

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Notations rationnelles pour le système vectoriel.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Notations rationnelles pour le système vectoriel.

A propos du système proposé¹ par MM. BURALI-FORTI
et MARCOLONGO.

3. — *Opinion de M. F. KLEIN (Göttingue).*

M. Klein a mentionné en passant la question de la notation vectorielle dans ses leçons, du semestre d'hiver 1907-08, sur les mathématiques élémentaires envisagées à un point de vue supérieur (v. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, cours autographié, t. I, p. 157-158). Il rappelle que, dans une réunion de Cassel, en 1903, les mathématiciens allemands ont désigné une commission chargée d'examiner l'unification de la notation vectorielle. Les membres n'ont cependant pas pu tomber d'accord, mais chacun ayant voulu témoigner de la bonne volonté en faisant des concessions sur son point de vue primitif, il en résulta à peu près 3 notations nouvelles ! Après cette expérience et d'autres essais analogues, il me semble qu'un accord de ce genre sur des dénominations et des notations n'est possible que lorsque des intérêts matériels d'ordre extérieur sont en jeu. Ainsi, ce n'est que sous une pareille pression qu'en Electrotechnique on a adopté un système d'unités, *volt, ampère, ohm* ; l'industrie en ressentait un vif besoin et il était indispensable de pouvoir légiférer dans ce domaine sur une base uniforme. Dans le Calcul vectoriel il n'y a pas, pour le moment, des intérêts aussi grands, et il faudra sans doute se contenter de voir chaque mathématicien employer la notation qui lui semble la plus commode, ou, s'il est enclin aux questions d'ordre dogmatique, celle qui lui semble la seule correcte.

4. — *Lettre de M. Edw. B. WILSON (Boston).*

Mon cher Monsieur Fehr,

Vous me faites l'honneur de me demander mon opinion au sujet des notations vectorielles proposées par MM. Burali-Forti et Marcolongo. Voici les remarques qu'elles me suggèrent :

1° Tout d'abord je ferai remarquer qu'il suffit de jeter un coup d'œil sur un certain nombre de traités de calcul différentiel et intégral pour constater un manque absolu d'uniformité. Ainsi, pour la dérivée les notations

$$\frac{dy}{dx}, Dy, D_{xy}, y'$$

¹ Voir l'*Ens. Math.*, XI^e année, n^o du 15 janvier 1909, p. 41-45, n^o du 15 mars, p. 124-134.

sont d'un usage courant. Pour les dérivées partielles, la diversité est encore plus grande, soit

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{dF}{dx}, \left(\frac{dF}{dx}\right)_{y,z \dots}, D_x F, F_x, F'_x.$$

Il en est de même pour les notations, concernant les intégrales doubles :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} F dx dy, \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} F dx dy, \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} F dx.$$

L'uniformité ne règne donc en aucune mesure dans ce domaine. Le fait qu'un même auteur emploiera suivant les circonstances des notations différentes est une preuve suffisante que l'uniformité n'est pas recherchée et serait même gênante. Pourquoi cette uniformité serait-elle alors désirée avec tant d'ardeur pour l'analyse vectorielle ?

2° L'uniformité des notations dans l'analyse vectorielle est-elle réellement importante ? On peut remarquer que les formules et les opérations d'analyse vectorielle actuellement employées dans les divers traités de mécanique, électricité, magnétisme et théorie électromagnétique sont en fort petit nombre et ne sont par conséquent pas difficiles à comprendre, quelle que soit la notation employée par l'auteur. La compréhension de la part du lecteur est encore facilitée par le fait que dans les applications ordinaires il n'y a pas besoin d'un système très complet d'analyse vectorielle et que de plus, chaque formule est généralement l'énoncé d'un fait physique déterminé qui s'impose mieux à l'esprit que les symboles eux-mêmes. Il semblerait que s'il existe un domaine dans lequel la nécessité de l'uniformité ne se fait pas sentir, c'est celui de l'analyse vectorielle ; aussi est-il difficile de comprendre pourquoi des réformes de ce genre seraient considérées comme très importantes.

3° Une uniformité quelconque pourrait-elle être imposée ? Il est mal aisé de se représenter comment un auteur pourrait être obligé ou amené à se servir des notations recommandées même par un comité international. Le travail du comité ne serait évidemment adopté par chaque auteur que dans la mesure où celui-ci approuverait les notations proposées. La seule obligation que le comité pourrait imposer serait tout au plus une sorte d'obligation sociale.

Ce mouvement en faveur de l'uniformité est en corrélation avec bien des changements politiques et sociaux de nature socialiste qui tendent à porter atteinte à la liberté de l'individu, changements qui sont constamment combattus par les économistes réflé-

chis et qui ne sont généralement exécutés qu'après beaucoup de difficultés. Il suffit de citer les troubles et les inconvénients relatifs à la récente loi française sur le repos hebdomadaire. Le comité international pour l'analyse vectorielle n'aurait aucune autorité politique.

4° Un fait qui mérite d'être mentionné, c'est que l'analyse vectorielle n'est qu'une minime partie de l'algèbre générale et de ses diverses applications. Il est presque impossible de déterminer la limite entre l'analyse vectorielle et les autres branches de l'algèbre. On doit remarquer que tant que l'analyse vectorielle traite de questions de physique, elle se sert presque exclusivement du système de coordonnées rectangulaires et du groupe de mouvements des systèmes rigides; il en est encore de même pour l'application des vecteurs à la discussion de milieux élastiques ou à la propagation de la lumière dans les cristaux. D'un autre côté les vecteurs peuvent souvent être employés avec succès dans des problèmes géométriques où il ne s'agit pas de systèmes rigides ou de la notion de perpendicularité. Il semble impossible et certainement inutile d'établir un ensemble de notations uniformes pour un nombre aussi considérable de sujets et de méthodes que ceux auxquels les vecteurs peuvent s'appliquer. Voilà pour les généralités.

Je m'occuperai maintenant des propositions que les professeurs Burali-Forti et Marcolongo ont présentées comme résultat de leur étude critique et historique si approfondie et détaillée du sujet. On remarquera que leurs propositions s'occupent exclusivement du système minimum d'analyse vectorielle, c'est-à-dire de ce qui concerne l'addition des vecteurs, les produits de grandeurs scalaires et de vecteurs, le gradient d'une fonction scalaire, et la divergence et la rotation d'une fonction vectorielle. Ils ne suggèrent aucune notation pour les fonctions vectorielles linéaires et les notions importantes qu'y s'y rattachent en grand nombre. C'est une omission sérieuse, car la considération de la fonction vectorielle linéaire peut jeter un jour nouveau sur la question de ce qui est nécessaire pour le système minimum.

Les abréviations introduites par l'analyse vectorielle dans la physique théorique ne sont nul part plus importantes que dans l'étude de sujets tels que les théories de l'élasticité et de l'optique des cristaux, étude qui nécessite l'emploi de la fonction vectorielle linéaire, ou de son équivalent; en fait, les abréviations sont relativement beaucoup plus importantes dans ce domaine que dans les branches de physique qui peuvent se passer de l'analyse vectorielle. On peut prédire que si l'analyse vectorielle fait son chemin d'une manière générale et permanente dans l'exposé des théories physiques simples, les autres théories qui pourraient avantageusement faire usage de la fonction vectorielle linéaire

entreront sûrement dans le mouvement et emploieront ces méthodes. Il semble donc très peu sage de ne pas conserver des notations qui deviendront alors nécessaires, et je considère comme très peu satisfaisant tout système de notations qui ne tient pas compte de ce fait.

Je ne veux pas m'apesantir plus que de raison sur la fonction vectorielle linéaire et les relations de l'analyse vectorielle avec l'algèbre, mais il me semble que ce n'est qu'en prenant suffisamment en considération ces choses-là que l'on peut acquérir les vues larges, nécessaires à une discussion rationnelle de la question subordonnée des notations pour le système minimum de l'analyse vectorielle. C'est par exemple la seule manière de voir qu'il y a non seulement 2, mais 3 produits de vecteurs, soit : le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit « dyade », et que ce dernier, quoique moins élémentaire au point de vue du physicien, est cependant théoriquement le plus fondamental de tous. C'est la seule manière de comprendre que la majorité de ce qu'on appelle les « raisons » pour accepter ou refuser une notation spéciale pour le système minimum sont entièrement imaginaires¹.

En ce qui concerne l'usage du point pour le produit scalaire, il a souvent été énoncé (et les auteurs susnommés semblent l'impliquer) que le point est un séparateur et non un signe de multiplication et par conséquent ne doit pas être employé pour le produit scalaire. Ce n'est pas une conséquence ! Pour Gibbs et ses disciples le point est employé essentiellement comme un séparateur ; pour eux, le produit \mathbf{ab} est le produit *dyade* fondamental et, le point, ou tout autre signe de séparation ou de fonctionnalité, est nécessaire pour séparer les vecteurs. Je crois fermement à l'avantage et à la nécessité de la liberté individuelle et je n'ai point d'objection à faire à quiconque dit « Je ne me servirai pas de la notation $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ pour le produit scalaire, car je ne le désire pas », mais si quelqu'un dit « Vous ne devez pas employer la notation parce que le point est un séparateur », cela ne me convainc pas.

J'ai également de la peine à comprendre d'autres énoncés que les auteurs mettent sous la rubrique notations à exclure et principales raisons de l'exclusion. Ils disent par exemple que dans les expressions $\nabla \cdot \mathbf{u}$ et $\nabla \times \mathbf{u}$ pour la divergence et la rotation le symbole ∇ devrait être un vecteur symbolique, mais qu'il n'a pas les propriétés des vecteurs en ce qui concerne la multiplication scalaire et vectorielle. Pour mon compte, j'ai toujours (à tort, semble-t-il) regardé ∇ comme un vecteur symbolique et j'ai tou-

¹ Pour ne pas abuser de l'offre généreuse de vos colonnes, je renverrai le lecteur à un certain nombre de publications où j'ai exprimé mes vues relatives à l'analyse vectorielle et ses notations : *Vector Analysis*, par J. Willard Gibbs, publié Edw. Wilson, New-York, 1901. — *On Products in additive Fields, Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig, 1905. — *On divergence and Curl, American Journal of Science*, 1907. — *On Double Products and Strains in Hyperspace, Transactions of the Connecticut Academy*, 1908.

jours estimé qu'il avait toutes les propriétés vectorielles qui pouvaient être attendues d'un opérateur différentiel. (Il ne faut évidemment pas demander trop. Quand D est employé ainsi qu'il est d'usage comme symbole de différentiation dans la théorie des équations linéaires, il a des propriétés quelque peu différentes de celle d'un nombre). L'une des formules de physique mathématique les plus utiles est

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}$$

et il est difficile de la distinguer d'une manière formelle de la formule fondamentale

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = \mathbf{a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{u} .$$

Mais il est évident que je n'ai pas réussi à comprendre ce que les auteurs voulaient dire.

L'affirmation que $\nabla \mathbf{u}$ et $\nabla \times \mathbf{u}$ sont tachygraphiques pour les coordonnées cartésiennes est fautive. Ces symboles ne contiennent pas la plus légère référence aux coordonnées cartésiennes, excepté lorsque l'on désire les traduire dans ces coordonnées. Le symbole $\nabla \mathbf{u}$ est défini par la formule

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

qui est la formule pour la différentielle totale d'une fonction vectorielle et les quantités $\nabla \cdot \mathbf{u}$ et $\nabla \times \mathbf{u}$ sont des invariants fondamentaux en rapport avec le « dyadic » $\nabla \mathbf{u}$. Je parle ici au point de vue théorique et scientifique auquel se place celui qui s'occupe de l'algèbre générale. Il se peut que, au point de vue pédagogique, pour celui qui désire introduire la divergence et la rotation aussi rapidement et facilement que possible, pour ceux qui s'intéressent seulement au système minimum, il serait plus utile de considérer provisoirement les symboles comme de simples tachygraphes.

Il va sans dire que les remarques ci-dessus ne sont aucunement faites avec une intention de critique hostile des notations suggérées par les professeurs Burali-Forti et Marcolongo, ni pour amoindrir le travail ardu et consciencieux qu'ils ont fourni par leur recherche historique et critique sur la question des notations vectorielles. Je ne romprai pas de lance en faveur des notations de Gibbs ou de celles de qui que ce soit. Mes seules objections sont dirigées contre des « raisons » qui ne me semblent pas convaincantes. Comme observation personnelle j'avouerai volontiers que j'ai une préférence pour la lecture d'un traité de physique théorique dans une notation vectorielle quelconque, plutôt que dans la notation cartésienne. Pour mes propres lectures je préfère le système de Gibbs, non pas parce qu'il m'est plus familier, mais parce que je trouve qu'il fournit une notation satisfaisante pour le système minimum; qu'il est déjà à un degré de développement où il

peut être immédiatement appliqué pour l'élasticité et l'optique, et qu'il a été élaboré par son auteur en tenant compte de la place occupée par l'analyse vectorielle comme branche de la science générale de l'algèbre.

Il est intéressant de noter, et pour les adhérents au système de Gibbs c'est un plaisir, que les auteurs ont adopté des signes pour les 2 produits scalaires et vectoriels. Cela laisse la voie ouverte pour l'extension de leur système jusqu'à inclure, cas échéant, les fonctions vectorielles linéaires avec des notations analogues à celles de Gibbs. Comme un certain nombre de personnes emploient le système de Gibbs dans leurs publications, il est un peu malheureux que les auteurs aient choisi le signe \times pour le produit scalaire ; cela ne peut être d'aucune utilité et ne peut que causer de la confusion, plus qu'il n'en est causé par les différences de notation actuelles. Il vaudrait peut-être mieux introduire un nouveau symbole ainsi que cela a été fait pour le produit vectoriel.

Le travail de MM. Burali-Forti et Marcolongo a certainement aplani la voie au Comité international, pour autant qu'elle peut être aplanie, et l'*Enseignement mathématique* y contribue considérablement en offrant ses colonnes à l'échange de vues. Il faut espérer que les vecteurs et l'analyse vectorielle deviendront de cette manière si familiers dans leur diversité qu'en 1912 ils pourront poursuivre leur développement sans unification et sans réforme avec la même liberté qui est accordée au Calcul différentiel et intégral.

(Traduction de M^{lle} R. MASSON, Genève.)

5. — Lettre de M. PEANO (Turin).

Les modifications suggérées par M. TIMERDING dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1909 (p. 129-134), sont très opportunes. Un bon choix de la forme et des dimensions des symboles mathématiques aide beaucoup la lecture des formules. L'écriture $\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, avec un grand signe \times suggère la lecture $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, alors qu'un petit signe \times suggère la lecture $\mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, conforme à l'usage. En conséquence j'approuve complètement les notions $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ et $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ pour indiquer le produit scalaire et le produit vectoriel. Et j'approuve aussi la lecture par « \mathbf{a} en \mathbf{b} », et « \mathbf{a} contre \mathbf{b} », qui a l'avantage de la brièveté et de la précision. Et je suis heureux de constater que la discussion libre des notations, entreprise par l'*Enseignement mathématique*, tend à produire l'accord entre les auteurs et développe une théorie latente des notations.

Il reste deux notations concurrentes pour indiquer la valeur absolue d'un nombre ou d'un vecteur : « mod a » et « $|a|$ ». La

première a l'avantage de la priorité, car elle se rencontre chez Argand (1814) et Cauchy. La deuxième est de Weierstrass (1851).

Avec la deuxième notation, dans une formule comme $| a + b |$, les signes $| |$ jouent le double rôle d'opération et de parenthèses, comme cela résulte de la comparaison avec la notation de Cauchy : $\text{mod } (a + b)$, où figurent explicitement l'opération « mod » et les parenthèses. Cela peut paraître un avantage de la notation moderne ; mais celle-ci peut produire des ambiguïtés lorsque les signes $| |$ se présentent au milieu de la formule. Ainsi la formule $| a | b + c | d |$ peut être interprétée $(\text{mod } [a \text{ mod } (b + c) d])$ ou $(\text{mod } a) b + c (\text{mod } d)$.

La notation « mod a » est longue ; on peut l'abrégier en ma . Si l'on indique les symboles fixes en caractère romain, et les lettres variables en italique, comme : $\log x$, $\sin (a ; b)$, on ne confondra pas le symbole m (module), avec la lettre m . On pourra même revenir à la notation de Hamilton : Ta au lieu de ma . L'essentiel est d'indiquer l'idée de valeur obtenue par un symbole, et ne pas introduire un symbole $| |$ avec la valeur composée $T ()$ de Hamilton, ou $\text{mod } ()$ de Cauchy.

Pour avoir des notations claires et rigoureuses, c'est-à-dire sans ambiguïté, il faut que chaque symbole représente une seule idée, et chaque idée soit représentée par un seul symbole. Les parenthèses sont introduites en Arithmétique, pour grouper des symboles ; en conséquence on ne peut pas leur laisser une autre signification sans produire des ambiguïtés. On ne peut pas utiliser les parenthèses pour indiquer des fonctions ; on ne peut pas indiquer par (ab) et par $[ab]$ les produits des vecteurs, et en cela l'accord est maintenant général. On ne peut pas indiquer la variable par des parenthèses ; dans la formule $f(x)$, les parenthèses sont inutiles, ou insuffisantes ; il faut revenir à la notation de Lagrange fx . Le vinculum qui se représente encore dans le radical, a la valeur des parenthèses ; son élimination, en écrivant $\sqrt{(a + b)}$ au lieu de $\sqrt{a + b}$, a aussi un avantage typographique bien connu.

La ligne de division a aussi le double rôle d'indiquer l'opération division, et de fonctionner comme vinculum. Il y a une tendance, spécialement dans les livres anglais, à remplacer $\frac{a + b}{c}$ par $(a + b) / c$.

La remarque que dans $| a + b |$, les signes $| |$ remplissent sans ambiguïté au double rôle de signe d'opération et de parenthèses, est analogue à l'autre qu'on peut supprimer les parenthèses au commencement et à la fin des formules.

Ainsi l'écriture

$$a + b) (c + d)]^2 (e + f$$

est aussi claire que

$$[(a + b) (c + d)]^2 (e + f) .$$