

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

V. *Éléments d'analyse infinitésimale*. — Fondements de la théorie des limites. Application de la théorie des limites à la mesure de la longueur de la circonférence, de l'aire du cercle, des surfaces et des volumes du cylindre, du cône et de la sphère. Limite du rapport $\frac{\sin x}{x}$ pour x tendant vers zéro.

Limite vers laquelle tend le binôme $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quand n croît indéfiniment.

Système naturel des logarithmes. Module. — Variable indépendante (argument) et dépendante (fonction). Fonction explicite et implicite. Variation continue de l'argument. Fonction continue pour la valeur donnée de l'argument et dans le domaine donné de l'argument. Exemples de fonctions continues; fonction a^x . Représentation géométrique des fonctions. — Notion de la dérivée et de la différentielle d'une fonction. Signification géométrique et mécanique de la dérivée. — Dérivées de la somme, de la différence, du produit et du quotient de fonctions. Dérivées et différentielles d'une fonction composée. Dérivée de la fonction inverse. — Dérivées des fonctions x^m , exponentielle, logarithmique et des fonctions trigonométriques. — Représentation géométrique de la propriété de la fonction continue: « si la fonction est continue dans un certain domaine de l'argument et si aux limites du domaine elle prend des signes contraires, elle s'annule à l'intérieur du domaine ». — Représentation géométrique du théorème de Rolle; théorème de Lagrange. — Les critères de la croissance et de la décroissance des fonctions. Valeurs extrêmes de la fonction dans le domaine donné de l'argument; leur recherche. Equations de la tangente et de la normale d'une courbe donnée au point donné; tangentes de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Notion de l'intégrale définie. Application au calcul des aires. Notion de l'intégrale indéfinie.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Un peu plus de Cinématique.

Il est une branche de la mécanique qui échappe aux postulats newtoniens: c'est la cinématique. Au moment où ces postulats sont si discutés, ne serait-il pas opportun que l'attention des chercheurs se reporte sur elle?

Toute peu étendue qu'elle soit actuellement, elle n'en suffit pas moins à l'explication de nombreux mécanismes. Un progrès en cette partie pourrait avoir de grandes conséquences.

Voici un point de départ qui mène fort loin :

PROBLÈME. Un point matériel M étant soumis à une rotation propre, autour d'un axe A, dans un système qui est tout entier entraîné dans une rotation autour d'un axe B, déterminer la trajectoire de ce point dans la suite du temps.

Nous spécifions — *et c'est là la nouveauté* — que la distance R du mobile à son axe A doit rester invariable. Mais sa distance à l'axe B pourra varier du fait même de la rotation propre. Soit ψ l'angle que font les deux axes A et B : cet angle demeure constant.

Le lieu le plus étendu des points situés à la distance R d'un axe A est un cylindre de révolution indéfini, de rayon R, décrit autour de cet axe ; notre mobile ne peut que demeurer à la surface de ce cylindre.

D'autre part, l'entraînement est la rotation d'un système variable, puisque tous les points n'en sont pas immobiles. Nous nous faisons une idée d'une telle rotation en subdivisant le temps en intervalles infiniment petits et assimilant le système variable à un système invariable durant chacun de ces intervalles.

Pendant une de ces subdivisions du temps, notre mobile est donc astreint aussi à se trouver sur un certain cylindre de révolution décrit autour de l'axe B. Sa trajectoire, pendant le même temps, sera donc un élément de l'intersection de ce cylindre et de celui de la rotation propre.

Supposons que les axes A et B se rencontrent en un point O. Ce point restera fixe.

Prenons notre mobile sur la perpendiculaire commune aux deux axes A et B, soit en M_0 , nos deux cylindres ont alors même rayon, et leurs axes concourent. Leur intersection est donc plane et la trajectoire, elliptique.

On voit aisément que, en considérant comme axes de rotation les demi-droites menées selon la convention classique, le seul plan d'intersection qui convienne est le plan bissecteur extérieur de l'angle des deux axes. L'ellipse que ce plan détermine a pour petit axe b , et pour excentricité e , savoir :

$$b = R \quad e = \sin \frac{\psi}{2}$$

Traçons cette ellipse en entier : elle sera le lieu des points du plan qui sont à la distance R de l'axe OA ; et puisque le plan est bissecteur, ce sera aussi le lieu des points situés à la même distance de OB. Si nous envisageons le mobile en une position quelconque sur cette ellipse, il y retrouvera les mêmes conditions qu'en M_0 .

A chaque intervalle de temps, un point pris sur le plan bissecteur extérieur a donc sa trajectoire élémentaire sur ce plan, et elle est un élément de l'ellipse définie par $b = R$, $e = \sin \frac{\psi}{2}$.

Dans la suite du temps, le plan bissecteur tourne, de même que l'axe OA, autour de l'axe fixe OB, et il décrit autour de cet axe un cône de révolution ayant pour demi-angle au sommet $\frac{\pi - \psi}{2}$.

Mais rapportons le mouvement du point M à un système de coordonnées participant à l'entraînement : soit, un trièdre trirectangle, ayant pour axe des z , OB, pour axe des y , la perpendiculaire commune OM_0 , l'axe des x étant perpendiculaire aux deux autres. Dans un tel système, l'axe OA et le plan bissecteur restent fixes.

Or, la propriété que possède le point M d'être à la distance R de l'axe OA et de devoir rester invariablement à cette distance et celle encore d'être à la distance R de OB et de rester durant un intervalle de temps infiniment petit à la même distance de OB subsistent en quelque système que l'on ait à en examiner les effets.

Soient donc t_0, t_1, t_2 trois instants consécutifs, séparés par les intervalles infiniment petits $\Delta t_0, \Delta t_1$. Si, à l'instant t_0 dans notre système, le mobile est vu sur le plan bissecteur et sur l'ellipse sus-indiquée, il se déplacera, durant l'intervalle Δt_0 , sur ce plan et cette ellipse, qui sont fixes pour nous ; il s'y retrouvera donc au temps $t_0 + \Delta t_0 = t_1$, puis au temps $t_1 + \Delta t_1$ ou t_2 , et ainsi de suite. Le point M se déplacera donc d'une manière continue sur les dits plan et ellipse.

Plan et ellipse sont fixes dans l'intérieur du système où nous nous sommes placés ; mais ils sont mobiles par rapport à des repères extérieurs. Le grand axe de l'ellipse est, à chaque instant, sur l'intersection du plan bissecteur avec le plan des axes AOB, lequel n'est autre que notre plan des x, z . Soit OD ce grand axe de l'ellipse, qui est dans le système une ligne fixe ; mais si, à un instant t_0 , on a repéré la direction de cette ligne sur quelque étoile éloignée, et tracé sur le plan cette direction OD_0 , on verra sur le plan du mouvement cette direction OD_0 s'écarter continuellement de la direction OD. Le plan et toute figure liée à OD paraîtront donc pivoter autour du point O.

En examinant les choses d'un point de vue extérieur à notre système, c'est, au contraire, la direction OD_0 qui sera fixe, et la direction OD qui s'en écartera continuellement.

Le mobile n'en décrit pas moins son ellipse, mais celle-ci est *tropique* ;

Le pivotement de OD par rapport à OD_0 constitue une sorte de mouvement *précessoral* ;

Enfin, le plan du mouvement éprouve sa *variation conique* autour de l'axe fixe OB.

Les conditions de vitesse des mouvements composants pourront faire que le premier de ces mouvements, le mouvement elliptique, paraisse exister seul, le deuxième étant presque insensible et le troisième, tout à fait négligeable. Mais ces trois sortes de mouvements existent toujours.

En quelque position qu'un mobile se trouve par rapport aux axes A et B, et quand même ces axes ne se rencontreraient pas, on peut toujours mener, par une position N, un plan bissecteur

extérieur de l'angle des axes représentatifs des deux rotations. Soit O_n le point où ce plan rencontre l'axe A ; menons par O_n une parallèle O_nB' à l'axe B. On peut substituer à la rotation d'entraînement une rotation égale autour de l'axe OB' , plus une certaine translation à déterminer à chaque instant.

Sous l'influence de la rotation propre et de la rotation autour de OB' , le mobile N décrit une ellipse, pivotant dans son plan autour de O_n , pendant que ce plan varie coniquement dans l'espace. La translation complémentaire ne modifie en rien la direction des plans, ni les déplacements angulaires ; mais elle reporte le point de pivotement au véritable point fixe, qui est l'intersection du plan bissecteur avec l'axe fixe B. Et, durant chaque intervalle de temps infiniment petit, cette translation respecte aussi le mouvement elliptique élémentaire, mais en le soumettant, par la suite du temps, à son propre changement de direction.

La trajectoire du mobile peut donc toujours, dans les limites utiles d'ailleurs, être définie par une ellipse pivotant autour d'un point de son plan, pendant que ce plan varie coniquement dans l'espace autour du même point.

Quand un pendule bat à la surface de la Terre, la distance du centre de percussion à l'axe d'oscillation est une donnée qui ne varie pas, soit que le pendule batte ou ne batte pas, ni du fait que la Terre tourne. Le cas rentre donc dans les conditions de notre problème. L'expérience du Panthéon a rendu manifeste les trois sortes d'effets que nous venons d'indiquer : trajectoire tropique (alternativement différente), pivotement précessoral (alternatif), variation conique dans l'espace.

La détermination des mouvements dans notre problème exige une analyse plus approfondie que ce qui précède. On démontre :

1° Que lorsque le mobile est sur le plan bissecteur, il décrit sur l'ellipse tropique des secteurs égaux dans des temps égaux, l'origine de ces secteurs étant au centre de l'ellipse.

2° Lorsque le mobile est en dehors de ce plan, le mouvement analogue est possible encore, mais dans certaines limites ; les secteurs égaux décrits dans des temps égaux ont alors pour sommet commun l'un ou l'autre foyer.

3° Lorsque les axes ne se rencontrent pas, les secteurs décrits successivement dans des temps égaux ne peuvent être égaux ni autour du centre, ni autour d'un foyer, ni autour d'aucun autre point.

Les conditions de possibilité, de stabilité ou d'instabilité, de persistance ou de cessation de ces mouvements offrent un grand intérêt et touchent à diverses questions de physique et d'astronomie.

NOTATIONS RATIONNELLES POUR LE SYSTÈME VECTORIEL MINIMUM

(NOMBRE, POINT, VECTEUR)

PROPOSÉES PAR LES PROFESSEURS **C. Burali-Forti** ET **R. Marcolongo**.

NOTE DE LA RÉDACTION. — Ce tableau est extrait de l'étude très documentée que MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO ont consacrée à l'unification des notations vectorielles dans les *Rendiconti di Palermo* (1907-08). A la suite d'une communication qui a été faite sur ce sujet au IV^e Congrès international des mathématiciens qui a eu lieu à Rome, en avril 1908, une Commission internationale a été chargée de l'étude de cette question. Au moment où le Calcul vectoriel se répand de plus en plus dans les sciences appliquées, la nécessité de posséder une notation uniforme, tout au moins pour les opérations, devient très urgente. Il faut espérer qu'un résultat définitif pourra être obtenu d'un commun accord entre les représentants des différentes écoles d'ici au prochain Congrès (Cambridge, 1912).

Nous engageons tous ceux qui s'intéressent au développement des méthodes si fécondes du Calcul vectoriel à examiner les notations proposées tant au point de vue de leur emploi dans les manuels et les mémoires qu'à celui de l'enseignement oral. Il est désirable que la discussion soit aussi large et aussi complète que possible et que l'on entende toutes les personnes compétentes appartenant aux différentes écoles ou représentant les diverses branches qui font emploi de l'Analyse vectorielle. *L'Enseignement Mathématique* est à leur disposition. Nous publierons les observations qu'ils jugeront utiles de nous adresser, ou tout au moins des extraits, dans la rubrique « Mélanges et Correspondances ».

LA RÉDACTION.

Les notations ne doivent pas être en contradiction avec celles Les opérations¹ doivent être assujetties, le plus possible, propres des systèmes mécaniques géométriques de GRASSMANN aux lois formales analogues à celles *universellement* employées (formes géométriques), HAMILTON (quaternions), MÖBIUS (barycentres).

Dans ce qui va suivre : A, B sont des points ; \mathbf{a}, \mathbf{b} des vecteurs ; m, n, φ des nombres réels ; u est un nombre réel et \mathbf{u} un vecteur fonctions d'un point².

¹ Nous appelons *symboles d'opérations* ceux qui, comme $+$, \times , $/$, sont placés entre deux entités. Nous appelons *symboles de fonction* ceux qui, comme \sin , \log , $!$, sont proposés ou placés après une entité. Chaque opération est exprimable par une fonction de deux variables ; par ex., $\sigma(x, y)$ au lieu de $x + y$. Mais, réciproquement, une fonction n'est pas toujours exprimable par une opération. Il y a donc une différence remarquable entre *opération* et *fonction*. Le calcul formal des opérations est, en général, *plus simple* que le calcul formal des fonctions correspondantes des deux variables ; il est donc préférable, lorsqu'il est possible, de faire usage d'opération plutôt que de fonctions.

² Nous croyons qu'une *convention générale et fixe* relative à la forme des lettres qui doivent représenter *nombres, points, vecteurs*, est hors de propos. — Certainement elle n'est point nécessaire, car le calcul vectoriel reçoit le caractère algébrique seulement par les symboles d'opérations $+$, $-$, \times , \wedge et par les symboles des *fonctions* i, e, φ grad, rot, div. Chaque auteur peut, ou non, *ad libitum*, faire une convention spéciale relative à la forme des lettres ; à condition qu'il ne se soustraira pas à l'obligation d'indiquer avec exactitude quelle est la signification des lettres qu'il emploie.

Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion

Notations proposées			
Vecteur de A à B.	B — A (B moins A)	GRASSMANN ³ HAMILTON MÖBIUS ⁴	AB
Grandeur ou module de a	mod a ⁶	ARGAND CAUCHY	a
Somme de A avec a Somme de a avec b Différence entre a et b Produit de a par m	A + a a + b a — b ma am	GRASSMANN HAMILTON (adopté par tous)	<p>Cette notation (qui indique une entité bien différente du vecteur B—A) a pour le produit alterné de GRASSMANN, des propriétés formales analogues à celles du produit algébrique, et doit être, par conséquent, réservée pour le produit alterné. Si AB indique un vecteur on a un nouveau calcul qui n'a pas d'analogie avec le calcul algébrique.</p> <p>Tous les défauts précédents; difficulté typographique du trait superposé; inutilité absolue du trait et des parenthèses.</p> <p>mod est <i>symbole de fonction</i> qui suit toutes les lois algébriques communes, car on l'écrit tout du côté de la variable. Dans la notation a le symbole de fonction est qui n'est pas du côté de la variable. Dans le calcul de GRASSMANN ce symbole produit de la confusion avec la notation , <i>index</i>, symbole de fonction qui préposé à un vecteur ou à un bivecteur produit un bivecteur ou un vecteur (axe-moment d'un <i>couple</i>).</p>

³ Nous indiquons seulement les auteurs qui, les premiers, ont fait usage du symbole que nous proposons.

⁴ B — A, ou A — B, est un cas limite de la notation barycentrique. L'opération A + a conseille d'écrire B — A au lieu de A — B.

⁵ Il fait usage systématiquement de la notation AB; mais il est obligé de se servir de la notation B — A ou A — B pour rendre évidentes quelques identités et pour la théorie barycentrique de MÖBIUS.

⁶ Des auteurs prétendent indiquer avec \overline{m} le vecteur a tel que mod a = m. Il est évident que « vecteur dont le module est m », est une classe qui contient des vecteurs au nombre infini et dont la direction et le sens sont ARBITRAIRES. La notation \overline{m} n'est donc pas logique et doit être exclue.

Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion

Notations proposées		Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion
<p>Produit interne de a par b.</p>	<p style="text-align: center;">a × b (a interne b)</p> <p style="text-align: center;">GRASSMANN RESAL SOMOFF</p>	<p style="text-align: center;">— S(ab)</p> <p style="text-align: center;">S(ab), S(a, b)</p> <p style="text-align: center;">(a . b) (a, b)</p> <p style="text-align: center;">a . b</p> <p>Notation abrégée de HAMILTON, dans laquelle ab est un quaternion, fonction vectorielle qui n'est point nécessaire dans le système vectoriel minimum. La notation complète est — S(I-Ia) (I-Ib).</p> <p>Elles sont des fonctions de deux variables, avec des propriétés formelles plus compliquées que a × b qui a toutes les propriétés formelles algébriques.</p> <p>Fonctions de deux variables. Le symbole de fonction () est contraire aux lois universelles algébriques.</p> <p>Le point est en algèbre un séparateur ; a . b est donc le même que ab, notation qui doit être réservée pour le bivecteur de GRASSMANN, pour laquelle a les propriétés ordinaires formales algébriques.</p>
<p>Produit vectoriel de a par b</p>	<p style="text-align: center;">a ∧ b (a vecteur b)</p> <p style="text-align: center;">(not. nouvelle) ⁷</p>	<p style="text-align: center;">V (ab)</p> <p style="text-align: center;">V(a, b), V(ab)</p> <p style="text-align: center;">[a . b], [a, b]</p> <p style="text-align: center;">a × b</p> <p style="text-align: center;"> (ab)</p> <p>Notation abrégée de HAMILTON; complète V(I-Ia) (I-Ib). Les observations faites pour S.</p> <p>Fonctions de deux variables. Voir observations précédentes.</p> <p>Encore fonctions de deux variables le symbole de fonction étant [], contrairement aux lois algébriques les plus répandues. Dans les notations (a, b), [a, b] la forme des parenthèses doit caractériser les deux fonctions, tandis que dans l'algèbre la forme des paranthèses est <i>accidentelle</i>.</p> <p>(de GIBBS) Le symbole × est de GRASSMANN qui l'a employé dans une signification bien différente, avec toutes les propriétés formelles algébriques. Dans le produit vectoriel il n'a pas la propriété commutative.</p> <p>Notation importante et bien appropriée de GRASSMANN ; mais (ab) est un bivecteur entité qui n'est pas nécessaire dans le système minimum [ab = axe-moment du couple ab].</p>

⁷ Le symbole ∧ est le symbole ordinaire < qui a reçu une rotation à droite de 90°. Un ouvrage de calcul vectoriel peut donc être composé dans une typographie quelconque. De plus, ∧ ressemble à la lettre A, renversée, initiale du mot « vectoriel » ; les symboles + — × ∧ ont le même corps, et les formules sont d'une lecture facile. Une fois établi que le symbole d'opération est plus opportun que celui de fonction de deux variables, il a été nécessaire de proposer un symbole nouveau, car personne n'avait fait usage jusqu'ici d'un symbole convenable.

Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion

Notations proposées

$m + in$ est un quaternion dont m est le scalaire et $n i$ le vecteur. Il n'est pas possible d'identifier $m + in$ avec $(m + in) \mathbf{a}$, car, dans un plan, un quaternion non droit et un vecteur sont des entités à trois et à deux dimensions respectivement. En outre : \mathbf{a} étant supprimé, on supprime l'auto-nomie ; le produit de deux nombres complexes n'a point de rapport avec le produit quaternionnel et avec les opérations $\times \wedge$.

Notation abrégée de HAMILTON (complète $I \nabla u$) dans laquelle ∇ (nabla) est symbole de fonction qui, placé devant un quaternion, produit un quaternion. La même signification a ∇ dans les notations qui donnent la *divergence* et la *rotation* du vecteur \mathbf{u} . Le symbole ∇ qui est bien approprié aux quaternions n'est pas applicable dans le système minimum.

Notation de HAMILTON ; complète — $S \nabla I^{-1} \mathbf{u}$. Observations précédentes.
Le symbole ∇ ne peut pas être celui de HAMILTON. Il n'est point un symbole tachygraphique cartésien ; il a une signification bien différente que dans la notation ∇u , bien que ∇u ne soit pas employé dans la signification hamiltonienne.

Comme le précédent : la notation $||$ est inutile.

Le $\nabla \cdot \mathbf{u}$ de GIBBS, dans lequel ∇ doit être *vecteur symbolique* ; mais il n'a pas les propriétés des vecteurs par rapport à \times . Le symbole $\nabla \times$ est tachygraphique pour les coordonnées cartésiennes ; il n'a pas d'importance, car il n'admet pas de puissances.

$m + in$
au lieu de
 $(m + in) \mathbf{a}$

∇u

— $S \nabla u$

∇u

$|| \nabla u ||$
 $\nabla \times \mathbf{u}$

WESSEL
HAMILTON
BELLAYITIS

$i \mathbf{a}$
 $(m + in) \mathbf{a}$
 $(\cos \varphi + i \sin \varphi) \mathbf{a} e^{i \varphi} \mathbf{a}$

MAXWEL
RIEMANN-
WEBER

grad u

CLIFFORD

div \mathbf{u}

(dans un plan)
 \mathbf{a} tourné d'un angle droit
vecteur $m \mathbf{a} + i n \mathbf{a}$
 \mathbf{a} tourné de φ radians

Gradient de u

Divergence de \mathbf{u}

Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion

Notations proposées		
Rotation de \mathbf{u}	rot \mathbf{u}	<p>Notation de HAMILTON; complète $\nabla \nabla I^{-1} \mathbf{u}$. Observations précédentes. Le même que pour $\{\nabla \mathbf{u} \mid$. Les fonctions de \mathbf{u}, $\{\nabla \mathbf{u} \mid$, $\{\nabla \mathbf{u} \}$ sont caractérisées par la <i>forme</i> des parenthèses: donc, le symbole ∇ est inutile. Mais les parenthèses ne peuvent pas être symboles de fonctions et leur forme ne peut pas distinguer une fonction de l'autre.</p> <p>La notation $\nabla \times \mathbf{u}$ de GIBBS. Voir les observations faites pour la notation $\nabla \cdot \mathbf{u}$.</p>
	$\nabla \nabla \mathbf{u}$ $\{\nabla \mathbf{u} \}$ $\nabla \wedge \mathbf{u}$	<p>(de LAMÉ). Il a la même signification que le mod grad. Dans le calcul vectoriel paraît grad u et, en dépendance, son module.</p> <p>La forme symbolique cartésienne du symbole Δ_2 est $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: mais on a $\Delta_2 u = \text{div grad } u \quad \Delta_2 \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u}$,</p> <p>et donc Δ_2 a des propriétés diverses selon qu'il est proposé à un nombre ou à un vecteur. Or il n'est pas permis d'indiquer avec un même symbole deux fonctions qui diffèrent non seulement par le champ d'application, mais aussi par leurs propriétés. S'il est nécessaire d'employer les produits de trois parmi les fonctions div, grad, rot, on pourra poser</p> <p style="text-align: center;">$\Delta = \text{div grad} \quad \Delta' = \text{grad div} - \text{rot rot}$,</p> <p>ou bien écrire Δ_2 et Δ_2' au lieu de Δ et Δ'.</p>
	Δu $\Delta_2 u$ $\Delta_2 \mathbf{u}$	

Torino } janvier 1908.
Napoli }

C. BURALI-FORTI.
R. MARCOLONGO.

A propos d'un article de M. Burali-Forti sur le calcul vectoriel.

Dans le numéro de *l'Enseignement mathém.* du 15 sept. 1908 M. Burali-Forti a produit des arguments qu'il estime de nature à orienter le choix d'une notation pour le calcul vectoriel. Il est permis de se demander s'il y a un intérêt réel à fixer la notation pour ce domaine particulier des Mathématiques, contrairement à ce qui a lieu dans tous les autres domaines, où l'usage seul a fait, jusqu'à présent, œuvre d'unification plus ou moins imparfaite.

Une notation vectorielle ne présente en effet rien de bien particulier et les quelques lignes nécessaires pour l'exposer ne dépassent pas les limites du préambule indispensable dans toute œuvre mathématique. De fait, il s'agit uniquement de représenter deux opérations sur les vecteurs (produit externe et produit interne). Dans ces conditions, la question n'est-elle pas sans importance ?

Quant aux propriétés des opérations linéaires (ou transformations homographiques) et au calcul qui serait susceptible de les mettre automatiquement en œuvre, ce sont choses indépendantes de la notation vectorielle elle-même. C'est ainsi que les formules élémentaires signalées par M. Burali-Forti se trouvent dans la plupart des traités sur les quaternions, exprimées, il est vrai, sous des formes un peu différentes, mais tout aussi simples — plus simples même, à mon avis, puisque mes préférences personnelles vont à la notation quaternionnienne.

Au surplus, pense-t-on faire observer une restriction à la liberté qui ne s'imposerait pas d'elle-même ?

G. COMBEBIAC (Bourges.)

Sur une fonction continue sans dérivée

à propos d'un article de M. Cahen.

M. CAHEN a donné dans *l'Enseignement mathématique*, (t. VIII, p. 361) un exemple de fonction continue n'ayant pas de dérivée pour une infinité de valeurs de la variable. En étudiant plus avant cette fonction, qu'il appelle $X(x)$, (voir *Ann. de l'Ec. normale sup.*, XXV, p. 200-219, 1908) il trouve les propriétés suivantes :

« Pour toute valeur de x , appartenant à un certain ensemble infini dénombrable (E), dont les éléments sont certaines fonctions rationnelles d'un paramètre a , la fonction prend une valeur qui est la même fonction rationnelle d'un paramètre b .

« On peut donc calculer ces valeurs sous forme finie. La fonction X dépend des deux paramètres a, b ; il y a donc une double infinité

de ces fonctions ; mais on ramène leur étude à celle d'une simple infinité de fonctions ne contenant qu'un paramètre.

« La fonction X n'a de dérivée pour aucune valeur de x , sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles.

« Cette fonction satisfait à une infinité de relations fonctionnelles, qui permettent de calculer sa valeur pour toute valeur de x , quand on la connaît pour les valeurs de x comprises dans certains intervalles, aussi petits qu'on le veut d'ailleurs.

« On peut aussi calculer, sous forme finie, l'expression $\int_{x_0}^{x_1} X(x) dx$,

lorsque x_0 et x_1 sont deux nombres de l'ensemble (E).

« Enfin ces recherches se rattachent à un mode particulier d'approximation des nombres, dont la numération binaire est un cas particulier, et qui sera peut-être susceptible d'applications arithmétiques. »

Démonstration élémentaire du théorème de Mannheim.

THÉORÈME. -- *Si deux côtés d'un triangle circonscrit à un cercle donné sont fixes et que le troisième côté soit variable, l'enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle est un cercle.*

Soient I le centre du cercle donné, et ABC le triangle circonscrit dont les côtés AB , AC sont fixes et le troisième côté BC est mobile. Nous voulons démontrer que, quelle que soit la position du côté BC , le cercle circonscrit au triangle ABC est toujours tangent à un cercle déterminé.

A cet effet décrivons un cercle tangent intérieurement au cercle ABC en un point P et qui touche de plus les côtés AC et AB du triangle ABC aux points Q et R . Joignons d'abord PB , PC ainsi que QR , nous avons :

$$\widehat{AQR} + \widehat{ARQ} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BPC},$$

tous étant supplémentaires à l'angle A . Joignons ensuite PQ et PR ; nous aurons par rapport au cercle PQR :

$$\widehat{AQR} = \widehat{ARQ} = \widehat{QPR}.$$

Si donc on mène la bissectrice PD de l'angle BPC , on a :

$$\widehat{BPD} = \widehat{CPD} = \widehat{AQR} = \widehat{ARQ} = \widehat{QPR} = \frac{1}{2} (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \quad (1).$$

Soit maintenant M le point où la droite PQ prolongée rencontre

le cercle ABC; menons les tangentes PE et MF aux extrémités de l'arc PCM, nous avons :

$$\widehat{PMF} = \widehat{MPE} ;$$

mais PE étant aussi tangente à l'arc PQ, on a :

$$\widehat{PQC} = \widehat{QPE} ,$$

et par suite :

$$\widehat{PMF} = \widehat{PQC} .$$

Ce qui montre que MF est parallèle à AC; le point M est donc le milieu de l'arc AC et :

$$\widehat{MPC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} . \quad (2)$$

D'après les égalités (1) et (2) on a nécessairement :

$$\widehat{CPQ} < \widehat{CPD} < \widehat{CPR} .$$

Il s'ensuit que la droite PD se trouve à l'intérieur de l'angle QPR; cette droite rencontre donc la droite QR entre les points Q et R et appelons I' ce point de rencontre. Comme, d'après l'égalité (1), l'angle I'RA est égal à l'angle I'PB, le quadrilatère I'PBR est inscriptible à un cercle, et par suite :

$$\widehat{RBI'} = \widehat{RPI'} .$$

Mais, puisque

$$\widehat{PPQ} = \widehat{I'PC} ,$$

on a

$$\widehat{RPI'} = \widehat{QPC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} ;$$

la droite BI' est donc la bissectrice de l'angle B du triangle ABC.

On pourra démontrer de la même manière que la droite CI' est la bissectrice de l'angle C du même triangle.

Le point I' est donc le centre du cercle inscrit au triangle ABC, c'est-à-dire le centre I du cercle donné. On voit ainsi que les points Q et R sont les points d'intersection de la droite qui, passant par le point déterminé I, est perpendiculaire à la droite AI

avec les côtés fixes AC, AB. Mais comme la droite AI est fixe quelle que soit la position de la droite BC, les points Q et R sont aussi fixes et le cercle PQR qui touche en ces points aux deux droites fixes AC et AB est bien déterminé et ne dépend nullement de la position de la droite BC.

Ainsi donc, tout cercle circonscrit au triangle ABC est bien tangent au cercle déterminé PQR, quelle que soit la position du côté BC.

Y. SAWAYAMA (Tokio).

Sur le dernier théorème de Fermat.

(A propos d'un article de M. Cailler sur les congruences du troisième degré).

Il est facile, comme on sait, de rattacher la théorie de l'équation de Fermat

$$x^l + y^l + z^l = 0$$

à celle des équations et des congruences du troisième degré.

Soient, en effet, s_1, s_2, s_3 les fonctions symétriques élémentaires $x + y + z, xy + xz + yz, xyz$. La somme $x^l + y^l + z^l$ est une fonction rationnelle entière à coefficients entiers de s_1, s_2, s_3 . En l'égalant à zéro, on obtient une relation de la forme

$$\varphi(s_1, s_2, s_3) = 0,$$

φ étant un polynôme de degré l à coefficients entiers.

Or x, y, z sont racines de l'équation

$$(1) \quad t^3 - s_1 t^2 + s_2 t - s_3 = 0.$$

On voit donc que l'étude de l'équation de Fermat se ramène à celle de l'équation (1) caractérisée par la relation $\varphi = 0$.

Au lieu de l'équation (1) on peut envisager la congruence correspondante mod n , n étant un nombre entier quelconque. L'étude se simplifie, mais la portée de la méthode diminue.

Il m'a paru intéressant d'appliquer à ces congruences les propositions établies par M. Cailler dans son article « Sur les congruences du troisième degré » (*Ens. math.*, novembre 1908, p. 474-487).

Bornons-nous au cas où les nombres x, y, z sont supposés premiers à l , et posons $n = l$. Dans ce cas s_3 n'est pas divisible par l ; d'autre part on a toujours

$$x^l + y^l + z^l \equiv x + y + z.$$

Donc $s_1 \equiv 0$ et la congruence du troisième degré s'écrit

$$(1') \quad t^3 + s_2 t - s_3 \equiv 0 \pmod{l}.$$

Or Legendre (*Mém. Acad. Sc. Institut France*, 1823) a déjà fait cette remarque que la différence

$$s_1^l - (x^l + y^l + z^l) = s_1^l - \varphi$$

est divisible par $(x + y)(x + z)(y + z) = s_1 s_2 - s_3$ et par l .
Posons

$$\frac{s_1^l - \varphi}{l(s_1 s_2 - s_3)} = P(s_1, s_2, s_3).$$

Comme s_1^l est divisible par l^l et que d'autre part $s_1 s_2 - s_3$ est premier à l , on aura en faisant $\varphi = 0$,

$$P(s_1, s_2, s_3) \equiv 0$$

et par conséquent

$$P(0, s_2, s_3) \equiv 0,$$

puisque $s_1 \equiv 0$.

On en conclut ceci : si l'équation de Fermat admet une solution première à l , la congruence (1') caractérisée par la relation $P \equiv 0$ a trois racines. Or les polynômes P se calculent très simplement à l'aide de la formule de Waring (E. Lucas, *Théorie des nombres*, p. 274).

Pour $l = 3$, $P = 1$; donc $P \not\equiv 0 \pmod{3}$ et l'équation de Fermat est impossible en nombres entiers premiers à l pour $l = 3$.

Pour $l = 5$, $P = -s_2$. La condition $P \equiv 0$ donne $s_2 \equiv 0$, mais alors le discriminant $-4s_2^3 - 27s_3^2$ de (1') se réduit à $-27s_3^2 = \text{non-résidu}$ (puisque -3 est non-résidu pour tous les l de la forme $3m - 1$). La congruence (1') ne saurait donc avoir trois racines.

Pour $l = 11$, $P = s_2(s_2^3 - s_3^2)$. Le module l étant un nombre de la forme $3m - 1$, nous pouvons écarter l'hypothèse $s_2 \equiv 0$. Reste l'hypothèse $s_2^3 \equiv s_3^2$; le discriminant de (1') se réduit à $-31s_3^2 \equiv 2s_3^2 = \text{non-résidu}$.

Soit encore $l = 17$. Le polynôme P s'écrit $-s_2(s_2^6 - 5s_2^3 s_3^2 + s_3^4)$. En écartant l'hypothèse $s_2 \equiv 0$ et en posant $s_2^3 = u$, $s_3^2 = v$, on est conduit à la congruence

$$u^2 - 5uv + v^2 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad (u - 12v)(u - 10v) \equiv 0.$$

Mais pour $u \equiv 12v$ le discriminant devient $-75s_3^2 \equiv 10s_3^2 = \text{non-}$

résidu. Reste l'hypothèse $u \equiv 10v$; le discriminant devient $-67s_3^2 \equiv s_3^2 \equiv$ résidu.

Le nombre des racines de (1') est donc égal à 0 ou à 3. Mais est-il égal à 0, est-il égal à 3 ? Pour répondre à cette question nous allons appliquer à la congruence (1') le criterium donné par M. Cailler à la p. 486 (quatrième cas). Soient a, b deux nombres définis par les relations

$$ab \equiv -\frac{s_2}{3}, \quad a + b \equiv \frac{3s_3}{s_2}.$$

Pour que la congruence (1') ait trois racines, il faut et il suffit que

$$\frac{a^6 - b^6}{a - b} \equiv 0 \pmod{17}$$

ou

$$\left\{ (a + b)^2 - ab \right\} \left\{ (a + b)^3 - 3ab(a + b) \right\} \equiv 0$$

et comme $a + b$ n'est pas divisible par 17, cette relation s'écrit

$$(u + 27v)(u + 9v) \equiv 0.$$

Or pour $u \equiv 10v$ le premier membre n'est pas divisible par 17. Les propositions établies par M. Cailler permettent donc de démontrer l'impossibilité de l'équation de Fermat en nombres entiers premiers à l pour $l = 17$.

Lorsque le module l est un nombre de la forme $3m + 1$, nous n'avons plus le droit de rejeter l'hypothèse $s_2 \equiv 0$, car le discriminant de (1'), qui se réduit à $-27s_3^2$, est résidu quadratique et la congruence (1') peut avoir trois racines. C'est par l'étude directe de la relation $\varphi = 0$ et non des congruences que Lamé et Lebesgue ont réussi, comme on sait, à démontrer l'impossibilité de l'équation de Fermat pour $l = 7$ (*J. de Mathém.* 1840).

D. MIRIMANOFF (Genève).

Règle à calculs pour les écoles.

Au moment où la règle à calculs tend à pénétrer de plus en plus dans la pratique, il est indispensable de pouvoir en montrer le maniement dans les gymnases et écoles techniques.

Jusqu'ici son introduction dans l'enseignement était rendue difficile par suite du prix élevé de cet instrument. La maison Wichmann (Berlin, NW 6, Karlstrasse, 13), vient d'éditer une règle à calculs en carton blanc, dont le prix très modique (1 mark 25)

permettra d'introduire les règles à calculs à un grand nombre d'exemplaires dans les écoles. La règle mesure 26 centimètres, et, au point de vue de la précision, elle donne les résultats les plus satisfaisants. Les graduations permettent d'effectuer des multiplications, divisions, puissances et racines. En outre la maison Wichmann fait construire des exemplaires de poche, mesurant 15 cm. (prix : 1 mark).

Ainsi que nous avons déjà eu l'occasion de le dire, la règle à calculs ne présente pas seulement un grand intérêt au point de vue des opérations arithmétiques, mais son apprentissage est aussi très instructif au point de vue de la lecture des différentes graduations. C'est une excellente préparation à l'emploi des instruments de mesures.

H. F.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

*Le Rapport préliminaire sur l'organisation de la Commission et le plan général des travaux*¹ a rencontré l'accueil le plus favorable dans les divers pays. On peut être assuré dès maintenant qu'en raison de l'importance et de l'intérêt de la tâche entreprise par la Commission, les délégations trouveront tout l'appui nécessaire, non seulement de la part de leur Gouvernement, mais aussi de la part de tous ceux qui s'intéressent au développement de l'enseignement scientifique et technique.

Les démarches en vue de la constitution de la Commission et de l'approbation des délégations par leur Gouvernement respectif suivent leur cours. Nous espérons pouvoir en donner la liste dans le prochain numéro. Dans plusieurs grands pays les délégations sont déjà formées et se sont mises à l'œuvre en constituant leur sous-commission nationale et en répartissant les travaux des nombreux rapports partiels sur les différentes questions posées par le Rapport préliminaire.

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés et prix proposés.

La séance publique annuelle consacrée aux prix de l'Académie des Sciences de Paris a eu lieu le 7 décembre 1908. M. le Prof.

¹ Voir *l'Enseign. Mathem.* du 15 novembre 1908.