Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE
Autor: Brocgi, Ugo
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11846

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LE PRINCIPE DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE

I. — Il est naturellement indifférent, au point de vue de l'Analyse, qu'on reconduise ou non le postulat de la moyenne de Gauss à un système d'autres postulats, ou bien qu'on le fasse découler d'un principe de minimum. Mais il y a pourtant une raison d'un ordre divers qui rend quelquefois préférable qu'on suive le premier chemin, et que l'on s'attarde à rechercher si, parmi les systèmes de postulats définissant la moyenne arithmétique, il n'y en a qui, pour l'évidence et la presque-nécessité pratique des principes dont il résulte, nous semble imposer, pour ainsi dire, le choix d'une telle moyenne de préférence à toute autre, au moins dans certains domaines d'application.

Le système que tout récemment M. G. Schiaparelli proposait dans les *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* et dans les *Astronomische Nachrichten* atteint certainement au plus haut degré un tel but : nous saurions bien difficilement renoncer aux propositions, dont il résulte, exception faite peut-être d'une seule proposition, qui est la suivante :

2n observations de même précision de deux grandeurs inconnues x *et* y *nous ont fourni les valeurs*

$$x_1\, x_2 \ldots x_n \text{ de } x \quad \text{et} \quad x_1 + \alpha\,,\ x_2 + \alpha\,,\ \ldots\,,\ x_n + \alpha \text{ de } y\ ;$$

nous admettons que, si F(x) *est la valeur moyenne des* x *et* F(y) *la valeur moyenne des* y, *on doit avoir*

$$\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) = \alpha\ .$$

Pourtant un géodésien saurait bien difficilement se passer d'elle !

L'étude de M. Schiaparelli se fonde sur cette proposition, et sur les postulats, bien intuitifs, admettant que si les ob-

servations sont également précises elles entrent toutes et indépendamment de l'ordre dans lequel on les a faites dans la détermination de la moyenne et que le passage d'une unité de mesure m à une autre $m' = km$, déterminant le passage d'un système de valeurs observées $x_1 \dots x_n$ à un autre $k \,.\, x_1 \,, \dots \,, k \,.\, x_n$, détermine aussi le passage de la valeur moyenne $F(x)$ à l'autre $k \,.\, F(x)$.

Nous nous proposons de reprendre ici le problème, non pour en modifier les prémisses, mais pour indiquer un mode de déduction purement analytique et peut-être menant plus rapidement au but, que celui proposé par l'illustre astronome italien.

II. — La traduction en langage algébrique des conditions énoncées et l'adjonction d'une condition nouvelle, destinée à rendre possible l'étude analytique de la question, nous fournit le *système de postulats*, définissant la valeur moyenne

$$F(x_1 \dots x_n) = F$$

de n observations d'égale précision :

1. F est une fonction symétrique de ses n variables ;

2. les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x_1}$; $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ ... $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ sont assignables et finies ;

3. on a $F(kx_1 \,, kx_2 \,, \dots kx_n) = k \,.\, F(x_1 \,, x_2 \,, \dots x_n)$[1] ;

4. on a $F(x_1 + \alpha_1 \dots x_n + \alpha) = F(x_1 \,, x_2 \,, \dots x_n) + \alpha$

c'est-à-dire pour 2 :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots \frac{\partial F}{\partial x_n} = 1 \qquad (a)$$

Il suit de même des postulats 3 et 4 :

$$F(0, 0, \dots 0) = 0 \quad \text{et} \quad F(a \,, \dots \,, a) = a \,.$$

Il s'agit de démontrer, que

$$F = F(x_1 \,, x_2 \,, \dots \,, x_n) = \frac{1}{n} \left\{ x_1 + x_2 + \dots + x_n \right\} .$$

[1] Ce que nous exprimons en disant que F est une fonction homogène du degré un. M. Bolza (*Vorlesungen über Variationsreehnung*, 1908, p. 194) appelle «*positive Homogeneität*» l'homogénéité restreinte, dont il est question ici.

III. — On a le *lemme* suivant :

Une fonction du degré d'homogénéité un, et solution de l'équation aux dérivées partielles (a), *est une fonction entière.*

Soit pour abréger

$$f = f(x_1 , x_2 , \dots x_n)$$

et supposons que l'on ait

$$f = \frac{\psi(x_1 , \dots x_n)}{\chi(x_1 , \dots x_n)} = \frac{\psi}{\chi} ,$$

où ψ est du degré de homogénéité p et χ du degré $p - 1$. On aura

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$= \frac{1}{\chi^2}\left(\chi\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right\} - \psi\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\chi}{\partial x_n}\right\}\right) = 1$$

$$\chi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} - f\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\chi}{\partial x_n}\right)$$

$$f = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} - \chi}{\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + \frac{\partial\chi}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial\chi}{\partial x_n}} .$$

Le numérateur est ici une fonction homogène du degré $p - 1$, le dénominateur une fonction du degré $p - 2$. On est donc toujours ramené au cas $p = 1$.

IV. — Soit $\rho = \rho(x_1 \dots x_n)$ une solution linéaire et homogène de (a), et

$$\frac{1}{n}\left\{x_1 + \dots + x_n\right\} - \rho(x_1 , \dots x_n) = \Phi(x_1 , \dots x_n) = \Phi .$$

La fonction $\left\{\frac{1}{n} x_1 + \dots + x_n\right\} + \alpha \cdot \Phi$ (où α est un entier quelconque) satisfait bien évidemment aux postulats 2, 3, 4 : s'il est possible de définir une fonction Φ symétrique par rapport à ses n variables, on pourra admettre aussi que

$$F = \frac{1}{n}\left\{x + \dots + x_n\right\} + \alpha \cdot \Phi .$$

Il est aisé de démontrer qu'une telle fonction Φ est identiquement nulle.

L'intégrale la plus générale de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 ,$$

dont elle est une solution, est

$$\varphi(ax_1 + bx_2 + \dots + lx_m + m) ,$$

où φ est une fonction arbitraire, avec $a + b + \dots + l = 0$. Il dérive donc de la définition de Φ (différence de deux fonctions linéaires et homogènes), que

$$\Phi = ax_1 + bx_2 + \dots lx_n$$

et, pour la condition de symétrie,

$$a = b = \dots = l = 0 .$$

On a donc $\Phi = 0$

$$F = \frac{1}{n} \left\{ x_1 + x_2 + \dots + x_n \right\} .$$

C. Q. F. D. Ugo Broggi (Rome).

LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET LA THÉORIE DES ASYMPTOTES

Le Théorème fondamental de la théorie, des équations algébriques s'énonce ainsi :

Toute équation algébrique entière à coefficients réels ou imaginaires admet au moins une racine de la forme : $a + b\sqrt{-1}$, a *et* b *étant des nombres réels, pouvant être nuls.*

Nous allons d'abord démontrer ce Théorème à l'aide de la Théorie des asymptotes, dans le cas où tous les coefficients