

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FORMULE DE TAYLOR
Autor: Peyrolieri, Margherita
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-11861>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Je me propose, dans cette note, de déterminer une expression du reste dans la formule de Taylor, dont on déduit en même temps le reste de Lagrange et l'interprétation de la formule comme série asymptotique.

Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x , définie dans un intervalle de a à b , et qui a les dérivées d'ordres 1, 2, ... $n - 1$ dans tout l'intervalle considéré. Alors on a

$$(1) \quad \begin{aligned} f(b) - \left[f(a) + (b - a) Df(a) + \dots + \frac{(b - a)^{n-1}}{(n - 1)!} D^{n-1} f(a) \right] \\ = \frac{(b - a)^n}{n!} \frac{D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a)}{u - a} \end{aligned}$$

où u est une valeur (inconnue) appartenant à l'intervalle de a à b .

Il est digne de remarque qu'on ne suppose pas même l'existence de la dérivée d'ordre n .

Dem. En effet, soit k la quantité définie par l'équation

$$f(b) - \left[f(a) + (b - a) Df(a) + \dots + \frac{(b - a)^{n-1}}{(n - 1)!} D^{n-1} f(a) \right] = (b - a)^n k,$$

et considérons la fonction $g(x)$ définie par :

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + (x - a) Df(a) + \dots + \frac{(x - a)^{n-1}}{(n - 1)!} D^{n-1} f(a) \right] - (x - a)^n k.$$

Cette fonction est nulle pour $x = a$ et pour $x = b$, de plus ses dérivées d'ordres 1, 2, ... $n - 2$ s'annulent pour $x = a$.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $g(x)$, nous saurons qu'il existe une valeur u appartenant à l'intervalle de a à b qui annule la dérivée du premier ordre. Mais cette dérivée est nulle aussi pour $x = a$, donc, par le même

théorème, il existe une valeur appartenant à l'intervalle de a à b qui annule la dérivée d'ordre 2 ; etc.

En continuant de cette manière on déduit qu'il existe une valeur u de l'intervalle de a à b telle que la dérivée d'ordre $n - 1$ est nulle :

$$D^{n-1} g(u) = 0 .$$

En substituant l'expression de cette dérivée on a :

$$D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a) - n! (u - a) k = 0$$

d'où résulte enfin :

$$k = \frac{1}{n!} \frac{D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a)}{u - a}$$

où u est une valeur de l'intervalle considéré. Ainsi le théorème est démontré.

Maintenant, si l'on suppose l'existence de la dérivée d'ordre n dans l'intervalle de a à b , par le théorème de la valeur moyenne on a :

$$\frac{D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a)}{u - a} = D^n f(v) ,$$

où v est une valeur entre a et u , et par conséquent entre a et b ; ainsi résulte l'expression du reste donnée par Lagrange :

$$(2) \quad f(b) = f(a) + (b - a) Df(a) + \dots + \frac{(b - a)^{n-1}}{(n - 1)!} D^{n-1} f(a) + \frac{(b - a)^n}{n!} D^n f(v)$$

où v est une valeur entre a et b .

Si dans (1) on conserve a fixe, et si l'on fait tendre b vers a , la quantité intermédiaire u tend aussi vers a , et en supposant l'existence de la dérivée $D^n f(a)$, par la valeur a , par la définition de la dérivée :

$$\lim \frac{D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a)}{u - a} = D^n f(a) .$$

Si l'on pose $b = a + h$, et l'on passe à la limite pour

$h = 0$, après avoir divisé (1) par $(b - a)^n$, on déduit la formule asymptotique :

$$(3) \quad \lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(a)}{h^n} = \frac{D^n f(a)}{n!},$$

qui subsiste en supposant seulement l'existence des quantités qui y figurent, c'est-à-dire de la dérivée d'ordre n de f pour la valeur a de la variable. Il n'est pas nécessaire de supposer son existence ni la continuité dans les environs de a . Presque tous les auteurs déduisent la formule (3) qui est nécessaire dans la théorie des maxima et minima, du plan osculateur, etc., de la formule (2) de Lagrange. En effet

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(a)}{h^n} = \lim_{h=0} \frac{D^n f(a + \mathfrak{S}h)}{n!} = \frac{D^n f(a)}{n!}$$

en supposant l'existence et la continuité de la dérivée d'ordre n , dans les environs de la valeur a , ce qui n'est pas nécessaire.

La formule (3) ou le développement asymptotique de la formule de Taylor est connue (voir par exemple le *Formulaire Math. de G. PEANO*, éd. V, p. 298), mais je crois que la déduction au moyen de la formule (1) est nouvelle.

Margherita PEYROLERI (Turin).