Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR

Autor: Andrade, Jules

Kapitel: CHAPITRE PREMIER Les bases expérimentales de la géométrie ; cas d'égalité de deux triangles ; Droites perpendiculaires ; Droite perpendiculaire à un plan.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10969

CHAPITRE PREMIER

Les bases expérimentales de la géométrie; cas d'égalité de deux triangles; Droites perpendiculaires; Droite perpendiculaire à un plan.

I

La géométrie est l'ensemble des propriétés que nous attribuons à l'espace pour nous rendre compte du *mouvement des corps* ; la notion même du mouvement n'acquiert pour notre esprit une signification précise que si le mouvement est rapporté à un corps *solide, incassable* choisi comme repère.

Les *faits primitifs* de la géométrie sont des faits de *déplacement* d'une espèce toujours comparable à elle même ; ces faits affirmés par les expériences vécues par nos ancêtres et revécues par nous, nous apparaissent comme les faits les plus simples du monde physique.

Nous allons d'abord examiner quels ils sont.

Si nous palpons ou regardons un corps *rigide* comme un ensemble de *points*, nous concevons d'abord qu'un pareil ensemble peut être complété par d'autres points invariablement liés aux premiers, en sorte qu'un ensemble solide n'a pas de *forme* assignée à l'avance.

II

Si nous *clouons* un solide sur un autre solide fixe nous constatons *qu'un seul clou* ne suffit pas pour empêcher tout mouvement du premier solide par rapport au second, ni même pour préciser complètement le déplacement possible du premier solide ; si nous venons à clouer le corps mobile par deux clous différents, sa position n'est pas encore complètement déterminée, mais il ne peut plus prendre qu'une sorte de déplacement dans lequel une infinité d'autres points demeurent communs au solide mobile et au solide fixe, en sorte qu'on peut dire que si un corps est cloué par deux points A et B, (sans figure), touts epasse comme si on clouait une paire de deux autres points C et D choisis quelconques sur une certaine *ligne* L L appartenant au solide fixe et au solide mobile. Cette ligne ne bouge pas pendant ce mouvement défini nommé *rotation*.

Cette ligne L L ou *axe de rotation* est ce que nous appellerons une *ligne droite* ou simplement une *droite*.

Tout point M du solide qui n'appartient pas à la droite se déplace si le solide lui même se déplace.

Nous supposons que la droite est une ligne d'une espèce unique et que toute portion AB, (sans figure), d'une droite *peut être déplacée*, dans un déplacement convenable de solide, de manière à recouvrir une portion convenable de toute autre droite OX, par exemple la portion OM ; *et nous admettons même qu'il existe deux manières de superposer ces deux portions:* une manière dans laquelle, A coïncidant avec O, B coïncide avec M; l'autre manière, dans laquelle A coïncidant avec M, B coïncide avec O.

Enfin, nous admettons qu'une droite ou portion de droite OM n'est *prolongeable* au delà d'un quelconque M de ses points que d'une seule manière.

En d'autres termes, étant donnée une droite CAB il ne peut exister aucune branche nouvelle de la même droite émanée de A, ce qui revient à dire qu'il ne peut y avoir deux suites continues distinctes de points demeurant voisins de A et demeurant immobiles pendant une même rotation.

Enfin nous admettons que deux points distincts sont toujours joignables par une droite ; et de plus, *sauf à revenir plus tard sur ce point*, qu'ils ne sont joignables que par une seule droite.

Nous pourrons dès lors désigner une droite par deux de ses points. Une portion continue et déterminée de droite parcourue dans un sens s'appelle *segment*.

III. — La trame triangulaire et le plan.

Soient (Fig. 1) 3 points A, B, O dont le troisième n'est pas sur la droite qui joint les deux autres ; il résulte des faits précédents qu'aucun des trois points ne sera sur la droite qui joint les deux autres.

Considérons alors un point M mobile sur la droite AB et la droite variable obtenue en joignant le point M au troisième point, considérons même les *segments* limités tels que OM ;

considérons de même un point P mobile sur A O, puis la droite variable obtenue en joignant le point P au point B ;

considérons enfin un point Q mobile sur OB, puis la droite variable obtenue en joignant le point Q au point A.

Nous avons ainsi formé 3 *trames* de droites.

Nous admettrons que ces 3 trames n'en forment qu'une seule.

En d'autres termes nous admettrons qu'un *segment* OM *coupe* un *segment BP en un point I.*

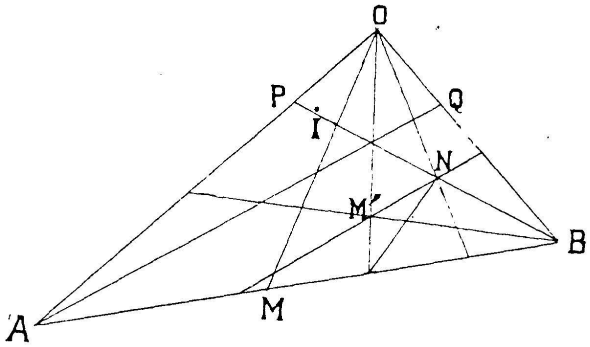

Fig. 1.

L'ensemble de ces trois trames fondues en une seule sera ce que nous appelons une *trame triangulaire*, ou encore un *triangle plan* ou simplement, un *triangle*.

Remarques. 1° si deux points M' et N (Fig. 1) appartiennent à une trame triangulaire le segment M'N qui les joint appartient tout entier à la trame. Cette remarque se justifie immédiatement en appliquant 4 fois la propriété essentielle de la trame triangulaire à 4 trames successives dont chacune *contient* la précédente.

2° La trame triangulaire contient donc tout segment qui y a ses deux extrémités.

En prolongeant *indéfiniment* les droites de la trame on voit, *par cheminement,* qu'il existe une surface telle que toute droite qui y a déjà deux points y sera contenue tout entière, cette surface est *le plan.*

On voit aussi, toujours comme conséquence de la triple trame triangulaire, que toute droite XY (Fig. 2) partage le plan en deux régions (1) et (2) telles que le *segment* joignant

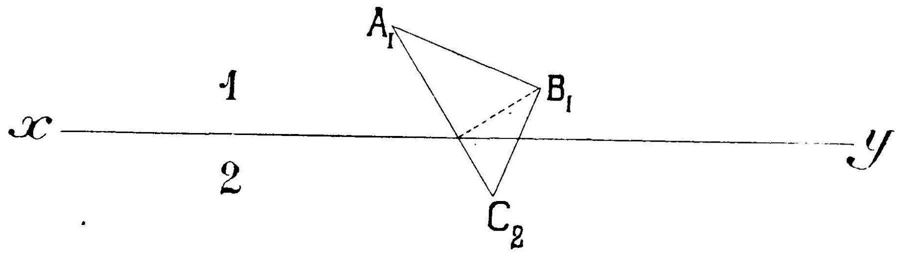

Fig. 2.

deux points quelconque d'une même région ne traverse pas la droite XY, tandis que le *segment* joignant 2 points appartenant à 2 régions différentes traverse XY.
nous admettrons encore le fait suivant :

IV

La position d'une trame qui fait partie d'un solide suffit pour définir complètement la position du solide ; il résulte de là que nous pouvons nous représenter le mouvement d'un solide tournant autour d'un axe par la rotation d'un plan du solide passant par le même axe.

Autre fait :

V

Lorsqu'un plan solide tourne autour d'un axe qui le contient, ce plan dans son mouvement *continu* pourra être amené en coïncidence avec tel plan de l'espace que l'on voudra, passant par l'axe ; et si on considère au lieu des plans complets les demi-plans *bordés* par l'axe de rotation, la rotation s'exécutant toujours *dans le même sens*, il arrivera un moment et un seul où le demi-plan mobile solide coïncidera avec le demi-plan fixe désigné à l'avance par *quelque portion de celui-ci.*

De là découle en particulier le principe du *rabattement :* Tout demi-plan peut être *rabattu* sur son prolongement par rapport à une droite AB de ce plan.

De là résulte aussi la notion de l'angle plan et de l'égalité des angles plans, insistons sur ce point quelque peu délicat.

Donnons à ce sujet une définition de l'égalité de deux figures entre lesquelles est définie une correspondance de leurs éléments constituants.

Deux figures sont dites *égales* si, à tout élément de l'une correspond un élément de l'autre, les ensembles de ces éléments étant deux parties correspondantes de deux solides capables d'être amenés en coïncidence l'un sur l'autre par un déplacement convenable.

Deux figures égales à une même figure sont alors égales entre elles.

Cette définition ne donne lieu à aucune difficulté lorsque les points constituant les figures sont en nombre fini ; lorsque ces éléments au contraire sont en nombre infini il faut avoir bien soin, toutes les fois qu'on veut se servir de la notion des figures égales de spécifier le mode de correspondance entre les éléments de l'une des figures et de leurs homologues dans l'autre.

Considérons par exemple deux faisceaux de droites formant deux portions de plan, supposons que ces ensembles que nous nommons *deux angles* soient supperposables O A (Fig. 3) venant en O′ A′, O B venant en O′ B′ après un déplacement convenable du solide, et les éléments intermédiaires du faisceau coïncidant aussi ; nous pourrons dire que ces angles sont égaux, mais cette définition serait stérile pour la suite si nous n'étions pas assurés qu'un angle plan est complètement défini par les positions de ses côtés extrêmes

En d'autres termes si deux angles plans A O B (sans figure), A O C sont à un moment dans une situation telle que l'un est portion de l'autre, il n'existera aucun déplacement capable d'amener l'un sur l'autre.

Cela résulte immédiatement des faits que nous avons admis concernant la rotation d'un demi-plan autour d'une droite A B.

Cette remarque est très importante et elle joue un rôle analogue à celui joué par le principe qu'une droite est déterminée par deux de ses points. Un angle est défini par ses deux côtés et par le sens de sa génération.

De même aussi qu'un segment est *orienté*, si le sens du parcours du point qui l'engendre est donné, de même un angle est orienté si le sens de l'apparition des droites du

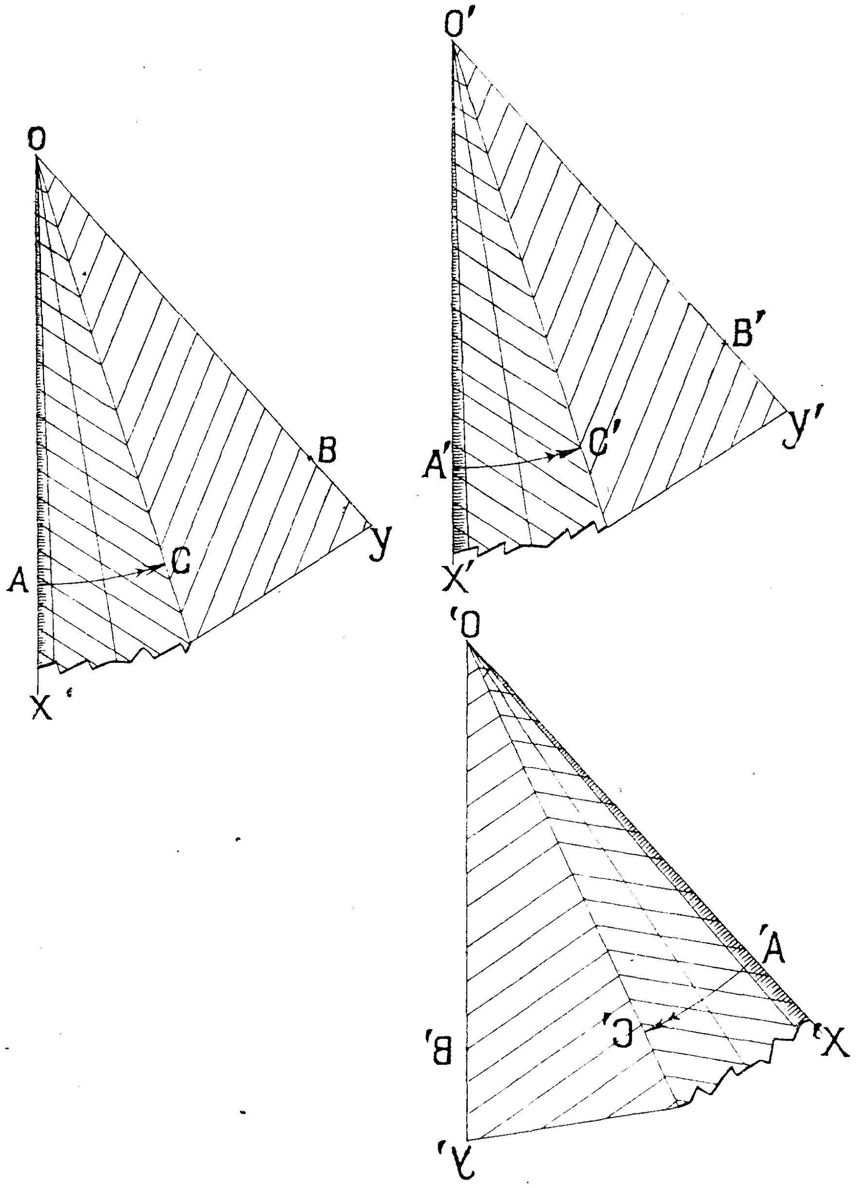

Fig. 3.

faisceau qui le forme est déterminé ; et de même qu'on définit le sens d'un segment par l'ordre dans lequel on appelle ses extrémités, de même on définira le sens d'un angle orienté par l'ordre dans lequel en énonce les noms de ses côtés supposés tracés au préalable avec une restriction, toutefois.

Ceci suppose que l'angle considéré soit choisi le plus petit des deux qui ont mêmes côtés extrêmes.

Rappel et conséquences des deux modes de superposition *des angles égaux*. Si on peint les *deux faces* d'un plan on peut reproduire un angle par glissement : XOY (fig. 3) venu à droite en X'O'Y' de manière que les faces de même couleur soient superposées.

C'est la reproduction par *glissement.*

On peut au contraire renverser l'angle dans son plan et reproduire l'angle obtenu par glissement la face bleue recouvrira alors le côté rouge primitif du plan, XOY venu, en dessous en 'Y'O'X.

Nous allons voir de ce fait des conséquences très importantes.

VI. — **Propriétés du triangle isocèle.**

Si sur les deux côtés d'un angle BAC (fig. 4) on prend deux longueurs égales à partir du sommet A : soit AB = AC on forme un triangle *isocèle.*

Ce triangle est superposable sur son envers, et lorsqu'on superpose l'angle BAC sur son envers C'A'B' le milieu I de

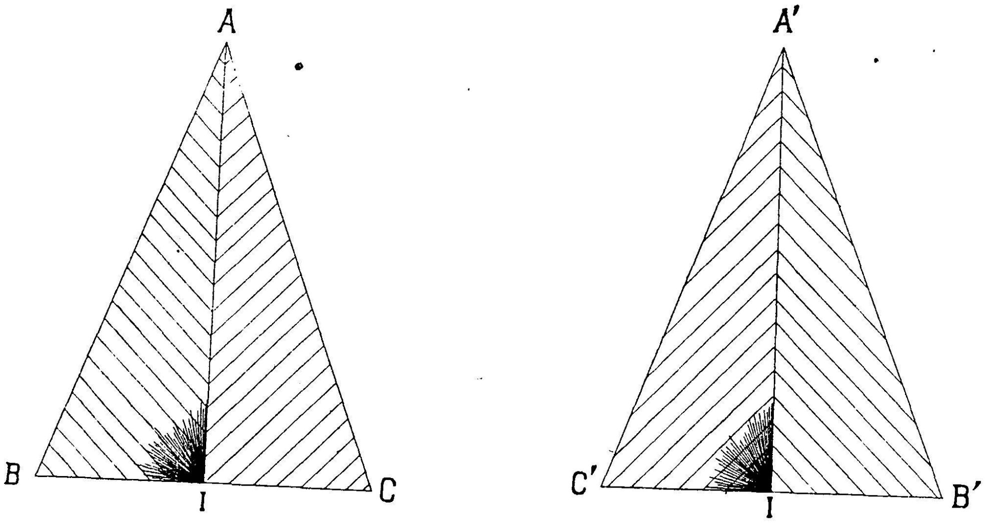

Fig. 4.

la droite BC reste le milieu de la droite C'B' d'où l'on voit que l'envers de l'angle AIC recouvre l'angle AIB, rabattons alors la figure autour de B C (Fig. 5), IA vient en IA' ; les 4 angles AIB, BIA', A'IC, CIA sont égaux soit par glissement soit par retournement effectuons alors *un mouvement de glissement* autour du point I de manière que CIA prenant la place de AIB, IB prolongement de IC devra venir en IA'' prolongement de IA, les angles BIA′ et BIA″ seraient alors égaux, donc d'après une remarque essentielle faite tout à l'heure IA′ coïncide avec IA″ d'où le théorème suivant que nous énonçons après l'avoir démontré :

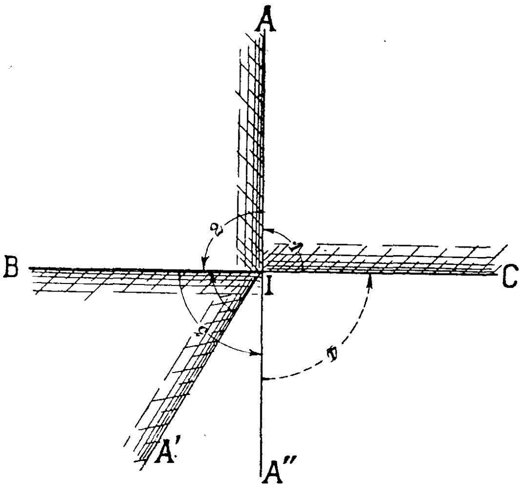

Fig. 5.

Théorème. *Dans un plan, étant donnée une droite AB (sans figure) et un point O de cette droite il existe une seconde droite du plan CD passant par O et formant avec la première 4 angles contigus égaux ; et chacune des droites ainsi obtenues vient coïncider avec son prolongement lorsqu'on rabat leur plan autour de l'autre droite.*

Définition. On dit alors que les droites AB et CD sont *perpendiculaires* entre elles, *cette relation est réciproque.*

Autre forme donnée aux résultats précédents. On peut encore dire :

Dans un triangle isocèle la droite qui joint le sommet principal (point de croisement des côtés égaux) au milieu de la base principale (côté opposé à ce sommet) est perpendiculaire sur cette base et réciproquement :

Si dans un triangle la droite qui joint un sommet au milieu I du côté opposé est perpendiculaire à ce côté, les deux autres côtés du triangle sont égaux.

La démonstration est immédiate par un rabattement autour de AI (Fig. 4), ce rabattement amenant C en B on a AB = AC. L'angle de deux droites perpendiculaires entre elles s'appelle *angle droit.*

VII. — Les trois cas d'égalité des triangles.

Théorème. *Deux triangles sont égaux.*

1° *Lorsqu'ils ont un côté égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ;*

2° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.* pour 1°, essai de superposition directe par l'angle égal $\widehat{A'} = \widehat{A}$ (Fig. 6);

Le cas 2° se démontre immédiatement en commençant l'essai de superposition directe par le côté égal $B'C' = BC$ (Fig. 7).

Dans les deux cas la superposition essayée s'achève d'elle même.

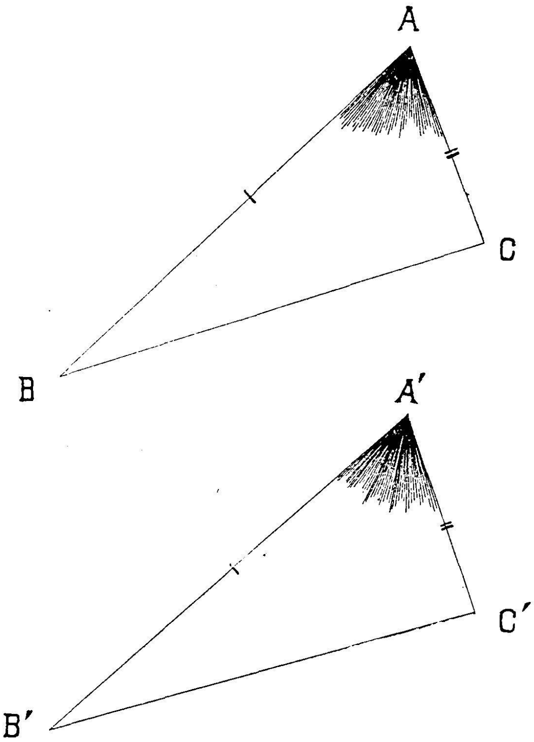

Fig .6.

Pour démontrer le troisième cas d'égalité portons (Fig. 8) le triangle $A'B'C'$ *vers* ABC, C' sur C et B' sur B ce qui est possible puisque $B'C' = BC$; puis rabattons le triangle ainsi transporté du côté de BC où se trouve le triangle ACB, A' vient alors en A''. Admettons pour un instant que les sommets A et A'' ne coïncident pas.

Par hypothèse $AC = A''C$; $AB = A''B$.

Les triangles ACA'' et ABA'' seraient donc isocèles sur une base commune AA''; soit alors I le milieu de cette base. Joi-

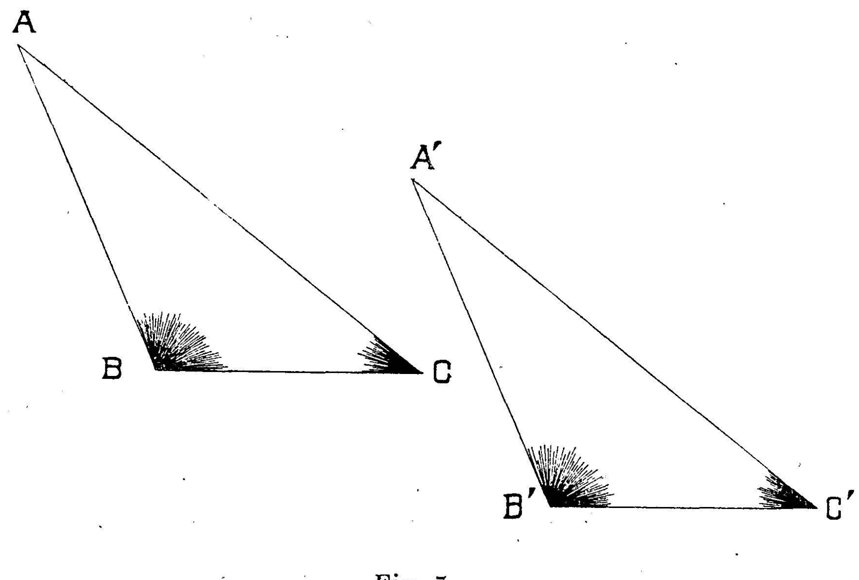

Fig. 7.

gnons AI et IB, ces deux droites seraient toutes deux perpendiculaires à AA″ en I, elles coïncideraient donc entre elles et par suite avec la droite AB le point I serait donc sur AB, mais ceci est impossible puisque A et A″ sont du même côté de AB et que tout point intérieur au segment AA″ reste

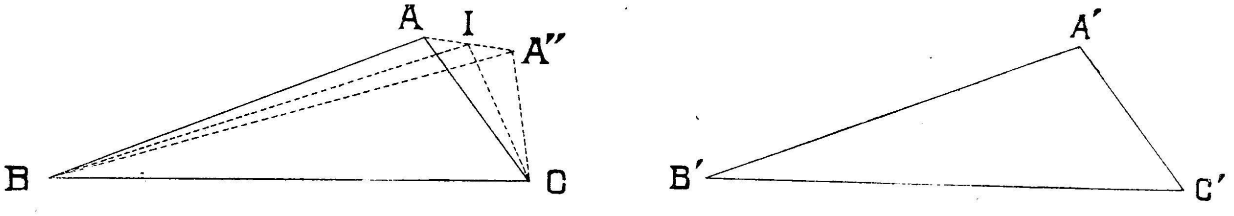

Fig. 8.

du même côté de BC que ses extrémités ; il y a donc une contradiction qui ne peut être évitée que si A et A″ se confondent.

Remarque utile à retenir : dans deux triangles égaux aux côtés égaux, sont opposés des angles égaux et réciproquement.

VIII. — Droite perpendiculaire à un plan.

Théorème. *Si une droite OA (Fig. 9) est perpendiculaire à deux droites distinctes AB, AC d'un plan P elle est perpendiculaire à une troisième droite quelconque du même plan.*

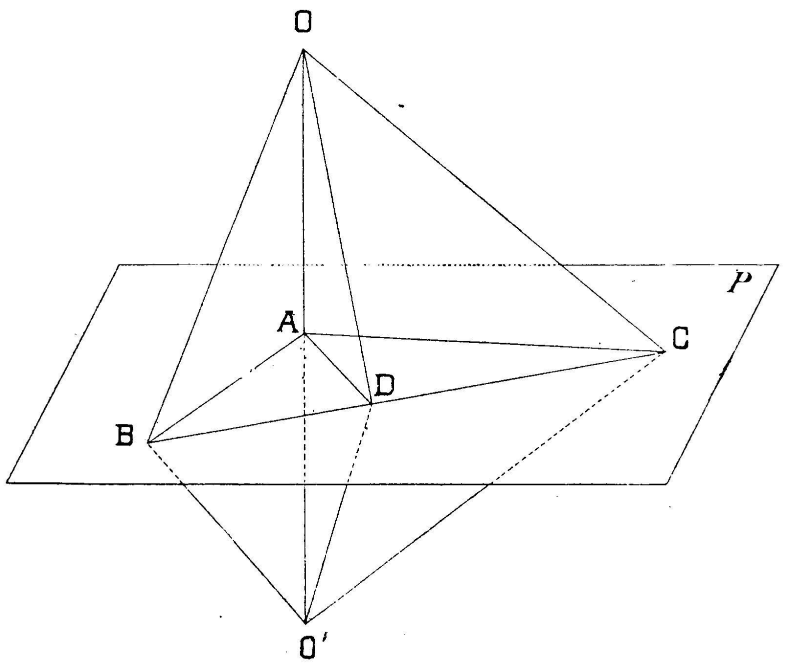

Fig. 9.

En joignant deux points autres que A pris sur deux des droites qui comprennent la troisième dans leur angle on obtient une droite qui coupe les trois droites issues de A aux trois points respectifs B, D, C soit O un autre point que A pris sur la droite AO, soit sur cette droite un autre point O′ tel que O′A = OA.

Les deux triangles OBO′ et OCO′ seront alors tels que les droites joignant le milieu A de leurs bases à leurs sommets respectifs seront perpendiculaires à cette base ces deux triangles seront donc isocèles et OB = O′B ; OC = O′C.

On conclut de là que les deux triangles OBC, O′BC réunis en talus par leur côté commun BC sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun ; nous concluons de là l'égalité des angles OBC et O′BC, puis ensuite l'égalité des triangles OBD, O′BD comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; d'où nous concluons OD = DO′; si enfin, nous considérons le triangle isocèle ODO′ nous voyons que la droite qui joint le sommet principal D au milieu A de la base est perpendiculaire à cette base.

Définition. Quand une droite OA est perpendiculaire à toutes les droites d'un plan P passant par A on dit que la droite est perpendiculaire au plan ; cette droite est nécessairement hors du plan P. Le point A se nomme la projection de O sur le plan P.

CHAPITRE II

Les deux mouvements fondamentaux d'un solide et la nouvelle théorie du dièdre.

En prenant comme éléments des figures les droites et les trames de droites ou plans et en prenant comme données fondamentales : la droite ou axe de rotation, et l'angle plan superposable sur lui-même par retournement nous avons déjà acquis un premier résultat important ; nous avons obtenu les trois cas d'égalité des triangles et la notion des droites perpendiculaires et celle d'une droite perpendiculaire à un plan, rappelons cette dernière notion.

Etant donnée une droite OX (sans figure), faisons passer par cette droite un premier plan dans lequel nous traçons OA perpendiculaire à OX, faisons passer par OX un second plan dans lequel nous menons OB perpendiculaire à OX, nous avons vu qu'une troisième droite quelconque tirée de O dans