Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1909)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DÉTERMINATION DU TAUX DANS LE PROBLÈME DES ANNUITÉS

Autor: Barbette, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11865

Mais quant à le définir, cela me paraît bien difficile ; il ne saurait être organisé à notre image, il ne nous est donc pas possible de le concevoir.

Conclusion. — En étudiant les conquêtes de l'esprit humain, il semble qu'il y aurait un moyen de raisonner sur les questions qui divisent le plus les hommes ; ce serait de ne rien affirmer *a priori*, de ne pas poser d'axiomes car nous ne sommes, hélas, sûrs de rien, si ce n'est que nous éprouvons des sensations dont nous avons toujours ignoré les causes.

Sans rien affirmer on ferait des hypothèses pour en tirer des conclusions. Auraient raison alors ceux qui de leurs hypothèses auraient su tirer le plus grand nombre de conclusions remarquables, utiles et non contradictoires.

Ne semble-t-il pas maintenant que, avant d'aborder l'étude de la philosophie, il est nécessaire d'avoir parcouru le cycle des connaissances humaines pour profiter de tous les renseignements que peuvent fournir les sciences et s'être assimilé les méthodes employées pour découvrir la vérité ?

SUR LA DÉTERMINATION DU TAUX DANS LE PROBLÈME DES ANNUITÉS

De la formule

$$a = \frac{\mathrm{A}r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

dans laquelle a représente l'annuité à payer pendant n années pour amortir un emprunt A au taux de r pour un franc, en posant $\frac{\mathrm{A}}{a} = \alpha$, on déduit :

$$(1 - \alpha r)(1+r)^n = 1 . \tag{1}$$

Si $n = 1$, cette relation devient

$$(1 - \alpha r)(1 + r) = 1 \qquad \text{d'où} \qquad r = \frac{1-\alpha}{\alpha} .$$

Si $n = 2$, l'équation (1) devient

$$(1 - \alpha r)(1 + r)^2 = 1$$

$$\alpha r^2 + (2\alpha - 1) r - (2 - \alpha) = 0$$

d'où

$$r = \frac{-2\alpha + 1 + \sqrt{4\alpha + 1}}{2\alpha}.$$

Si $n > 2$ [1], posons

$$r = \frac{h}{1 - h}, \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{r}{1 + r}$$

en sorte que r et h croissent ou décroissent en même temps.

L'équation (1) devient successivement :

$$\left(1 - \alpha \frac{h}{1 - h}\right)\left(1 + \frac{h}{1 - h}\right)^n = 1,$$

$$1 - (\alpha + 1) . h = (1 - h)^{n+1},$$

$$1 - (\alpha + 1) . h = 1 - \frac{n + 1}{1} . h + \frac{(n + 1)}{1} . \frac{n}{2} . h^2 - \frac{n + 1}{1} . \frac{n}{2} . \frac{n - 1}{3} . h^3$$
$$+ \dots + (-1)^{n+1} . h^{n+1},$$

$$\frac{n + 1}{1} . \frac{n}{2} . h = (n - \alpha) + \frac{n + 1}{1} . \frac{n}{2} . \frac{n - 1}{3} . h^2$$
$$- \frac{n + 1}{1} . \frac{n}{2} . \frac{n - 1}{3} . \frac{n - 2}{4} . h^3 + \dots - (-1)^{n+1} . h^n,$$

$$h = \frac{2(n - \alpha)}{(n + 1) n} + \frac{n - 1}{3} . h^2 - \frac{n - 1}{3} . \frac{n - 2}{4} . h^3$$
$$+ \dots - \frac{2(-1)^{n+1}}{(n + 1) n} . h^n ;$$

[1] De l'équation (1), nous pourrions déduire une limite *supérieure* et une limite *inférieure* de r, malheureusement trop éloignées, en observant que

$$1 - \alpha r > 0 \qquad \text{et} \qquad (1 - \alpha r)(1 + nr) < 1$$

d'où

$$r < \frac{1}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad r > \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n}.$$

d'où en rèprésentant la constante $\frac{2(n-\alpha)}{(n+1)n}$ par h_1 :

$$h - h_1 = \frac{n-1}{3} \cdot h^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h^3$$

$$+ \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h^4 - \ldots - \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)n} \cdot h^n \qquad (2)$$

Observons que, dans le second membre de cette égalité, le $s^{\text{ième}}$ terme T_s égale le précédent T_{s-1} multiplié par $-\frac{n-s}{s+2} \cdot h$; par suite un terme, considéré en valeur absolue, sera moindre que le précédent tant que nous aurons

$$\frac{n-s}{s+2} \cdot h < 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{n-s}{s+2} \cdot \frac{r}{1+r} < 1$$

c'est-à-dire,

$$n < \frac{s+2}{r} + 2(s+1) \qquad \text{ou} \qquad n < \frac{100(s+2)}{100r} + 2(s+1) .$$

Quand cette condition sera vérifiée, en s'arrêtant dans l'évaluation de h à un terme de rang quelconque de la suite (2), l'erreur commise sera moindre que le premier terme négligé, pris en valeur absolue.

Le tableau suivant, à double entrée, donne une limite supérieure de n pour des valeurs de r variant de 0,01 à 0,14 et des valeurs de s variant de 1 à 10. Nous avons indiqué, en caractères gras, la limite de n immédiatement supérieure au nombre 100.

Pour obtenir la raison δ des valeurs de n suivant une même ligne horizontale du tableau, observons qu'elle est la différence entre deux limites consécutives de n pour une valeur constante de r ; elle est donc

$$\delta = \left\{ \frac{100(s+1)+200}{100r} + 2(s+2) \right\} - \left\{ \frac{100s+200}{100r} + 2(s+1) \right\}$$

$$= \frac{100}{100r} + 2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{100+200r}{100r} .$$

$\delta=\frac{100+200r}{100r}$	Valeur de r.	$s=1$ $n<\frac{300}{100r}+4$	$s=2$ $n<\frac{400}{100r}+6$	$s=3$ $n<\frac{500}{100r}+8$	$s=4$ $n<\frac{600}{100r}+10$	$s=5$ $n<\frac{700}{100r}+12$	$s=6$ $n<\frac{800}{100r}+14$	$s=7$ $n<\frac{900}{100r}+16$	$s=8$ $n<\frac{1000}{100r}+18$	$s=9$ $n<\frac{1100}{100r}+20$	$s=10$ $n<\frac{1200}{100r}+22$
102	0,01	**304**	406	508	610	712	814	916	1018	1120	1222
52	0,02	**154**	206	258	310	362	414	466	518	570	622
$35\frac{1}{3}$	0,03	**104**	$139\frac{1}{3}$	$174\frac{2}{3}$	210	$245\frac{1}{3}$	$280\frac{2}{3}$	316	$351\frac{1}{3}$	$386\frac{2}{3}$	422
27	0,04	79	**106**	133	160	187	214	241	268	295	322
22	0,05	64	86	**108**	130	152	174	196	218	240	262
$18\frac{2}{3}$	0,06	54	$72\frac{2}{3}$	$91\frac{1}{3}$	**110**	$128\frac{2}{3}$	$147\frac{1}{3}$	166	$184\frac{2}{3}$	$203\frac{1}{3}$	222
$16\frac{2}{7}$	0,07	$46\frac{6}{7}$	$63\frac{1}{7}$	$79\frac{3}{7}$	$95\frac{5}{7}$	**112**	$128\frac{2}{7}$	$144\frac{4}{7}$	$160\frac{6}{7}$	$177\frac{1}{7}$	$193\frac{3}{7}$
$14\frac{1}{2}$	0,08	$41\frac{1}{2}$	56	$70\frac{1}{2}$	85	$99\frac{1}{2}$	**114**	$128\frac{1}{2}$	143	$157\frac{1}{2}$	172
$13\frac{1}{9}$	0,09	$37\frac{3}{9}$	$50\frac{4}{9}$	$63\frac{5}{9}$	$76\frac{6}{9}$	$89\frac{7}{9}$	**102** $\frac{8}{9}$	116	$129\frac{1}{9}$	$142\frac{2}{9}$	$155\frac{3}{9}$
12	0,10	34	46	58	70	82	94	**106**	118	130	142
$11\frac{1}{11}$	0,11	$31\frac{3}{11}$	$42\frac{4}{11}$	$53\frac{5}{11}$	$64\frac{6}{11}$	$75\frac{7}{11}$	$86\frac{8}{11}$	$97\frac{9}{11}$	**108** $\frac{10}{11}$	120	$131\frac{1}{11}$
$10\frac{1}{3}$	0,12	29	$39\frac{1}{3}$	$49\frac{2}{3}$	60	$70\frac{1}{3}$	$80\frac{2}{3}$	91	**101** $\frac{1}{3}$	$111\frac{2}{3}$	122
$9\frac{9}{13}$	0,13	$27\frac{1}{13}$	$36\frac{10}{13}$	$46\frac{6}{13}$	$56\frac{2}{13}$	$65\frac{11}{13}$	$75\frac{7}{13}$	$85\frac{3}{13}$	$94\frac{12}{13}$	**104** $\frac{8}{13}$	$114\frac{4}{13}$
$9\frac{1}{7}$	0,14	$25\frac{3}{7}$	$34\frac{4}{7}$	$43\frac{5}{7}$	$52\frac{6}{7}$	62	$71\frac{1}{7}$	$80\frac{2}{7}$	$89\frac{3}{7}$	$98\frac{4}{7}$	**107** $\frac{5}{7}$

Afin de bien saisir l'importance de ce tableau, observons par exemple, que si $r = 0{,}04$, les termes de la suite (2) iront en décroissant : à partir du 1er terme si $n < 79$; à partir du 2me si $79 \leq n < 106$; à partir du 3me si $106 \leq n < 133$; et ainsi de suite. Ou encore, si $n = 100$ et si, dans les calculs, nous constatons que les termes de la suite (2) vont en décroissant à partir du 1er terme, c'est que $r < 0{,}04$; si ces termes vont en décroissant à partir du 2me, c'est que $0{,}04 \leq r < 0{,}05$; s'ils vont en décroissant à partir du 3me, c'est que $0{,}05 \leq r < 0{,}06$; et ainsi de suite.

Valeurs approximatives de h *et de* r. De la relation (2), nous déduisons successivement des valeurs de plus en plus approchées de h et par suite, de r :

$$h_1 = \frac{2(n-\alpha)}{(n+1)n} \quad ; \quad r_1 = \frac{h_1}{1-h_1} .$$

$$h_2 = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_1^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_1^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h_1^4 - \ldots \; ; \quad r_2 = \frac{h_2}{1-h_2} .$$

$$h_3 = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_2^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_2^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h_2^4 - \ldots \; ; \quad r_3 = \frac{h_3}{1-h_3} .$$

. . . .

$$h_{p+1} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_p^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h_p^4 - \ldots \; ; \quad r_{p+1} = \frac{h_{p+1}}{1-h_{p+1}} .$$

Représentons par

$$h_{p+1,1} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2$$

$$h_{p+1,2} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_p^3$$

$$h_{p+1,3} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_p^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} h_p^4$$

. . . .

$$h_{p+1,q} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_p^3 + \ldots + (-1)^{q+1} \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdots \frac{n-q}{q+2} \cdot h_p^{q+1}$$

les approximations successives de h_{p+1} .

La valeur de h_1 étant déterminée, calculons $h_{2,2q_1-1}$ et $h_{2,2q_1}$ de manière que la différence $(h_{2,2q_1-1} - h_{2,2q_1})$ soit suffisamment petite, par exemple moindre que 0,0001 ; puis cherchons dans les mêmes conditions $h_{3,2q_2-1}$ et $h_{3,2q_2}$, $h_{4,2q_3-1}$ et $h_{4,2q_3}$, ... en remplaçant dans h_3 le nombre h_2 par $h_{2,2q_1}$ (valeur moindre que h_2), dans h_4 le nombre h_3 par $h_{3,2q_2}$ (valeur moindre que h_3), ... ; il s'ensuit que les valeurs approximatives de r de rang impair

$$r_{2,2q_1-1}\,,\quad r_{3,2q_2-1}\,,\quad r_{4,2q_3-1}\,,\ \dots\,,\quad r_{p+1,2q_p-1}\,,\ \dots \tag{3}$$

sont respectivement plus grandes que

$$r_2\,,\quad r_3\,,\quad r_4\,,\ \dots\,,\quad r_{p+1}\,,\ \dots$$

tandis que les valeurs approximatives de r de rang pair

$$r_{2,2q_1}\,,\quad r_{3,2q_2}\,,\quad r_{4,2q_3}\,,\ \dots\,,\quad r_{p+1,2q_p}\,,\ \dots \tag{4}$$

sont respectivement plus petites que

$$r_2\,,\quad r_3\,,\quad r_4\,,\ \dots\,,\quad r_{p+1}\,,\ \dots$$

Les suites (3) et (4) satisfont aux trois conditions ci-après :

1° Les deux suites sont croissantes ;

2° Les différences $(r_{p+1,2q_p-1} - r_{p,2q_{p-1}-1})$ et $(r_{p+1,2q_p} - r_{p,2q_{p-1}})$, pour p croissant, deviennent de plus en plus petites ;

3° Les nombres $r_{p+1,2q_p-1}$ et $r_{p+1,2q_p}$, qui comprennent r_{p+1}, sont tels que leur différence $(r_{p+1,2q_p-1} - r_{p+1,2q_p})$ peut devenir moindre et rester moindre que tout nombre positif donné, si petit soit-il.

Théorème. *Si la première suite a pour limite* r, *la seconde a la même limite.*

En effet

$$r - r_{p+1,2q_p} = (r_{p+1,2q_p-1} - r_{p+1,2q_p}) - (r_{p+1,2q_p-1} - r)\,.$$

Or limite $(r_{p+1,2q_p-1} - r_{p+1,2q_p}) = 0$ en vertu de la troisième condition de convergence et limite $(r_{p+1, 2q_p-1} - r) = 0$ par hypothèse ; par suite

$$\text{limite } (r - r_{p+1, 2q_p}) = 0 .$$

Observation. Du théorème qui précède, nous déduisons que la détermination de l'une des deux suites, de la première par exemple, permet de calculer r très approximativement : lorsque l'une des différences $(r_{p+1, 2q_p-1} - r_{p, 2q_{p-1}-1})$ sera moindre que 0,0001, le nombre $r_{p, 2q_{p-1}-1}$ représentera, à fort peu près, la valeur de r ; si cette différence dépasse 0,0001 de très peu, le nombre $r_{p+1, 2q_p-1}$ donnera la valeur de r. Cette valeur pourra s'obtenir de deux façons, soit en prenant $q + 1 = n$, soit en prenant $q + 1 < n$.

A. — Dans le premier cas, $q + 1 = n$: nous calculerons pour $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, ... les valeurs de $h_{p+1, n-1}$ et nous en déduirons celles de $r_{p+1, n-1}$.

Exemple. On donne $n = 4$ et $\alpha = \frac{A}{a} = 3{,}7170984$.

Par suite

$$h = h_1 + h^2 - \frac{1}{2} h^3 + \frac{1}{10} h^4 .$$

1° $$h_1 = \frac{2(n - \alpha)}{(n + 1) n} = 0{,}0282902 ; \quad \text{d'où} \quad r_1 = 0{,}02911 .$$

2° $$h_2 = h_1 + h_1^2 - \frac{1}{2} h_1^3 + \frac{1}{10} h_1^4 .$$

$$h_{2,1} = h_1 + h_1^2 = 0{,}0282902 + 0{,}0007980 = 0{,}0290882 ;$$

$$h_{2,2} = h_{2,1} - \frac{1}{2} h_1^3 = 0{,}0290882 - 0{,}0000112 = 0{,}0290770 ;$$

$$h_{2,3} = h_{2,2} + \frac{1}{10} h_1^4 = 0{,}0290770 + 0{,}0000006 = 0{,}0290776 ;$$

$$r_{2,3} = \frac{h_{2,3}}{1 - h_{2,3}} = \frac{0{,}0290776}{0{,}9709224} = 0{,}02994.$$

3°
$$h_3 = h_1 + h_2^2 - \frac{1}{2} h_2^3 + \frac{1}{10} h_2^4 .$$

$$h_{3,1} = h_1 + h_2^2 = 0{,}0282902 + 0{,}0008455 = 0{,}0291357 ;$$

$$h_{3.2} = h_{3,1} - \frac{1}{2} h_2^3 = 0{,}0291357 - 0{,}0000122 = 0{,}0291235 ;$$

$$h_{3.3} = h_{3,2} + \frac{1}{10} h_2^4 = 0{,}0291235 + 0{,}0000007 = 0{,}0291242 ;$$

$$r_{3.3} = \frac{h_{3,3}}{1 - h_{3,3}} = \frac{0{,}0291242}{0{,}9708758} = 0{,}02999 .$$

Or

$$r_{3.3} - r_{2,3} = 0{,}00005 < 0{,}0001 ;$$

par suite

$$r = 0{,}0299 = 0{,}03 \text{ environ} .$$

Théorème. Considérons la somme

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots \mp a_{n-1} \pm a_n$$

à termes alternativement positifs et négatifs, en sorte que

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 - a_2 \\
s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_n &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots \mp a_{n-1} \pm a_n .
\end{aligned}$$

Ajoutons

$$\sum_1^n s_i = a_1 \,.\, n - a_2 \,.\, (n-1) + a_3 \,.\, (n-2) - a_4 \,.\, (n-3) + \ldots \mp a_{n-1} \,.\, 2 \pm a_n \,.\, 1$$

puis divisons par n :

$$\frac{\sum_1^n s_i}{n} = a_1 - a_2 \,.\, \frac{n-1}{n} + a_3 \,.\, \frac{n-2}{n} - a_4 \,.\, \frac{n-3}{n} + \ldots\ldots \mp a_{n-1} \,.\, \frac{2}{n} \pm a_n \,.\, \frac{1}{n} .$$

Il s'ensuit que

$$s_n - \frac{\sum_1^n s_i}{n} = - a_2 \cdot \frac{1}{n} + a_3 \cdot \frac{2}{n} \cdot - a_4 \cdot \frac{3}{n} + \ldots\ldots$$

$$\mp a_{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} \pm a_n \cdot \frac{n-1}{n}$$

et

$$s_n = \frac{\sum_1^n s_i}{n} - a_2 \cdot \frac{1}{n} + a_3 \cdot \frac{2}{n} - a_4 \cdot \frac{3}{n} + \ldots\ldots$$

$$\mp a_{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} \pm a_n \cdot \frac{n-1}{n} .$$

Par conséquent, si

$$a_2 \cdot \frac{1}{n} > a_3 \cdot \frac{2}{n} > a_4 \cdot \frac{3}{n} > \ldots\ldots > a_{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} > a_n \cdot \frac{n-1}{n}$$

ou

$$a_2 \,.\, 1 > a_3 \,.\, 2 > a_4 \,.\, 3 > \ldots\ldots > a_{n-1} \cdot (n-2) > a_n \cdot (n-1)$$

en prenant

$$s_n = \frac{\sum_1^n s}{n} ,$$

l'erreur commise sera moindre que

$$a_2 \cdot \frac{1}{n} .$$

Observation. Ce théorème sera applicable au calcul de h tant que nous aurons

$$T_{s-1} \cdot (s-2) > T_s \cdot (s-1)$$

ou

$$T_{s-1} \cdot (s-2) > T_{s-1} \cdot \frac{n-s}{s+2} h \,.\, (s-1)$$

$$h < \frac{s-2}{s-1} \cdot \frac{s+2}{n-s}$$

$$\frac{r}{1+r} < \frac{s-2}{s-1} \cdot \frac{s+2}{n-s}$$

d'où

$$n < \frac{(s^2 - 4)\,100}{(s - 1)\,100\,r} + \frac{2s^2 - s - 4}{s - 1} .$$

Dans le problème qui précède :

Si nous prenons

$$h_2 = \frac{h_{2.1} + h_{2.2} + h_{2,3}}{3} = 0{,}0290809$$

l'erreur commise est moindre que $\frac{0.0000112}{3} = 0{,}0000037\ldots$ et a fortiori, moindre que 0,00001. Par suite

$$r_2 = \frac{h_2}{1 - h_2} = \frac{0{,}02908}{0{,}97092} = 0{,}02995 .$$

Si nous prenons

$$h_3 = \frac{h_{3.1} + h_{3.2} + h_{3,3}}{3} = 0{,}0291278$$

l'erreur commise est moindre que $\frac{0{,}0000122}{3} = 0{,}0000040\ldots$ et a fortiori, moindre que 0,00001. Par suite

$$r_3 = \frac{0{,}02912}{0{,}97088} = 0{,}02999 .$$

Or $r_3 - r_2 = 0{,}00004 < 0{,}0001$; nous pouvons donc prendre $r = 0{,}0299 = 0{,}03$ environ .

B. — DANS LE SECOND CAS, $q + 1 < n$: nous suivrons la méthode générale précédemment exposée.

Exemple. On donne $n = 25$ et $\alpha = \frac{A}{a} = 15{,}6220799$.

Par suite

$$h = h_1 + 8\,h^2 - 46\,h^3 + 202{,}4\,h^4 - 708{,}4\,h^5 + 2024\,h^6 - 4807\,h^7 + \ldots$$

1° $$h_1 = \frac{2\,(n - \alpha)}{(n + 1)\,n} = 0{,}0288551 ;$$

d'où

$$r_1 = 0{,}02971 .$$

2° $$h_2 = h_1 + 8\, h_1^2 - 46\, h_1^3 + 202{,}4\, h_1^4 - 708{,}4\, h_1^5 + \dots$$

$$h_{2.1} = h_1 + 8\, h_1^2 = 0{,}0288551 + 0{,}0066609 = 0{,}0355160\ ;$$

$$h_{2.2} = h_{2.1} - 46\, h_1^3 = 0{,}0355160 - 0{,}0011051 = 0{,}0344109\ ;$$

$$h_{2.3} = h_{2.2} + 202{,}4\, h_1^4 = 0{,}0344109 + 0{,}0001403 = 0{,}0345512\ ;$$

$$h_{2.4} = h_{2.3} - 708{,}4\, h_1^5 = 0{,}0345512 - 0{,}0000141 = 0{,}0345371\ ;$$

Observons que $h_{2,3}$ et $h_{2,4}$ diffèrent de moins de 0,0001 et prenons $r_{2.3}$ pour valeur de r_2 :

$$r_{2,3} = \frac{h_{2.3}}{1 - h_{2,3}} = \frac{0{,}0345512}{0{,}9654488} = 0{,}03579\ .$$

3° $$h_3 = h_1 + 8\, h_2^2 - 46\, h_2^3 + 202{,}4\, h_2^4 - 708{,}4\, h_2^5 + \dots$$

$$h_{3.1} = h_1 + 8\, h_{2.4}^2 = 0{,}0288551 + 0{,}0095425 = 0{,}0383976\ ;$$

$$h_{3.2} = h_{3,1} - 46\, h_{2.4}^3 = 0{,}0383976 - 0{,}0018950 = 0{,}0365026\ ;$$

$$h_{3.3} = h_{3,2} + 202{,}4\, h_{2.4}^4 = 0{,}0365026 + 0{,}0002879 = 0{,}0367905\ ;$$

$$h_{3.4} = h_{3.3} - 708{,}4\, h_{2.4}^5 = 0{,}0367905 - 0{,}0000348 = 0{,}0367557\ ;$$

$$r_{3.3} = \frac{h_{3,3}}{1 - h_{3,3}} = \frac{0{,}0367905}{0{,}9632095} = 0{,}03819\ .$$

4° $$h_4 = h_1 + 8\, h_3^2 - 46\, h_3^3 + 202{,}4\, h_3^4 - 708{,}4\, h_3^5 + \dots$$

$$h_{4.1} = h_1 + 8\, h_{3.4}^2 = 0{,}0288551 + 0{,}0108078 = 0{,}0396629\ ;$$

$$h_{4,2} = h_{4.1} - 46\, h_{3,4}^3 = 0{,}0396629 - 0{,}0022842 = 0{,}0373787\ ;$$

$$h_{4.3} = h_{4,2} + 202{,}4\, h_{3,4}^4 = 0{,}0373787 + 0{,}0003896 = 0{,}0377683\ ;$$

$$h_{4.4} = h_{4.3} - 708{,}4\, h_{3,4}^5 = 0{,}0377683 - 0{,}0000501 = 0{,}0377182\ ;$$

$$r_{4.3} = \frac{h_{4,3}}{1 - h_{4.3}} = \frac{0{,}0377683}{0{,}9622317} = 0{,}03925\ .$$

5° $$h_5 = h_1 + 8\, h_4^2 - 46\, h_4^3 + 202{,}4\, h_4^4 - 708{,}4\, h_4^5 + \dots$$

$$h_{5.1} = h_1 + 8\, h_{4,4}^2 = 0{,}0288551 + 0{,}0113773 = 0{,}0402324\ ;$$

$$h_{5.2} = h_{5,1} - 46\, h_{4.4}^3 = 0{,}0402324 - 0{,}0024684 = 0{,}0377640\ ;$$

$$h_{5,3} = h_{5.2} + 202{,}4\, h_{4.4}^4 = 0{,}0377640 + 0{,}0004092 = 0{,}0381732\ ;$$

$$h_{5,4} = h_{5,3} - 708{,}4\, h_{4.4}^5 = 0{,}0381732 - 0{,}0000540 = 0{,}0381192\ ;$$

$$r_{5.3} = \frac{h_{5.3}}{1 - h_{5.3}} = \frac{0{,}0381732}{0{,}9618268} = 0{,}03969.$$

6° $$h_6 = h_1 + 8\,h_5^2 - 46\,h_5^3 + 202{,}4\,h_5^4 - 708{,}4\,h_5^5 + \ldots$$

$$h_{6.1} = h_1 + 8\,h_{5,4}^2 = 0{,}0288551 + 0{,}0116246 = 0{,}0404797\;;$$

$$h_{6.2} = h_{6,1} - 46\,h_{5,4}^3 = 0{,}0404797 - 0{,}0025480 = 0{,}0379317\;;$$

$$h_{6,3} = h_{6.2} + 202{,}4\,h_{5,4}^4 = 0{,}0379317 + 0{,}0004274 = 0{,}0383591\;;$$

$$h_{6\,4} = h_{6,3} - 708{,}4\,h_{5.4}^5 = 0{,}0383591 - 0{,}0000570 = 0{,}0383021\;;$$

$$r_{6.3} = \frac{h_{6,3}}{1 - h_{6.3}} = \frac{0{,}0383591}{0{,}9616409} = 0{,}03989.$$

7° $$h_7 = h_1 + 8\,h_6^2 - 46\,h_6^3 + 202{,}4\,h_6^4 - 708{,}4\,h_6^5 + \ldots$$

$$h_{7.1} = h_1 + 8\,h_{6.4}^2 = 0{,}0288551 + 0{,}0117714 = 0{,}0406265\;,$$

$$h_{7,2} = h_{7.1} - 46\,h_{6,4}^3 = 0{,}0406265 - 0{,}0025963 = 0{,}0380302\;;$$

$$h_{7.3} = h_{7.2} + 202{,}4\,h_{6.4}^4 = 0{,}0380302 + 0{,}0004382 = 0{,}0384684\;;$$

$$h_{7.4} = h_{7.3} - 708{,}4\,h_{6.4}^5 = 0{,}0384684 - 0{,}0000588 = 0{,}0384096\;;$$

$$r_{7,3} = \frac{h_{7,3}}{1 - h_{7.3}} = \frac{0{,}0384684}{0{,}9615316} = 0{,}04000\;:$$

puisque $r_{7,3} - r_{6,3}$ diffère, à fort peu près, de 0,0001, nous pouvons prendre $r = 0{,}04$.

En pratique, il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs successives de r; il suffit de déterminer deux valeurs consécutives h_p et h_{p+1} de h différant, à fort peu près, de 0,0001 : la valeur de r sera très approximativement égale à $\dfrac{h_{p+1}}{1 - h_{p+1}}$.

E. Barbette (Liège).