

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR
Autor: Andrade, Jules
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-10969>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE

INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR

INTRODUCTION

Dans ses « Lettres à Françoise », Marcel Prévost, avec infiniment de bon sens, observe que les choses essentielles dont on impose la connaissance à nos bacheliers peuvent être dites avec beaucoup moins de grosses pages que les « Manuels » le laissent croire.

A quel point ce charmant conteur s'est ici montré bien informé des choses de l'éducation, j'ai eu l'occasion de le reconnaître lorsque je me suis trouvé moi-même en présence d'un problème nouveau de l'enseignement public.

Chargé de l'enseignement de la Chronométrie à l'Université de Besançon et ayant à soutenir notre école pratique de Réglage par cette éducation mathématique simple, rapide et solide qui convient à l'enseignement technique, j'ai organisé pour nos étudiants horlogers un cours complémentaire des Mathématiques de l'ingénieur qui, par son objet même, devait être à la fois un enseignement d'initiation et un instrument propre à éclairer les délicates théories du réglage.

Marcel Prévost avait raison ; dix leçons de géométrie suffisent pour des esprits déjà mûris par un travail vécu pour comprendre à fond la géométrie exigée par ces jeunes artistes appelés à suivre non seulement les lois des mouvements pendulaires mais encore le sens de leurs principales perturbations.

Les cinq conférences ici reproduites résument la première partie de cet enseignement géométrique d'initiation, celle qui forme la géométrie de l'enfant, celle qui est véritablement le premier livre de la géométrie naturelle.

D'ailleurs, je n'innove plus aujourd'hui ; quelques-unes des méthodes d'exposition que j'ai ici employées ont été préconisées aussi par d'autres auteurs, particulièrement en Italie.

Pour n'en citer qu'une, la nécessité de placer de suite le débutant dans l'espace réel à trois dimensions, en présence de la notion expérimentale du déplacement d'un solide, cette nécessité pédagogique est de première importance ; elle me fut révélée jadis, de la manière la plus naïve, par un enfant, dans l'une des petites classes de l'Ecole alsacienne, à Paris.

— Je porte le triangle $A'B'C'$ vers le triangle ABC , disais-je un jour, avec Legendre.

L'enfant objecta :

— Et, si le triangle $A'B'C'$ cassait en route ?

Cet enfant avait raison, ses sens lui révélaient une chose essentielle et que le bon Legendre n'avait pas assez remarquée.

Il me plait de reporter ici, sur ce souvenir de ma première leçon, ce que j'ai appris de mon petit élève et l'origine de mes premiers travaux sur la géométrie nouvelle, domaine où je me suis d'ailleurs rencontré avec bien d'autres.

Le premier livre de la géométrie réaliste est depuis longtemps mûr pour l'enseignement élémentaire ; le voici.

JULES ANDRADE.

CHAPITRE PREMIER

Les bases expérimentales de la géométrie ; cas d'égalité de deux triangles ; Droites perpendiculaires ; Droite perpendiculaire à un plan.

I

La géométrie est l'ensemble des propriétés que nous attribuons à l'espace pour nous rendre compte du *mouvement des corps* ; la notion même du mouvement n'acquiert pour notre esprit une signification précise que si le mouvement est rapporté à un corps *solide, incassable* choisi comme repère.

Les *faits primitifs* de la géométrie sont des faits de *déplacement* d'une espèce toujours comparable à elle même ; ces faits affirmés par les expériences vécues par nos ancêtres et revécues par nous, nous apparaissent comme les faits les plus simples du monde physique.

Nous allons d'abord examiner quels ils sont.

Si nous palpons ou regardons un corps *rigide* comme un ensemble de *points*, nous concevons d'abord qu'un pareil ensemble peut être complété par d'autres points invariablement liés aux premiers, en sorte qu'un ensemble solide n'a pas de *forme* assignée à l'avance.

II

Si nous *clouons* un solide sur un autre solide fixe nous constatons qu'un seul clou ne suffit pas pour empêcher tout mouvement du premier solide par rapport au second, ni même pour préciser complètement le déplacement possible du premier solide ; si nous venons à clouer le corps mobile

par deux clous différents, sa position n'est pas encore complètement déterminée, mais il ne peut plus prendre qu'une sorte de déplacement dans lequel une infinité d'autres points demeurent communs au solide mobile et au solide fixe, en sorte qu'on peut dire que si un corps est cloué par deux points A et B, (sans figure), touts epasse comme si on clouait une paire de deux autres points C et D choisis quelconques sur une certaine *ligne* LL appartenant au solide fixe et au solide mobile. Cette ligne ne bouge pas pendant ce mouvement défini nommé *rotation*.

Cette ligne LL ou *axe de rotation* est ce que nous appellerons une *ligne droite* ou simplement une *droite*.

Tout point M du solide qui n'appartient pas à la droite se déplace si le solide lui même se déplace.

Nous supposons que la droite est une ligne d'une espèce unique et que toute portion AB, (sans figure), d'une droite *peut être déplacée*, dans un déplacement convenable de solide, de manière à recouvrir une portion convenable de toute autre droite OX, par exemple la portion OM; *et nous admettons même qu'il existe deux manières de superposer ces deux portions*: une manière dans laquelle, A coïncidant avec O, B coïncide avec M; l'autre manière, dans laquelle A coïncidant avec M, B coïncide avec O.

Enfin, nous admettons qu'une droite ou portion de droite OM n'est *prolongeable* au delà d'un quelconque M de ses points que d'une seule manière.

En d'autres termes, étant donnée une droite CAB il ne peut exister aucune branche nouvelle de la même droite émanée de A, ce qui revient à dire qu'il ne peut y avoir deux suites continues distinctes de points demeurant voisins de A et demeurant immobiles pendant une même rotation.

Enfin nous admettons que deux points distincts sont toujours joignables par une droite; et de plus, *sauf à revenir plus tard sur ce point*, qu'ils ne sont joignables que par une seule droite.

Nous pourrons dès lors désigner une droite par deux de ses points. Une portion continue et déterminée de droite parcourue dans un sens s'appelle *segment*.

III. — La trame triangulaire et le plan.

Soient (Fig. 1) 3 points A, B, O dont le troisième n'est pas sur la droite qui joint les deux autres ; il résulte des faits précédents qu'aucun des trois points ne sera sur la droite qui joint les deux autres.

Considérons alors un point M mobile sur la droite AB et la droite variable obtenue en joignant le point M au troisième point, considérons même les *segments* limités tels que OM ;

considérons de même un point P mobile sur AO, puis la droite variable obtenue en joignant le point P au point B ;

considérons enfin un point Q mobile sur OB, puis la droite variable obtenue en joignant le point Q au point A.

Nous avons ainsi formé 3 *trames* de droites.

Nous admettrons que ces 3 trames n'en forment qu'une seule.

En d'autres termes nous admettrons qu'un *segment* OM coupe un *segment* BP en un point I.

L'ensemble de ces trois trames fondues en une seule sera ce que nous appelons une *trame triangulaire*, ou encore un *triangle plan* ou simplement, un *triangle*.

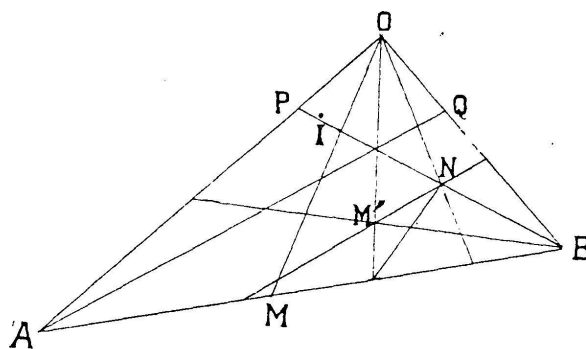


Fig. 1.

Remarques. 1° si deux points M' et N (Fig. 1) appartiennent à une trame triangulaire le segment M'N qui les joint appartient tout entier à la trame. Cette remarque se justifie immédiatement en appliquant 4 fois la propriété essentielle de la trame triangulaire à 4 trames successives dont chacune *contient* la précédente.

2° La trame triangulaire contient donc tout segment qui y a ses deux extrémités.

En prolongeant *indéfiniment* les droites de la trame on voit, *par cheminement*, qu'il existe une surface telle que toute

droite qui y a déjà deux points y sera contenue tout entière, cette surface est *le plan*.

On voit aussi, toujours comme conséquence de la triple trame triangulaire, que toute droite XY (Fig. 2) partage le plan en deux régions (1) et (2) telles que le *segment* joignant

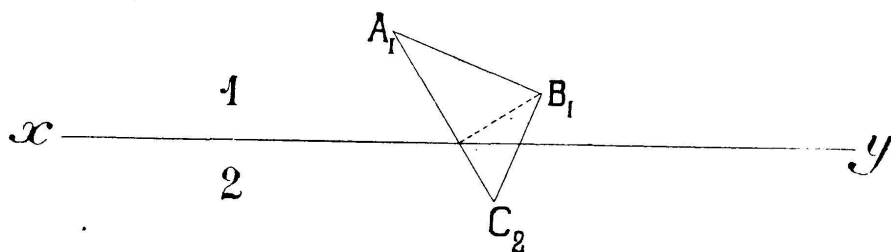


Fig. 2.

deux points quelconque d'une même région ne traverse pas la droite XY , tandis que le *segment* joignant 2 points appartenant à 2 régions différentes traverse XY .

nous admettrons encore le fait suivant :

IV

La position d'une trame qui fait partie d'un solide suffit pour définir complètement la position du solide ; il résulte de là que nous pouvons nous représenter le mouvement d'un solide tournant autour d'un axe par la rotation d'un plan du solide passant par le même axe.

Autre fait :

V

Lorsqu'un plan solide tourne autour d'un axe qui le contient, ce plan dans son mouvement *continu* pourra être amené en coïncidence avec tel plan de l'espace que l'on voudra, passant par l'axe ; et si on considère au lieu des plans complets les demi-plans *bordés* par l'axe de rotation, la rotation s'exécutant toujours *dans le même sens*, il arrivera un moment et un seul où le demi-plan mobile solide coïncidera avec le demi-plan fixe désigné à l'avance par *quelque portion de celui-ci*.

De là découle en particulier le principe du *rabattement* : Tout demi-plan peut être *rabattu* sur son prolongement par rapport à une droite AB de ce plan.

De là résulte aussi la notion de l'angle plan et de l'égalité des angles plans, insistons sur ce point quelque peu délicat.

Donnons à ce sujet une définition de l'égalité de deux figures entre lesquelles est définie une correspondance de leurs éléments constituants.

Deux figures sont dites *égales* si, à tout élément de l'une correspond un élément de l'autre, les ensembles de ces éléments étant deux parties correspondantes de deux solides capables d'être amenés en coïncidence l'un sur l'autre par un déplacement convenable.

Deux figures égales à une même figure sont alors égales entre elles.

Cette définition ne donne lieu à aucune difficulté lorsque les points constituant les figures sont en nombre fini ; lorsque ces éléments au contraire sont en nombre infini il faut avoir bien soin, toutes les fois qu'on veut se servir de la notion des figures égales de spécifier le mode de correspondance entre les éléments de l'une des figures et de leurs homologues dans l'autre.

Considérons par exemple deux faisceaux de droites formant deux portions de plan, supposons que ces ensembles que nous nommons *deux angles* soient superposables OA (Fig. 3) venant en $O'A'$, OB venant en $O'B'$ après un déplacement convenable du solide, et les éléments intermédiaires du faisceau coïncidant aussi ; nous pourrions dire que ces angles sont égaux, mais cette définition serait stérile pour la suite si nous n'étions pas assurés qu'un angle plan est complètement défini par les positions de ses côtés extrêmes

En d'autres termes si deux angles plans AOB (sans figure), AOC sont à un moment dans une situation telle que l'un est portion de l'autre, il n'existera aucun déplacement capable d'amener l'un sur l'autre.

Cela résulte immédiatement des faits que nous avons admis concernant la rotation d'un demi-plan autour d'une droite AB .

Cette remarque est très importante et elle joue un rôle analogue à celui joué par le principe qu'une droite est déterminée par deux de ses points. Un angle est défini par ses deux côtés et par le sens de sa génération.

De même aussi qu'un segment est *orienté*, si le sens du parcours du point qui l'engendre est donné, de même un angle est orienté si le sens de l'apparition des droites du

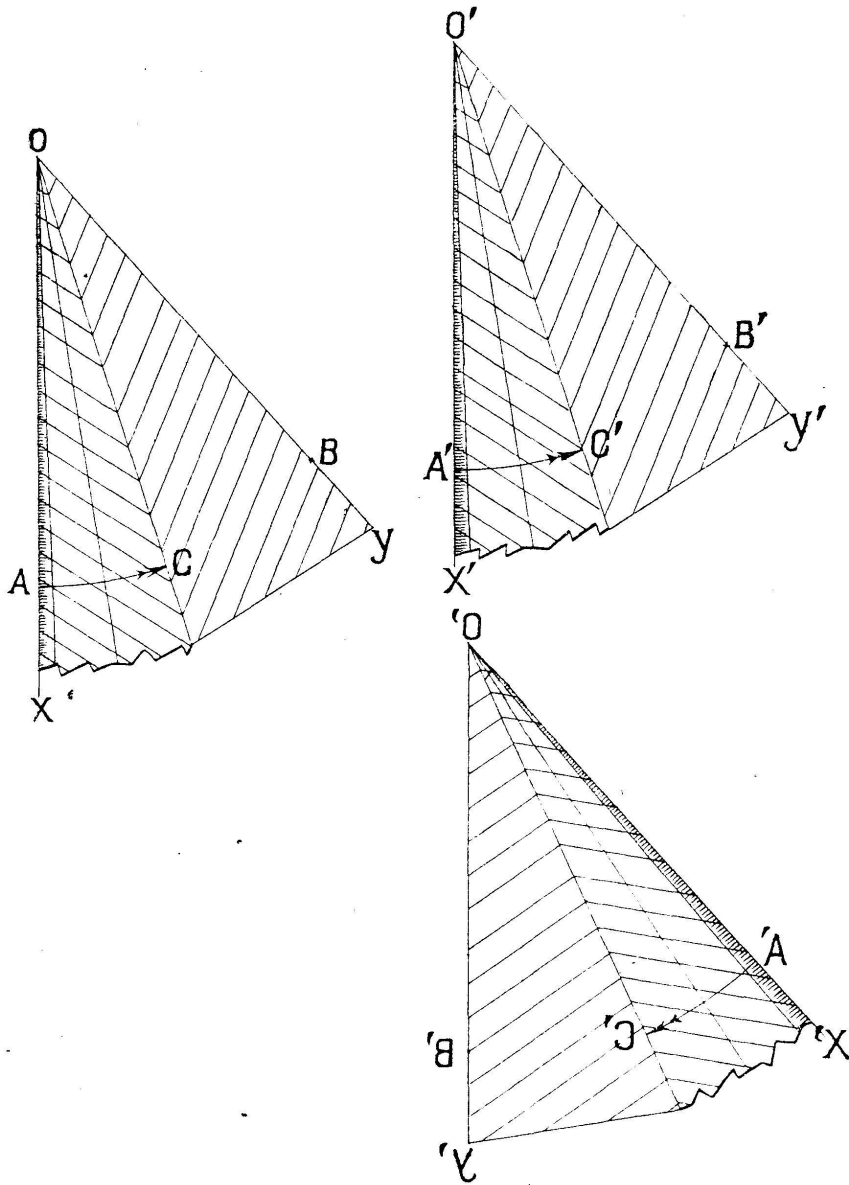


Fig. 3.

faisceau qui le forme est déterminé; et de même qu'on définit le sens d'un segment par l'ordre dans lequel on appelle ses extrémités, de même on définira le sens d'un angle orienté par l'ordre dans lequel on énonce les noms de ses côtés supposés tracés au préalable avec une restriction, toutefois.

Ceci suppose que l'angle considéré soit choisi le plus petit des deux qui ont mêmes côtés extrêmes.

Rappel et conséquences des deux modes de superposition

des angles égaux. Si on peint les deux faces d'un plan on peut reproduire un angle par glissement: XOY (fig. 3) venu à droite en X'O'Y' de manière que les faces de même couleur soient superposées.

C'est la reproduction par *glissement*.

On peut au contraire renverser l'angle dans son plan et reproduire l'angle obtenu par glissement la face bleue recouvrira alors le côté rouge primitif du plan, XOY venu, en dessous en 'Y'O'X.

Nous allons voir de ce fait des conséquences très importantes.

VI. — Propriétés du triangle isocèle.

Si sur les deux côtés d'un angle BAC (fig. 4) on prend deux longueurs égales à partir du sommet A: soit $AB = AC$ on forme un triangle *isocèle*.

Ce triangle est superposable sur son envers, et lorsqu'on superpose l'angle BAC sur son envers C'A'B' le milieu I de

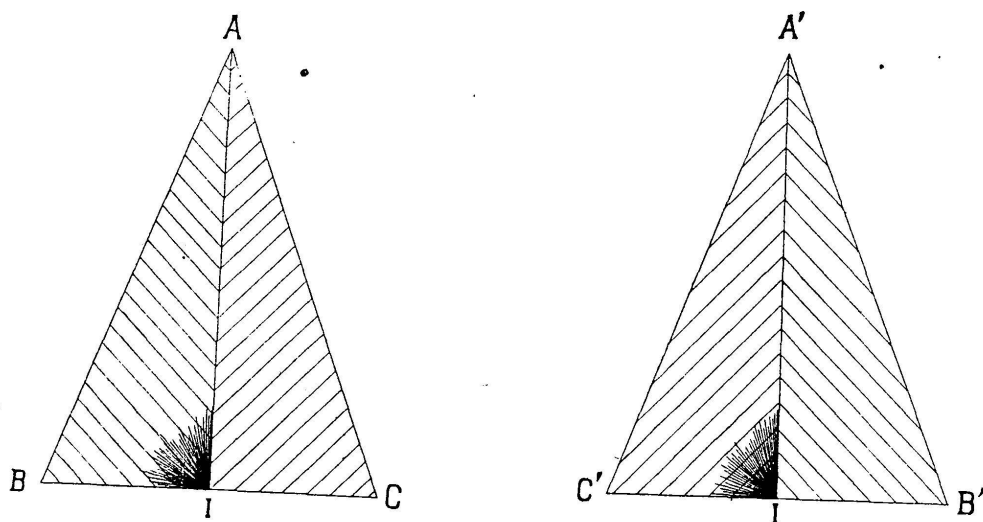


Fig. 4.

la droite BC reste le milieu de la droite C'B' d'où l'on voit que l'envers de l'angle AIC recouvre l'angle AIB, rabattons alors la figure autour de B C (Fig. 5), IA vient en IA'; les 4 angles AIB, BIA', A'IC, CIA sont égaux soit par glissement soit par retournement effectuons alors *un mouvement de glissement* autour du point I de manière que CIA prenant la place de AIB, IB prolongement de IC devra venir en IA''

prolongement de IA , les angles BIA' et BIA'' seraient alors égaux, donc d'après une remarque essentielle faite tout à l'heure IA' coïncide avec IA'' d'où le théorème suivant que nous énonçons après l'avoir démontré :

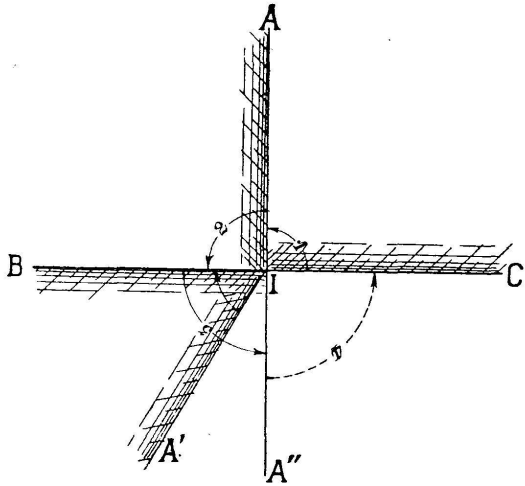


Fig. 5.

THÉORÈME. *Dans un plan, étant donnée une droite AB (sans figure) et un point O de cette droite il existe une seconde droite du plan CD passant par O et formant avec la première 4 angles contigus égaux ; et chacune des droites ainsi obtenues vient coïncider avec son prolongement lorsqu'on rabat leur plan autour de l'autre droite.*

Définition. On dit alors que les droites AB et CD sont *perpendiculaires* entre elles, *cette relation est réciproque.*

Autre forme donnée aux résultats précédents. On peut encore dire :

Dans un triangle isocèle la droite qui joint le sommet principal (point de croisement des côtés égaux) au milieu de la base principale (côté opposé à ce sommet) est perpendiculaire sur cette base et réciproquement :

Si dans un triangle la droite qui joint un sommet au milieu I du côté opposé est perpendiculaire à ce côté, les deux autres côtés du triangle sont égaux.

La démonstration est immédiate par un rabattement autour de AI (Fig. 4), ce rabattement amenant C en B on a $AB = AC$. L'angle de deux droites perpendiculaires entre elles s'appelle *angle droit*.

VII. — Les trois cas d'égalité des triangles.

THÉORÈME. *Deux triangles sont égaux.*

1° *Lorsqu'ils ont un côté égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ;*

2° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*
 pour 1°, essai de superposition directe par l'angle égal $\widehat{A'} = \widehat{A}$ (Fig. 6);

Le cas 2° se démontre immédiatement en commençant l'essai de superposition directe par le côté égal $B'C' = BC$ (Fig. 7).

Dans les deux cas la superposition essayée s'achève d'elle même.

Pour démontrer le troisième cas d'égalité portons (Fig. 8) le triangle $A'B'C'$ vers ABC , C' sur C et B' sur B ce qui est possible puisque $B'C' = BC$; puis rabattons le triangle ainsi transporté du côté de BC où se trouve le triangle ACB , A' vient alors en A'' . Admettons pour un instant que les sommets A et A'' ne coïncident pas.

Par hypothèse $AC = A''C$;
 $AB = A''B$.

Les triangles ACA'' et ABA'' seraient donc isocèles sur une base commune AA'' ; soit alors I le milieu de cette base. Joi-

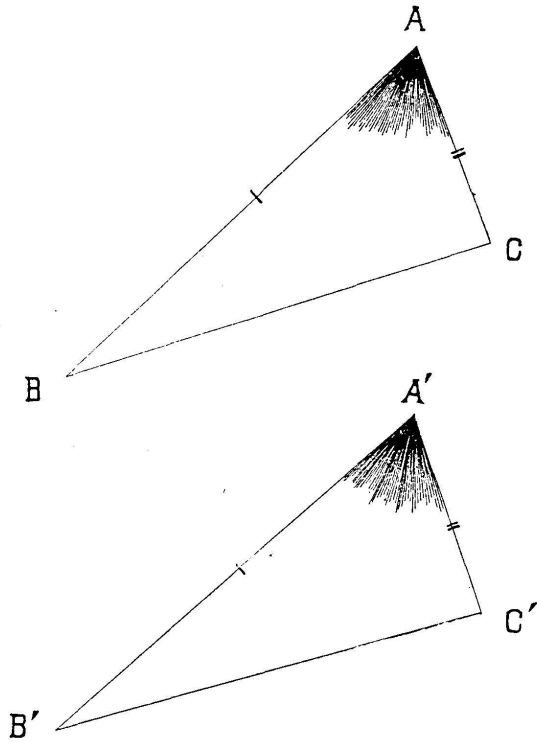


Fig. 6.

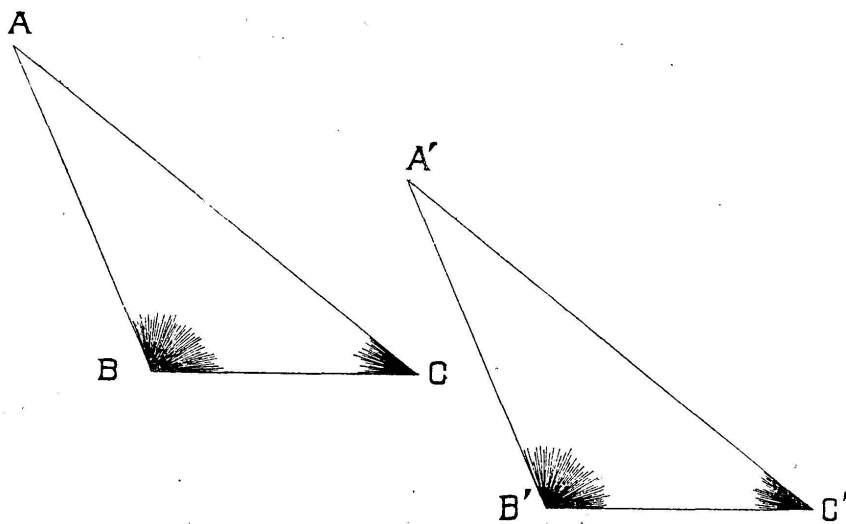


Fig. 7.

gnons AI et IB , ces deux droites seraient toutes deux perpendiculaires à AA'' en I . elles coïncideraient donc entre elles et par suite avec la droite AB le point I serait donc sur AB , mais ceci est impossible puisque A et A'' sont du même côté de AB et que tout point intérieur au segment AA'' reste

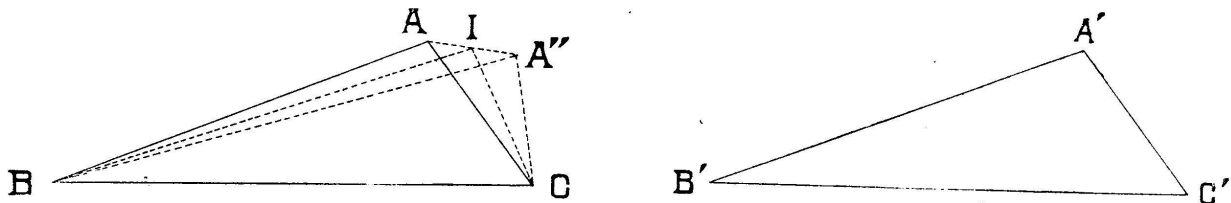


Fig. 8.

du même côté de BC que ses extrémités ; il y a donc une contradiction qui ne peut être évitée que si A et A'' se confondent.

Remarque utile à retenir : dans deux triangles égaux aux côtés égaux, sont opposés des angles égaux et réciproquement.

VIII. — Droite perpendiculaire à un plan.

THÉORÈME. Si une droite OA (Fig. 9) est perpendiculaire à deux droites distinctes AB, AC d'un plan P elle est perpendiculaire à une troisième droite quelconque du même plan.

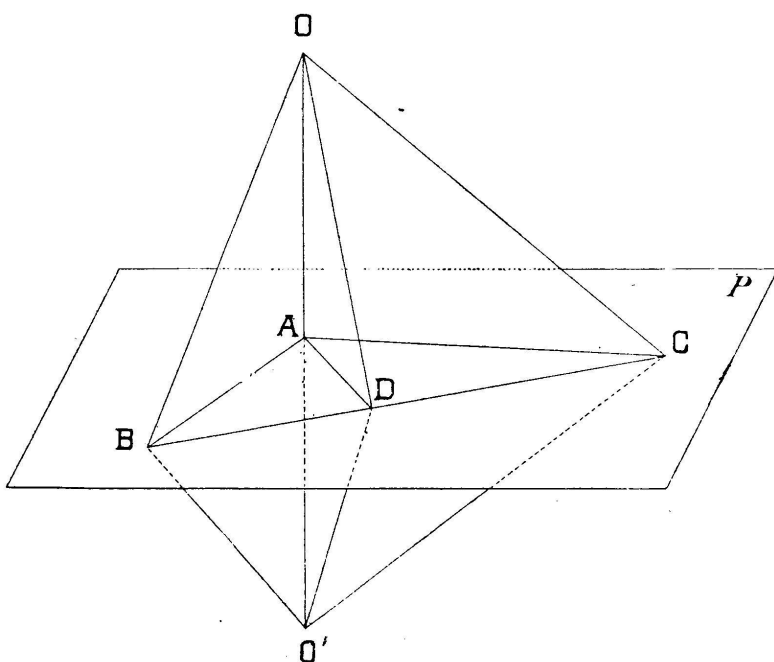


Fig. 9.

En joignant deux points autres que A pris sur deux des droites qui comprennent la troisième dans leur angle on obtient une droite qui coupe les trois droites issues de A aux trois points respectifs B, D, C soit O un autre point que A pris sur la droite AO , soit sur

cette droite un autre point O' tel que $O'A = OA$.

Les deux triangles OBO' et OCO' seront alors tels que les droites joignant le milieu A de leurs bases à leurs sommets respectifs seront perpendiculaires à cette base ces deux triangles seront donc isocèles et $OB = O'B$; $OC = O'C$.

On conclut de là que les deux triangles OBC , $O'BC$ réunis en talus par leur côté commun BC sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; nous concluons de là l'égalité des angles OBC et $O'BC$, puis ensuite l'égalité des triangles OBD , $O'BD$ comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; d'où nous concluons $OD = DO'$; si enfin, nous considérons le triangle isocèle ODO' nous voyons que la droite qui joint le sommet principal D au milieu A de la base est perpendiculaire à cette base.

Définition. Quand une droite OA est perpendiculaire à toutes les droites d'un plan P passant par A on dit que la droite est perpendiculaire au plan; cette droite est nécessairement hors du plan P . Le point A se nomme la projection de O sur le plan P .

CHAPITRE II

Les deux mouvements fondamentaux d'un solide et la nouvelle théorie du dièdre.

En prenant comme éléments des figures les droites et les trames de droites ou plans et en prenant comme données fondamentales: la droite ou axe de rotation, et l'angle plan superposable sur lui-même par retournement nous avons déjà acquis un premier résultat important; nous avons obtenu les trois cas d'égalité des triangles et la notion des droites perpendiculaires et celle d'une droite perpendiculaire à un plan, rappelons cette dernière notion.

Etant donnée une droite OX (sans figure), faisons passer par cette droite un premier plan dans lequel nous traçons OA perpendiculaire à OX , faisons passer par OX un second plan dans lequel nous menons OB perpendiculaire à OX , nous avons vu qu'une troisième droite quelconque tirée de O dans

le plan P formé par les deux droites OA et OB est perpendiculaire à OX. On a dit alors que la droite OX est perpendiculaire au plan P.

Il existe donc, par un point O de OX, un plan P perpendiculaire à OX, et comme tout plan peut être porté sur un autre plan on voit qu'aussi bien, étant donné un plan Q, on peut par un point O lui mener *une* droite OX perpendiculaire.

Mais il est nécessaire d'aller plus loin, et de nous assurer que par un point O d'un plan Q *on ne peut mener qu'une seule* perpendiculaire à ce plan.

Remarquons d'abord que par un point I situé hors d'un plan il ne peut passer deux droites distinctes IH et IK perpendiculaires à un plan Q.

En effet s'il en passait deux (Fig. 10), le triangle IHK ayant les deux sommets H et K communs avec le plan Q aurait la base HK commune avec lui dans le plan de ce triangle on

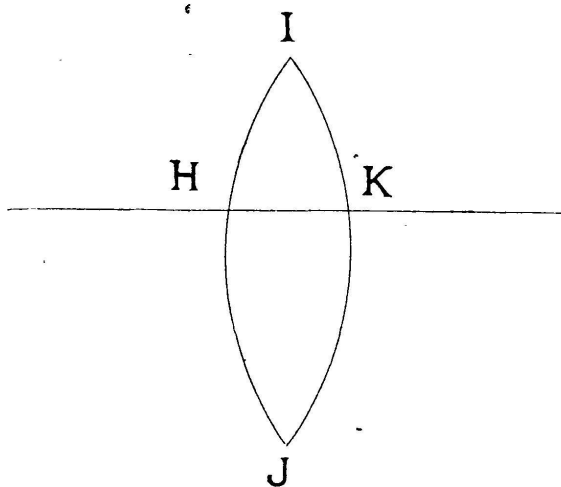


Fig. 10.

aurait donc dans un même plan deux droites distinctes, perpendiculaires à une même droite et passant par un même point I, mais alors, comme on l'a vu (propriété des perpendiculaires) le rabattement du plan sur lui-même autour de HK devrait amener le point I en un même point J situé sur les prolongements de HI et de IK, on aurait donc deux

droites distinctes passant par I et J ce qui, nous l'avons vu, n'est pas possible (propriétés fondamentales de la droite).

Cette remarque va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Il est impossible que par un point O d'un plan Q puissent passer deux droites perpendiculaires à ce plan.*

En effet, soient deux de ces perpendiculaires sur lesquelles (Fig. 11) nous prendrons deux longueurs égales $OM = ON$, une droite quelconque tirée de O dans le plan Q, soit OS, est

perpendiculaire à une troisième droite quelconque dans le plan OMN ; d'où on conclut, en faisant varier OS , que cette troisième droite quelconque du plan MON est aussi perpendiculaire au plan Q .

Considérons en particulier le point I milieu du segment MN ; OI en particulier, sera perpendiculaire au plan Q .

Joignons SM et SN les deux triangles SOM et SON sont égaux comme ayant un angle égal (comme droit) compris entre 2 côtés égaux chacun à chacun; d'où on conclut que $SM=SN$, et, par suite, que IS est perpendiculaire à MN au point I (propriété du triangle isocèle).

Mais alors, en joignant un point S du plan au point I (Fig. 12) et prenant sur cette droite un segment de longueur constante IL , l'ensemble des points L ainsi obtenu devrait puisque

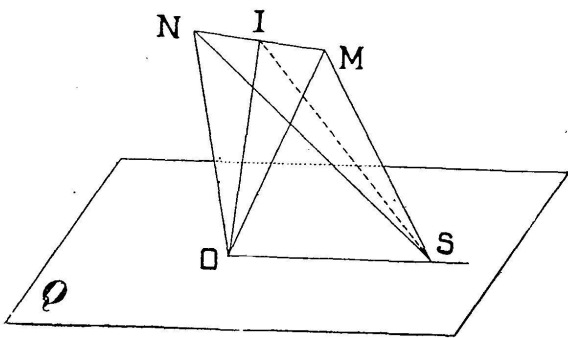


Fig. 11.

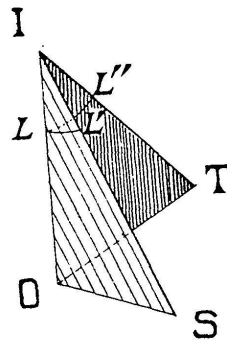


Fig. 12.

e LI est perpendiculaire à NM représenter l'ensemble des positions que peut occuper dans l'espace un point particulier d'un solide qui tourne autour de l'axe MN ; or nous avons admis que l'ensemble des points L est une ligne, et que le déplacement de rotation d'un solide est parfaitement déterminé, tandis qu'ici nous voyons que ce déplacement est *complètement indéterminé* puisqu'il peut s'effectuer à partir de la position L dans tous les plans passant par IO .

Remarque additionnelle. La démonstration est achevée, mais pour rendre ceci encore plus net nous pourrions achever de préciser la complète indétermination du mouvement de L ; les deux mouvements possibles pour le solide peuvent avoir lieu dans deux sens différents mais pour chacun de ces sens soit L' une position voisine *postérieure* à la position actuelle

du point considéré dans le solide en rotation ; il existe sur la trajectoire de L des points de plus en plus voisins de L , et lorsque la distance LL' tend vers zéro la position de LL' tend, on le voit aisément, vers une position limite perpendiculaire à IO , laquelle ne peut appartenir à tous les plans passant par la droite ILO comme cela devrait avoir lieu en conséquence de la supposition faite plus haut qu'il existe 2 droites perpendiculaires à un plan. Cette supposition est donc une fois de plus inadmissible.

Conséquence. Nous savons déjà que la situation d'un corps solide peut être complètement définie par la position de l'une de ses trames, par exemple par celle qui se confond actuellement avec l'angle AOB de l'espace ; d'autre part nous venons de voir qu'il n'existe qu'une droite OZ perpendiculaire à l'angle AOB ; si donc on considère une barre rigide et si on l'oblige à rester perpendiculaire à une trame d'un solide, on peut être assuré que la barre sera du même coup invariablement liée au solide tout entier.

THÉORÈME II. *Les diverses droites perpendiculaires à une même droite OZ menées par un même point O sont dans un seul et même plan.* Soit (Fig. 13) OA une première perpendiculaire à OZ et soient OH et OK deux autres perpendiculaires à OZ , également tirées de O .

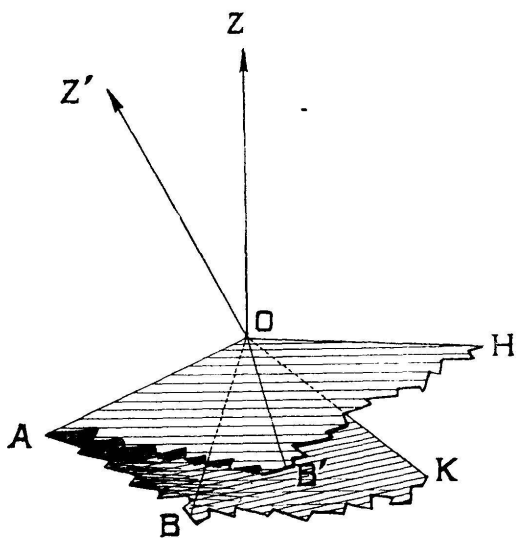


Fig. 13

Admettons provisoirement que les plans AOH et AOK puissent être différents ; alors traçons dans l'un et l'autre plan et à partir de OA comme origine, deux angles égaux AOB et AOB' .

La droite OZ est perpendiculaire à chacune des deux trames égales AOB et AOB' .

Les deux trames AOB et AOB' étant égales, peuvent être regardées comme deux

positions extrêmes d'une même trame d'un solide qui serait entraînée dans le mouvement de ce solide tournant autour de AO .

Regardons OZ comme la première position d'une droite du solide et considérons la positions OZ' occupée par cette dernière lorsque la trame AOB sera venue se coucher sur AOB' ; il est clair que OZ' sera distinct de OZ , sans quoi le solide aurait eu une trame ZOA non déplacée et n'aurait pas subi de déplacement ce qui est faux puisque la trame AOB s'est déplacée.

Or pendant le déplacement, la perpendiculaire à la trame lui reste perpendiculaire ; les droites OZ et OZ' distinctes seraient donc toutes deux perpendiculaires à la même trame AOB' ; mais nous avons déjà démontré que cela est impossible.

Donc enfin les plans HOA et KOA ne sauraient être distincts.

Conséquence : Tout plan pouvant être superposé sur un autre plan ou conservant sa perpendiculaire rigide, on voit de suite que par un point d'un plan on peut toujours tirer une droite perpendiculaire à ce plan.

Définitions. La courbe décrite par un point d'un solide tournant autour d'un axe, et qui, nous venons de le démontrer est contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe, s'appelle *une circonférence de cercle* ; OZ ou l'axe de ce cercle coupe le plan du cercle en un point O , appelé centre du cercle.

Dans son plan la circonférence de cercle est définie comme l'ensemble des points du plan qui sont à une même distance d'un point fixe. Le segment OM est un rayon du cercle.

Corollaire. Si 2 plans distincts ont déjà un point commun ils ont en commun toute une droite commune passant par ce point, soit O le point commun (Fig. 14) ;

Menons par O , 1° la droite OZ perpendiculaire au plan AOB ;

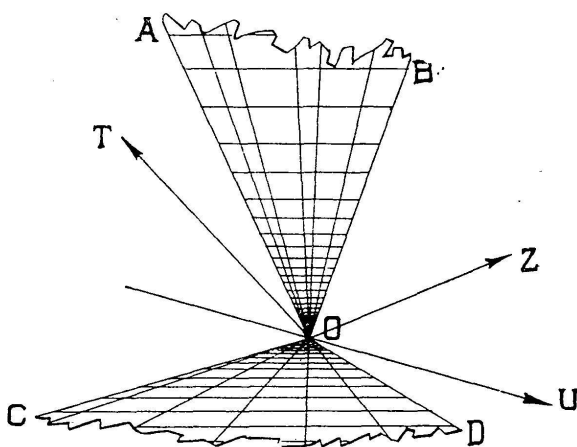


Fig. 14.

2° La droite OT perpendiculaire au plan COD ;

3° Une droite OU perpendiculaire au plan des deux droites OZ et OT ; cette droite OU étant perpendiculaire à OZ appartient au plan AOB , et étant perpendiculaire à OT elle appartient au plan OCD elle est donc commune aux deux plans AOB , COD .

THÉORÈME III. *Pour projeter un point O sur une droite XY d'un plan P il suffit*
 1° de projeter le point O sur le plan P , en A ;
 2° de projeter le point A en I sur XY .

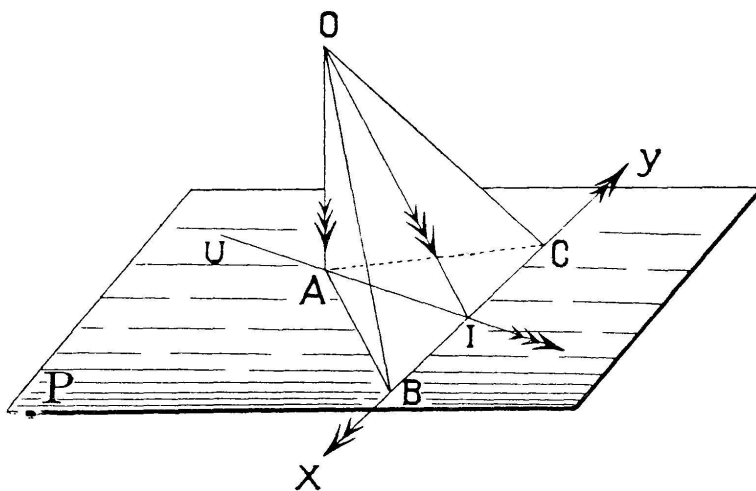


Fig. 15.

Il s'agit de démontrer qu'en joignant I à O la droite obtenue sera perpendiculaire à XY ; à cet effet portons sur XY de part et d'autre de I les longueurs égales IB et IC , joignons les points B et C d'abord à A puis à O . On aura d'abord $AC = AB$, puis par la considération des triangles rectangles égaux OAB et OAC , nous trouvons $OB = OC$; et enfin, dans le triangle isocèle OBC , la droite qui joint le sommet O au milieu I de la base sera perpendiculaire à cette base.

THÉORÈME RÉCIPROQUE III bis. *Si par la projection I d'un point O extérieur à un plan P sur une droite XY du plan on mène, dans ce plan, une droite IU perpendiculaire à XY , la projection A du point O sur IU sera aussi la projection de O sur le plan P (figure 15).*

En effet la projection d'un point sur une droite ou sur un plan étant unique, le tracé précédent pourra être repris en ordre inverse de l'ordre précédent. Une démonstration directe serait d'ailleurs facile.

Corollaire. Tous les plans menés par un même point O perpendiculairement aux différentes droites XY d'un plan passent par une droite fixe OA .

THÉORÈME IV : *Si une droite OI (Fig. 16) coupant un plan P*

en I n'est pas perpendiculaire à ce plan, les projections de ses différents points sur P , c'est-à-dire les pieds des perpendiculaires abaissées de ses différents points sur P , forment une droite du plan P .

Démonstration. En effet soit H la projection de O , menons HI et IX dans P perpendiculaire à HI ; cette droite IX est perpendiculaire à OI ; d'après les théorèmes précédents, un point quelconque O' de OI se projètera dans le plan P sur la perpendiculaire à IX menée par I , c'est-à-dire sur IH en quelque point H' de $I H$.

Autre énoncé: si on observe que IX est perpendiculaire au plan OHI on voit par le même raisonnement qu'un point M quelconque intérieur au triangle OHI se projètera encore sur le plan P en quelque point M' de HI .

Autre conséquence: soit K un point de HI situé sur le prolongement de HI au delà de I ; joignons KO , et dans le plan du triangle OKH traçons IT perpendiculaire à HI : cette droite devra, d'après une remarque déjà faite [III, chap. I], couper *le contour* du triangle OHK , mais elle ne peut couper OH qui est comme elle perpendiculaire à HK ; donc elle coupera OK en un certain point S .

La droite OK n'étant pas perpendiculaire à HK , la perpendiculaire menée de S au plan P d'après le théorème précédent est contenue dans le plan OHK elle se confond donc avec SI .

Ainsi l'ensemble des projetantes des différents points de OI forme un plan qui contient aussi *une perpendiculaire au plan P élevée par I* , nous savons d'ailleurs que c'est la seule qui passe par I .

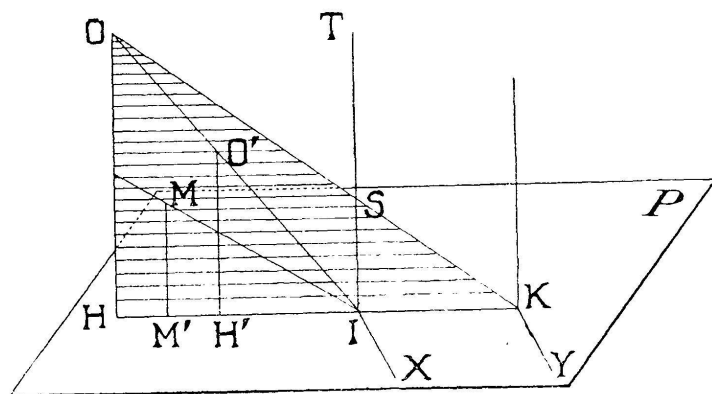


Fig. 16.

Définitions. On appelle *angle dièdre* la portion d'un solide comprise entre deux demi-plans réunis par leur frontière rectiligne commune ; cette droite se nomme *l'arête* du dièdre ;

Les deux demi-plans se nomment les *faces* du dièdre ; si par un point A (Fig. 17) de l'arête on trace des droites Ax, Ay perpendiculaires à l'arête et dans chacune des faces, on obtient *un angle xAy qui est dit : un angle rectiligne du dièdre.*

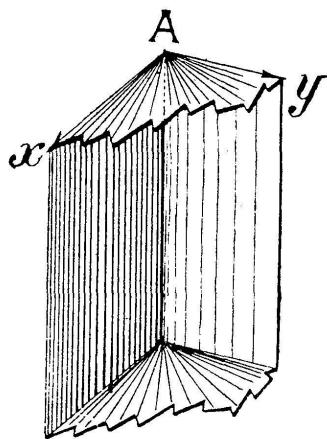


Fig. 17.

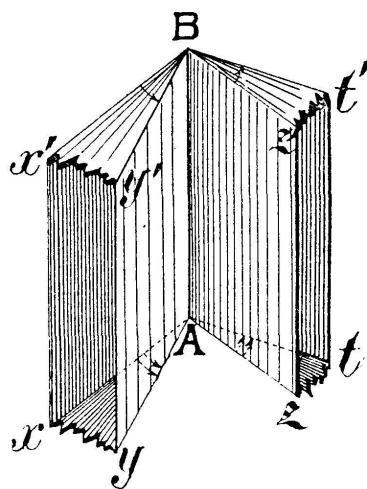


Fig. 18.

THÉORÈME FONDAMENTAL V. *Tous les angles rectilignes d'un dièdre sont égaux, quel que soit le point de l'arête d'où le rectiligne est tracé.*

Etablissons d'abord que si deux dièdres ont même arête, et que si leurs deux rectilignes d'un même sommet A (Fig. 18) sont égaux ; il en sera de même de leurs deux rectilignes d'un autre sommet B en effet si $\widehat{xAy} = \widehat{zAt}$ on peut amener par une rotation autour de AB la trame xAy sur la trame ZAT mais quand ce déplacement a été obtenu les plans BAx , BAy étant venu coïncider respectivement avec les plans BAz , BAI ; les droites Bx' , By' , viendront respectivement sur BZ' et BT' puisqu'elles sont perpendiculaires sur AB.

On conclut de là que : si l'angle \widehat{xAy} est la moitié, le quart, le huitième etc ; de deux droits, l'angle $x'By'$ sera égal en même temps que le précédent égal à la moitié, au quart, au huitième etc ; de 2 angles droits.

Les angles $x'By'$ et xAy seront donc égaux toutes les fois que le second est une fraction de 2 angles droits dont le dénominateur est une puissance de 2.

Or, k et n désignant deux nombres entiers convenables, tout angle xAy est toujours compris entre deux angles égaux respectivement aux fractions suivantes de 2 angles droits savoir $\frac{k}{2^n}$ et $\frac{k+1}{2^n}$; or d'après ce qui précède l'angle $x'By'$ sera alors compris entre les mêmes deux angles, qui diffèrent d'aussi peu qu'on le voudra; il est donc impossible que ces angles xAy et $x'By'$ soient différents.

Remarque. L'égalité des angles xAy et $x'By'$ dans le cas où le premier serait un angle droit résulte d'ailleurs évidemment du théorème sur la projection d'une droite établi tout à l'heure.

Ce théorème fondamental nous conduit à la notion du mouvement de translation d'un solide le long d'une droite donnée qu'il nous reste à définir :

la translation au guidage plan.

THÉORÈME VI. *Si dans le mouvement d'un solide, une droite glisse sur elle-même et si un point du solide qui n'appartient pas à la droite reste dans un plan passant par cette droite, tous les autres points respectifs du solide restent dans des plans passant par la même droite à laquelle on peut donner le nom d'axe central de glissement.*

Ce théorème résulte immédiatement de l'égalité des angles rectilignes d'un même dièdre.

Remarques. Ainsi la droite se présente maintenant à nous soit comme *un axe de rotation*, soit comme *un axe de translation* avec guidage du mouvement du solide par le maintien d'un autre point dans un plan fixe passant par l'axe du glissement, auquel cas tous les points du solide se meuvent dans les plans passant par le même axe de glissement.

On remarquera encore comme conséquence de la théorie du dièdre et de la notion de l'angle de rotation cette proposition.

THÉORÈME VII. *Quand un solide se déplace de manière qu'une trame du solide accomplisse un demi tour autour*

d'une droite de la trame, toutes les trames du solide qui passent par cet axe, accomplissent également un demi tour autour du même axe.

Remarque. Il est facile de s'assurer que ce dernier fait, pourrait aussi bien que l'existence de l'intersection rectiligne de 2 plans ayant un point commun, servir de fait primitif, et remplacer le fait que nous avons pris comme point de départ savoir : la continuité du mouvement de rotation.

Seconde démonstration :

Le théorème établi plus haut sur la projection d'une droite sur un plan peut évidemment s'énoncer ainsi : *Si un angle dièdre possède un angle rectiligne droit tous ses rectilignes seront aussi égaux à un droit*; dès lors la démonstration que nous avons esquissée pour passer du cas d'un dièdre dont tous les rectilignes valent 2 droits au cas d'un dièdre quelconque pourra se reproduire et nous permettra de passer d'un dièdre dont tous les rectilignes valent un angle droit à un dièdre quelconque.

Si l'on veut enfin une démonstration exempte de toute considération arithmétique nous exposerons la suivante :

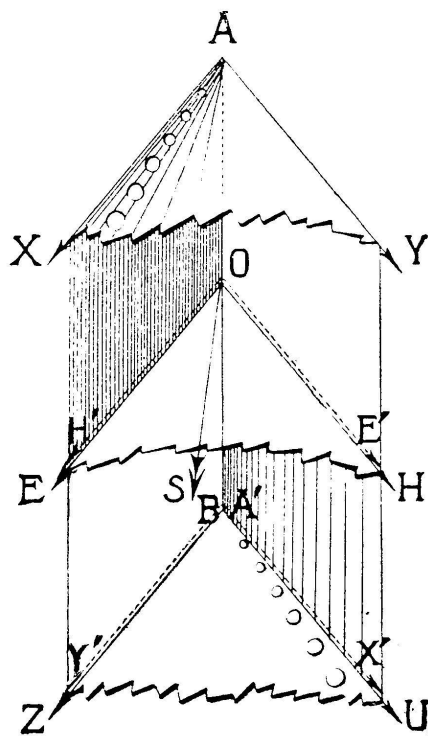


Fig. 19.

Troisième démonstration : (Fig. 19).

Pour démontrer que les deux angles rectilignes XAY et ZBU sont égaux, nous considérons le milieu O de la droite qui joint les sommets A et B de ces deux angles rectilignes, puis nous traçons l'angle rectiligne du dièdre dont le sommet est en O soit l'angle EOH et nous allons constater qu'un rabattement du plan EOH exécuté autour de la droite OS , bissectrice¹ de l'angle EOH , va faire coïncider l'angle XAY sur l'angle UBZ envers de l'angle ZBU .

En effet, par ce rabattement OE vient en OE' recouvrir OH tandis que OH vient en OH' recouvrir OE ; le segment OA perpendiculaire à la trame EOH comme à la trame $E'OH'$ devra donc, ou bien se retrouver sur lui-même, soit recouvrir le segment OB ; le premier est inadmissible, car la fixité finale de la trame AOS fixerait le solide et par conséquent serait inconciliable avec le rabattement précédent; donc OA recouvre OB ; AX vient alors en $A'X'$ recouvrir BU , tandis que AY vient alors en $A'Y'$ recouvrir BZ donc enfin l'angle XAY égal à l'envers de l'angle ZBU est aussi égal à ce dernier.

J. ANDRADE (Besançon).

(A suivre).

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME SUR LA DROITE DE SIMSON

Théorème I. — Soient une conique K de centre O et un triangle inscrit ABC ; a, b, c , les milieux des côtés BC, AC, AB . Joignons Oa, Ob, Oc . Par un point quelconque D de la conique menons des parallèles à Oa, Ob, Oc coupant les côtés du triangle en a_1, b_1, c_1 respectivement: Ces trois points a_1, b_1, c_1 seront en ligne droite (*fig. 1*). Si la conique est un cercle, ce théorème devient le théorème de Simson: *Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle sur les côtés d'un triangle inscrit sont en ligne droite.*

Théorème II. — Par un point quelconque S d'une conique menons des parallèles aux côtés AB, BC, CA du triangle inscrit ABC ; elles donnent sur la conique des points c, a, b . Soit D un point quelconque de la courbe, menons $Dc, Da,$

¹ La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux portions égales.