Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1909)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET LA THÉORIE DES ASYMPTOTES

Autor: d' Aboncourt, E. de Richard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11847

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il est aisé de démontrer qu'une telle fonction Φ est identiquement nulle.

L'intégrale la plus générale de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 ,$$

dont elle est une solution, est

$$\varphi(ax_1 + bx_2 + \dots + lx_m + m) ,$$

où φ est une fonction arbitraire, avec $a + b + \dots + l = 0$. Il dérive donc de la définition de Φ (différence de deux fonctions linéaires et homogènes), que

$$\Phi = ax_1 + bx_2 + \dots lx_n$$

et, pour la condition de symétrie,

$$a = b = \dots = l = 0 .$$

On a donc $\Phi = 0$

$$F = \frac{1}{n} \left\{ x_1 + x_2 + \dots + x_n \right\} .$$

C. Q. F. D. Ugo Broggi (Rome).

LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET LA THÉORIE DES ASYMPTOTES

Le Théorème fondamental de la théorie, des équations algébriques s'énonce ainsi :

Toute équation algébrique entière à coefficients réels ou imaginaires admet au moins une racine de la forme : $a + b\sqrt{-1}$, a *et* b *étant des nombres réels, pouvant être nuls.*

Nous allons d'abord démontrer ce Théorème à l'aide de la Théorie des asymptotes, dans le cas où tous les coefficients

de l'équation $F(X) = 0$ sont réels, puis l'étendre au cas où il y a des coefficients imaginaires.

1. *Cas des coefficients tous réels.*

Toute équation algébrique entière de degré impair admet au moins une racine réelle. La démonstration en est immédiate et connue.

Nous n'avons donc à considérer que le cas où le degré m est pair et dans ce qui suit nous supposons m pair.

Posons :

$$X = x + iy . \qquad (i = \sqrt{-1})$$

On a :

$$F(X) = P + Qi$$

$$P = F(x) - \frac{y^2}{1 \,.\, 2} F''(x) + \frac{y^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} F^{IV}(x) - \ldots \pm \frac{y^m}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m} F^m(x) ,$$

le dernier terme n'étant pas autre chose que y^m précédé du signe + ou du signe — suivant que m est ou non multiple de 4.

$$Q = yq ,$$

$$q = F'(x) - \frac{y^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} F'''(x) + \ldots \mp \frac{y^{m-2}}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots (m-1)} F^{(m-1)}(x) .$$

La proposition à démontrer revient donc à celle ci : Les deux courbes $P = 0$ et $Q = 0$ ont au moins un point d'intersection réel.

Notons que la courbe $Q = 0$ se décompose en deux $\begin{cases} y = 0 \\ q = 0. \end{cases}$

Cherchons les branches infinies et les asymptotes des deux courbes $P = 0$ et $Q = 0$ (soient en abrégé P et Q).

D'après les règles ordinaires de la géométrie analytique il suffit pour avoir les directions des branches infinies, ou les coefficients angulaires des asymptotes, t ou $\operatorname{tg} \varphi$, d'égaler à 0 l'ensemble des termes du degré le plus élevé, c'est-à-dire du degré m, en remplaçant y par t ou $\operatorname{tg} \varphi$ et x par 1.

Il est facile de voir que pour la courbe P, cette équation est :

$$(1 + it)^m + (1 - it)^m = 0.$$

et pour la courbe Q, c'est :

$$(1 + it)^m - (1 + it)^m = 0.$$

La première équation, celle relative à P, peut s'écrire :

$$\frac{1}{\cos^m \varphi}\left[(\cos m\varphi + i \sin m\varphi) + (\cos m\varphi - i \sin m\varphi)\right] = 0,$$

ou :

$$\cos m\varphi = 0\,,$$

à condition que $\cos^m \varphi$ ne soit pas nul, d'où

$$m\varphi = (2\,k + 1)\,\frac{\pi}{2},$$

et

$$\varphi = (2\,k + 1)\,\frac{\pi}{2m},$$

On a donc m direction d'asymptotes. toutes distinctes les unes des autres et les angles φ successifs diffèrent de $\frac{\pi}{m}$.

Ce sont :

$$\frac{\pi}{2m}\,,\ \frac{3\pi}{2m}\,,\ \frac{5\pi}{2m}\,,\ \ldots\,,\ \frac{(2m-1)\,\pi}{2m}$$

Par exemple pour le 4me degré on a :

$$\frac{\pi}{8}\,,\quad \frac{3\pi}{8}\,,\quad \frac{5\pi}{8}\,,\quad \frac{7\pi}{8}\,,$$

La condition : $\cos^m \varphi$ non nul est vérifiée par tous ces angles et quelque soit m.

On démontre semblablement que les directions des asymptotes de Q sont aussi au nombre de m, toutes distinctes les unes des autres et que les angles φ correspondants, différant successivement aussi entre eux de $\frac{\pi}{m}$, sont :

$$0\,,\ \frac{2\pi}{2m}\,,\ \frac{4\pi}{2m}\,,\ \ldots\,,\ \frac{2\,(m-1)\,\pi}{2m}\,.$$

Par exemple pour le 4me degré, on a :

$$0\,,\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\pi}{4}$$

La condition $\cos^m\varphi$ non nul est vérifiée par tous ces angles, excepté pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, valeur qui se présente quelque soit m.

Mais il faut remarquer que les asymptotes parallèles à oY se déterminent autrement ; pour les obtenir, on égale à o le coefficient du terme du plus haut degré en y ; or on voit que dans le cas présent, il y a une et une seule asymptote parallèle à oY, pour la courbe $q = 0$, le coefficient de y^{m-2} étant : $\frac{F^{(m-1)}(x)}{1 \,.\, 2 \ldots (m-1)}$ et par suite du 1er degré.

Remarquons de plus que l'asymptote qui a o pour coefficient angulaire n'est pas autre chose que OX, droite qui fait elle-même partie de Q.

A chacune des asymptotes correspondent bien deux branches de courbe réelles, parce que toutes les asymptotes sont distinctes, les équations aux coefficients angulaires ayant toutes leurs racines simples ; nous en avons en effet trouvé m pour chacune et il ne peut pas y en avoir davantage.

De plus ces deux branches sont afférentes l'une à l'une des extrémités de l'asymptote et l'autre à l'autre extrémité, ce qui a lieu de même pour l'asymptote parallèle à oY.

Quant à la situation des asymptotes, nous pouvons supposer que le terme du degré $m - 1$ manque dans l'équation $F(X) = 0$, car on peut toujours le ramener à être nul. Il en résulte que les termes de ce degré : $m - 1$, manquant aussi dans les équations $P = 0$ et $Q = 0$, toutes les asymptotes, tant de P que de Q, sont issues de l'origine des coordonnées, d'après un corollaire de la Théorie des asymptotes, qui s'applique ici, parce que tous les coefficients angulaires sont distincts.

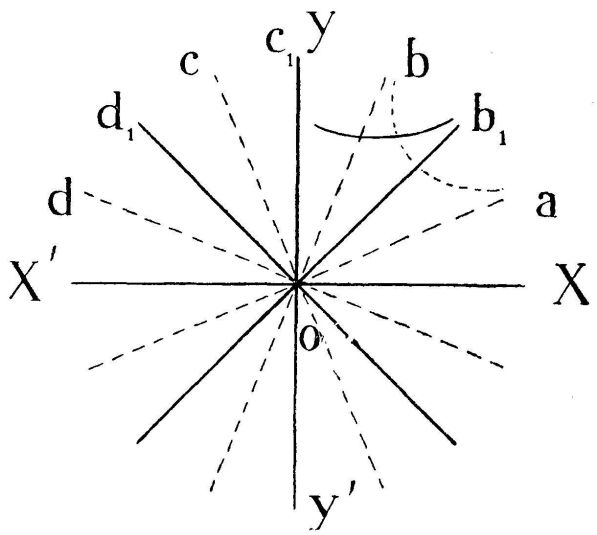

Fig. 1.

Les asymptotes des deux courbes s'emboîtent donc les unes dans les autres, c'est-à-dire sont alternées, comme l'in-

dique la figure ci-contre relative pour plus de simplicité et de clarté au cas où $m = 4$, mais qui peut être établie de même quelque soit m pair.

D'autre part nous nous appuyons sur ce théorème bien connu : « Les courbes algébriques n'ont pas de point d'arrêt ». Il se démontre en effet sans supposer établi le théorème proposé. Dès lors, on voit facilement que les courbes P et Q se coupent nécessairement au moins en un point réel et que de plus si ce point se trouve autre part que sur XX′, ce qui correspondrait à une racine réelle pour $F(X) = 0$, il a son symétrique par rapport à XX′, puisque P et Q sont symétriques chacune par rapport à XX′, d'où deux racines imaginaires conjuguées. Considérons en effet la première asymptote de P, celle qui correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2m}$ $\left(\text{ici} : \frac{\pi}{8}\right)$; ou bien la branche y afférente au-dessus de XX′ coupe XX′ et alors on a une racine réelle de $F(X) = 0$, ou bien elle ne coupe pas XX′, et alors, après plus ou moins de sinuosités et de circonvolutions qui sont en nombre limité d'ailleurs, il est facile de le démontrer, elle doit aboutir à une autre asymptote; elle doit donc aller ou à b, ou à c ou à d. Si elle va à b, la branche de Q qui part de c_1, la coupe nécessairement. On voit de même que si elle va à c ou d, il y a au moins une intersection nécessaire.

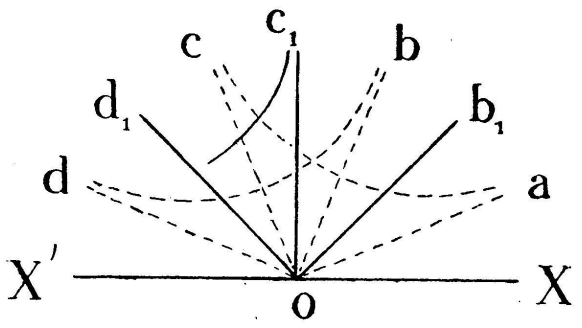

Fig. 2.

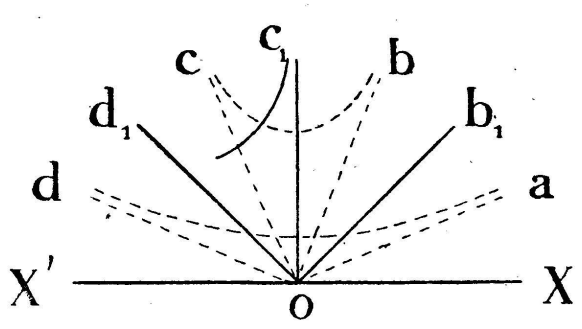

Fig. 3.

Il est impossible de combiner les différentes branches sans qu'il y ait au moins une intersection.

La démonstration peut être considérée comme terminée. On peut toutefois lui ajouter le raisonnement suivant pour une valeur indéterminée, c'est-à-dire quelconque de m pair.

Supposons qu'il n'y ait pas de racines réelles, car s'il y en a le théorème est démontré [1], et ne nous occupons que de la partie supérieure de la figure (l'autre partie étant d'ailleurs symétrique à la première par rapport à XX').

Considérons une branche infinie quelconque de P et ses deux asymptotes; entre ces deux asymptotes il y a un nombre impair total d'autres asymptotes. Ou bien c'est le nombre d'asymptotes de Q comprises qui est impair et alors il y a au moins une branche infinie de Q qui doit nécessairement couper la branche considérée de P.

Ou bien c'est le nombre d'asymptotes de P comprises qui est impair, et alors il y a au moins une branche de P qui doit couper la première ; ces deux branches de P forment entre elles un angle curviligne qui comprend encore un nombre total impair d'extrémités d'autres asymptotes [2]. Nous pouvons continuer ce raisonnement et comme le nombre total d'extrémités d'asymptotes comprises est toujours impair et comme il diminue chaque fois, nous devons nécessairement arriver à un nombre impair d'asymptotes de Q comprises, ce nombre dût-il être l'unité, et finalement il y a une branche de Q qui doit couper une branche de P.

Observation. La démonstration ci-dessus n'a, comme on le voit, rien qui soit ardu; c'est une simple et immédiate application de la Théorie des branches infinies et des asymptotes en géométrie analytique.

Si les démonstrations purement algébriques peuvent paraître plus de circonstance pour le Théorème en question, elles ont presque toutes l'inconvénient, dans un cours de Mathématiques spéciales, d'être plus ou moins difficiles à comprendre et à retenir. Celle-ci est une suite immédiate et naturelle d'une Théorie de géométrie analytique et en constitue un exercice d'application.

1re Remarque. Les équations $P = 0$ et $Q = 0$ et les courbes qu'elles représentent sont loin d'être quelconques l'une par

---

[1] Locution usuelle.

[2] La locution : « extrémité d'asymptote » peut paraître impropre, nous l'employons cependant à défaut d'autre aussi brève, car elle est très intelligible par une interprétation mentale et nous ne faisons en cela qu'imiter l'exemple de MM. Briot et Bouquet dans leur Géométrie analytique.

rapport à l'autre, et évidemment à priori il doit en être ainsi.

On a d'abord les relations connues :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Il ressort de la présente démonstration *les deux Théorèmes suivants :*

I. Les asymptotes de P et de Q sont toutes issues d'un même point situé sur XX'. Nous avons supposé que le terme de degré $m - 1$ manquait dans l'équation $F(X) = 0$, mais cette circonstance n'a servi qu'à mettre en évidence la propriété susdite et à nous permettre d'en profiter. La propriété subsiste lorsque la condition supposée n'est pas remplie, car on n'a fait par cette hypothèse qu'un changement d'axes de coordonnées, l'axe des y étant seul déplacé parallèlement à lui-même.

II. Les asymptotes de P et de Q forment une étoile régulière alternée.

2me *Remarque.* La proposition des couples de racines imaginaires conjuguées se trouve démontrée dans le cas des coefficients tous réels.

2. *Cas des coefficients imaginaires.*

Si $F(X)$ a un ou plusieurs ou tous ses coefficients imaginaires, on peut toujours écrire : $F(X) = f(X) + i\varphi(X)$, $f(X)$ et $\varphi(X)$ ayant tous leurs coefficients réels.

L'équation $f(X)^2 + \varphi(X)^2 = 0$ ayant tous ses coefficients réels, admet au moins, d'après le premier cas étudié, une racine : $\alpha + i\beta$.

Or on a : $f(X)^2 + \varphi(X)^2 = [f(X) + i\varphi(X)][f(X) - i\varphi(X)]$; on démontre aisément que si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de $f(X) + i\varphi(X) = 0$, $\alpha - i\beta$ en est nécessairement racine. Ces deux imaginaires conjuguées peuvent d'ailleurs en être toutes deux racines, mais alors on a séparément et pour chacune de ces valeurs :

$$f(X) = 0, \qquad \varphi(X) = 0.$$

E. DE RICHARD D'ABONCOURT (Lille).