peut affirmer que Grassmann voyait la matière de la géométrie dans les propriétés de certains groupes de transformations, qui formaient à cette époque les problèmes exclusifs des recherches géométriques. Maintenant que les travaux de Lie nous ont fourni une idée si précise de la multiplicité extraordinaire des groupes et de la géométrie relative à chacun d'eux ou, en d'autres mots, de la théorie des invariants, on peut dire que l'instrument universel, que Grassmann croyait posséder dans son *Ausdehnungslehre*, ne l'est pas et ne peut pas l'être. En réalité, son Ouvrage de 1844 ne traite particulièrement que certains algorithmes qui appartiennent au groupe projectif général et au groupe des transformations affines. A ces deux groupes s'ajoutent encore, dans l'ouvrage de 1862, le groupe des rotations autour d'un point fixe et le groupe si étendu des mouvements euclidiens.

La seconde partie de l'Ouvrage traite de la théorie des fonctions, du calcul différentiel, de la théorie des séries et du calcul intégral, autant qu'y figurent des grandeurs extensives. L'auteur y examine un nouveau domaine, qui n'a pas été traité dans la première édition, et où l'on constate bien l'étendue des applications de l'*Ausdehnungslehre*. Je me contente ici de signaler la théorie des affinités géométriques de Grassmann, dont son fils a donné un développement détaillé dans des notes ajoutées à l'édition des Oeuvres du maître.

¹ Ges. W. I, p. 405-406.

Dans ce même Ouvrage Grassmann s'est occupé en outre du *problème de Pfaff*. M. ENGEL, le distingué éditeur des œuvres complètes de Grassmann, a profité de la publication du second volume des Oeuvres pour signaler ces recherches du maître de Stettin devançant les résultats de Jacobi sur ce sujet, après que Lie eut déjà attiré l'attention sur leur importance.

La seconde édition de l'*Ausdehnungslehre* ne connut pas un meilleur sort que la première. Un revirement d'opinion se fit seulement lorsque HANKEL, CREMONA et CLEBSCH firent remarquer l'importance des recherches du professeur de gymnase de Stettin, et ensuite lorsque SCHLEGEL eut publié son système de la *Raumlehre* (Leipzig, 1872-75, Teubner); où l'on applique l'analyse de Grassmann aux figures de la géométrie élémentaire. On peut encore mentionner, comme digne d'intérêt, que WEIERSTRASS à du moins rappelé, dans ses leçons sur les applications des fonctions elliptiques au problème de la rotation d'un corps¹, les définitions des produits intérieur et extérieur. Et dans son cours sur la théorie des fonctions analytiques, Weierstrass eut soin d'entrer dans les vues de Grassmann et d'Hamilton sur la généralisation du concept des opérations fondamentales. Cela ne se fit, cependant, que pour donner une preuve de la remarque connue faite par Gauss en l'année 1831²:

« L'auteur se réserve de traiter plus tard le sujet dont il est fait mention dans le mémoire actuel, afin de résoudre alors complètement la question et de montrer que les relations entre des objets qui forment une variété de plus de deux dimensions ne peuvent pas fournir encore d'autres espèces de grandeurs admissibles en arithmétique générale. »

En attendant, cette attitude critique du maître berlinois n'en contribua pas moins à répandre de plus en plus les idées de Grassmann.

Le revirement se constatait par ce que les demandes de la première édition de l'ouvrage, devenue très rare, augmentèrent à tel point qu'il fallut songer à une nouvelle édition. L'*Ausdehnungslehre* de 1877 est une réimpression stéréotypée de celle de 1844, sauf une série de notes y ajoutées.

Aujourd'hui l'on rencontre un bon nombre de mathématiciens qui se servent presque exclusivement des méthodes grassmanniennes, et, si l'on peut dire que les idées de l'*Ausdehnungslehre* ne sont plus tout à fait étrangères à la majorité des mathématiciens, il y a lieu de remercier, en premier lieu, M. ENGEL pour l'édition des Oeuvres de Grassmann, faite sous les auspices de la Société saxonne des Sciences. Les nombreuses additions faites

¹ D'après une communication amicale de M. HETTNER.

² Ges. W. II, p. 178.

par M. Engel, en collaboration avec MM. GRASSMANN le jeune, SCHEFFERS et STUDY, devaient contribuer à faire comprendre de plus en plus cet Ouvrage immortel.

Je voudrais terminer ces développements par les paroles prophétiques tirées de la Préface de l'édition de 1862; elles nous donnent l'image d'un homme qui était pénétré de la beauté de sa science sublime et dont la croyance au succès de sa création ne pouvait être ébranlée par son insuccès ultérieur :

« Car j'ai la plus grande confiance que le travail que j'ai consacré à la science ici exposée et qui a pris une part importante de ma vie et exigé les efforts multiples de mes forces, ne sera pas perdu. Je sais, il est vrai, que la forme que j'ai donnée à cette science est imparfaite et doit l'être. Mais je sais aussi et je dois l'affirmer, au risque d'être taxé de prétentieux, je sais que même si cet Ouvrage devait rester de nouveau dix-sept ans ou même plus sans influence, il viendra cependant un temps où il sera tiré des poussières de l'oubli et où les idées qui y sont déposées porteront leurs fruits. Je sais que si je ne suis pas encore parvenu à obtenir la vocation à une chaire universitaire et à rassembler autour de moi un cercle d'élèves, cercle où je pourrais faire fructifier ces idées, il viendra cependant un jour où elles ressusciteront, peut-être sous une autre forme. Car la vérité est éternelle et divine; et aucune phase de développement de la vérité, si restreint que soit son domaine, ne peut passer sans laisser de traces; elle subsiste même si le costume dont l'affuble la faible humanité tombe en poussière. »

Eug. JAHNKE (Berlin).

Traduit de l'allemand par J. Rose, Chimay (Belgique).
