

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1909)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** Sur une fonction continue sans dérivée

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### A propos d'un article de M. Burali-Forti sur le calcul vectoriel.

Dans le numéro de l'*Enseignement mathém.* du 15 sept. 1908 M. Burali-Forti a produit des arguments qu'il estime de nature à orienter le choix d'une notation pour le calcul vectoriel. Il est permis de se demander s'il y a un intérêt réel à fixer la notation pour ce domaine particulier des Mathématiques, contrairement à ce qui a lieu dans tous les autres domaines, où l'usage seul a fait, jusqu'à présent, œuvre d'unification plus ou moins imparfaite.

Une notation vectorielle ne présente en effet rien de bien particulier et les quelques lignes nécessaires pour l'exposer ne dépassent pas les limites du préambule indispensable dans toute œuvre mathématique. De fait, il s'agit uniquement de représenter deux opérations sur les vecteurs (produit externe et produit interne). Dans ces conditions, la question n'est-elle pas sans importance ?

Quant aux propriétés des opérations linéaires (ou transformations homographiques) et au calcul qui serait susceptible de les mettre automatiquement en œuvre, ce sont choses indépendantes de la notation vectorielle elle-même. C'est ainsi que les formules élémentaires signalées par M. Burali-Forti se trouvent dans la plupart des traités sur les quaternions, exprimées, il est vrai, sous des formes un peu différentes, mais tout aussi simples — plus simples même, à mon avis, puisque mes préférences personnelles vont à la notation quaternionnienne.

Au surplus, pense-t-on faire observer une restriction à la liberté qui ne s'imposerait pas d'elle-même ?

G. COMBEBIAC (Bourges.)

### Sur une fonction continue sans dérivée

à propos d'un article de M. Cahen.

M. CAHEN a donné dans l'*Enseignement mathématique*, (t. VIII, p. 361) un exemple de fonction continue n'ayant pas de dérivée pour une infinité de valeurs de la variable. En étudiant plus avant cette fonction, qu'il appelle  $X(x)$ , (voir *Ann. de l'Ec. normale sup.*, XXV, p. 200-219, 1908) il trouve les propriétés suivantes :

« Pour toute valeur de  $x$ , appartenant à un certain ensemble infini dénombrable (E), dont les éléments sont certaines fonctions rationnelles d'un paramètre  $a$ , la fonction prend une valeur qui est la même fonction rationnelle d'un paramètre  $b$ .

« On peut donc calculer ces valeurs sous forme finie. La fonction  $X$  dépend des deux paramètres  $a, b$  ; il y a donc une double infinité

de ces fonctions ; mais on ramène leur étude à celle d'une simple infinité de fonctions ne contenant qu'un paramètre.

« La fonction  $X$  n'a de dérivée pour aucune valeur de  $x$ , sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles.

« Cette fonction satisfait à une infinité de relations fonctionnelles, qui permettent de calculer sa valeur pour toute valeur de  $x$ , quand on la connaît pour les valeurs de  $x$  comprises dans certains intervalles, aussi petits qu'on le veut d'ailleurs.

« On peut aussi calculer, sous forme finie, l'expression  $\int_{x_0}^{x_1} X(x) dx$ ,

lorsque  $x_0$  et  $x_1$  sont deux nombres de l'ensemble (E).

« Enfin ces recherches se rattachent à un mode particulier d'approximation des nombres, dont la numération binaire est un cas particulier, et qui sera peut-être susceptible d'applications arithmétiques. »

### Démonstration élémentaire du théorème de Mannheim.

**THÉORÈME.** -- *Si deux côtés d'un triangle circonscrit à un cercle donné sont fixes et que le troisième côté soit variable, l'enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle est un cercle.*

Soient  $I$  le centre du cercle donné, et  $ABC$  le triangle circonscrit dont les côtés  $AB$ ,  $AC$  sont fixes et le troisième côté  $BC$  est mobile. Nous voulons démontrer que, quelle que soit la position du côté  $BC$ , le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  est toujours tangent à un cercle déterminé.

A cet effet décrivons un cercle tangent intérieurement au cercle  $ABC$  en un point  $P$  et qui touche de plus les côtés  $AC$  et  $AB$  du triangle  $ABC$  aux points  $Q$  et  $R$ . Joignons d'abord  $PB$ ,  $PC$  ainsi que  $QR$ , nous avons :

$$\widehat{AQR} + \widehat{ARQ} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BPC},$$

tous étant supplémentaires à l'angle  $A$ . Joignons ensuite  $PQ$  et  $PR$ ; nous aurons par rapport au cercle  $PQR$  :

$$\widehat{AQR} = \widehat{ARQ} = \widehat{QPR}.$$

Si donc on mène la bissectrice  $PD$  de l'angle  $BPC$ , on a :

$$\widehat{BPD} = \widehat{CPD} = \widehat{AQR} = \widehat{ARQ} = \widehat{QPR} = \frac{1}{2} (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \quad (1).$$

Soit maintenant  $M$  le point où la droite  $PQ$  prolongée rencontre