Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1909)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Sur une fonction continue sans dérivée

A propos d'un article de M. Burali-Forti sur le calcul vectoriel.

Dans le numéro de l'*Enseignement mathém.* du 15 sept. 1908 M. Burali-Forti a produit des arguments qu'il estime de nature à orienter le choix d'une notation pour le calcul vectoriel. Il est permis de se demander s'il y a un intérêt réel à fixer la notation pour ce domaine particulier des Mathématiques, contrairement à ce qui a lieu dans tous les autres domaines, où l'usage seul a fait, jusqu'à présent, œuvre d'unification plus ou moins imparfaite.

Une notation vectorielle ne présente en effet rien de bien particulier et les quelques lignes nécessaires pour l'exposer ne dépassent pas les limites du préambule indispensable dans toute œuvre mathématique. De fait, il s'agit uniquement de représenter deux opérations sur les vecteurs (produit externe et produit interne). Dans ces conditions, la question n'est-elle pas sans importance?

Quant aux propriétés des opérations linéaires (ou transformations homographiques) et au calcul qui serait susceptible de les mettre automatiquement en œuvre, ce sont choses indépendantes de la notation vectorielle elle-même. C'est ainsi que les formules élémentaires signalées par M. Burali-Forti se trouvent dans la plupart des traités sur les quaternions, exprimées, il est vrai, sous des formes un peu différentes, mais tout aussi simples — plus simples même, à mon avis, puisque mes préférences personnelles vont à la notation quaternionienne.

Au surplus, pense-t-on faire observer une restriction à la liberté qui ne s'imposerait pas d'elle-même?

G. Combebiac (Bourges.)

Sur une fonction continue sans dérivée

à propos d'un article de M. Cahen.

M. Cahen a donné dans *l'Enseignement mathématique*, (t. VIII, p. 361) un exemple de fonction continue n'ayant pas de dérivée pour une infinité de valeurs de la variable. En étudiant plus avant cette fonction, qu'il appelle X (x), (voir *Ann. de l'Ec. normale sup.*, XXV, p. 200-219, 1908) il trouve les propriétés suivantes :

« Pour toute valeur de x, appartenant à un certain ensemble infini dénombrable (E), dont les éléments sont certaines fonctions rationnelles d'un paramètre a, la fonction prend une valeur qui est la même fonction rationnelle d'un paramètre b.

« On peut donc calculer ces valeurs sous forme finie. La fonction X dépend des deux paramètres a, b ; il y a donc une double infinité de ces fonctions ; mais on ramène leur étude à celle d'une simple infinité de fonctions ne contenant qu'un paramètre.

« La fonction X n'a de dérivée pour aucune valeur de x, sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles.

« Cette fonction satisfait à une infinité de relations fonctionnelles, qui permettent de calculer sa valeur pour toute valeur de x, quand on la connaît pour les valeurs de x comprises dans certains intervalles, aussi petits qu'on le veut d'ailleurs.

« On peut aussi calculer, sous forme finie, l'expression $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{X}(x)\,dx$, lorsque x_0 et x_1 sont deux nombres de l'ensemble (E).

« Enfin ces recherches se rattachent à un mode particulier d'approximation des nombres, dont la numération binaire est un cas particulier, et qui sera peut-être susceptible d'applications arithmétiques. »

Démonstration élémentaire du théorème de Mannheim.

Théorème. — *Si deux côtés d'un triangle circonscrit à un cercle donné sont fixes et que le troisième côté soit variable, l'enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle est un cercle.*

Soient I le centre du cercle donné, et ABC le triangle circonscrit dont les côtés AB, AC sont fixes et le troisième côté BC est mobile. Nous voulons démontrer que, quelle que soit la position du côté BC, le cercle circonscrit au triangle ABC est toujours tangent à un cercle déterminé.

A cet effet décrivons un cercle tangent intérieurement au cercle ABC en un point P et qui touche de plus les côtés AC et AB du triangle ABC aux points Q et R. Joignons d'abord PB, PC ainsi que QR, nous avons :

$$\widehat{AQR} + \widehat{ARQ} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BPC}\ ,$$

tous étant supplémentaires à l'angle A. Joignons ensuite PQ et PR ; nous aurons par rapport au cercle PQR :

$$\widehat{AQR} = \widehat{ARQ} = \widehat{QPR}\ .$$

Si donc on mène la bissectrice PD de l'angle BPC, on a :

$$\widehat{BPD} = \widehat{CPD} = \widehat{AQR} = \widehat{ARQ} = \widehat{QPR} = \frac{1}{2}\,(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})\ (1)\ .$$

Soit maintenant M le point où la droite PQ prolongée rencontre