Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Autor: Cailler, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10967

décide à publier cette courte note. Pour terminer je crois utile de faire remarquer qu'elle semble confirmer l'opinion que *les solutions les plus naturelles dans la base et les plus simples dans l'exécution de questions de Géométrie descriptive (élémentaire) s'obtiennent par l'emploi des théories de la Géométrie de position*.

Gino Loria (Gênes).

SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

La détermination directe de la $m^{\text{ième}}$ dérivée, si importante dans les applications de la série de Taylor, spécialement pour la discussion du reste, se heurte à des difficultés sérieuses qui ne peuvent guère être vaincues que dans quelques cas particuliers. On me permettra de citer ici, comme pouvant quelquefois rendre de bons services dans ce genre de question, une formule aussi simple que peu connue.

Soient une fonction $y = f(x)$ de la variable x, $F(y)$ une *fonction de fonction*, suivant la terminologie en usage dans les éléments du Calcul différentiel. On demande d'exprimer la $m^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à x, $\frac{d^m}{dx^m} F(y)$, par des dérivées relatives à la variable y. La réponse à ce problème est contenue dans la formule

$$\frac{d^m}{dx^m} F(y) = \frac{\partial^m}{\partial y^m} F(y)\, \varphi'(y) \left(\frac{y - f}{\varphi - x}\right)^{m+1}, \qquad (1)$$

dont voici la signification. La fonction inverse de f est désignée par φ, de sorte que l'équation $y = f(x)$ se résout ainsi $x = \varphi(y)$; en outre, il faut au second membre de (1), calculer d'abord les dérivées en y, sans toucher à x, puis remplacer dans le résultat y par $f(x)$, ou x par $\varphi(y)$.

Commençons par donner quelques exemples de la formule dont il s'agit ; nous représentons constamment par β le quotient

$$\beta = \frac{y - f}{\varphi - x} .$$

1° *Exemple.* — y étant liée à x par la relation

$$y - x\psi(y) = a ,$$

on demande de déterminer le terme général de la série de Lagrange par laquelle $F(y)$ est développée suivant les puissances de x ; autrement dit on cherche l'expression $\frac{d^m}{dx^m} F(y)$ pour la valeur particulière $x = 0$.

Ici $\varphi(y) = \frac{y - a}{\psi(y)}$, $\varphi'(y) = \frac{\psi - (y - a)\psi'}{\psi^2}$; $f(x)$ ne saurait être obtenu explicitement, mais comme il suffit d'avoir β quand $x = 0$, $f(x)$ se remplacera par a, et β par $\psi(y)$. On a alors en vertu de (1), pour $x = 0$,

$$\frac{d^m}{dx^m} F(y) = \frac{\partial^m}{\partial y^m} F(y)\psi^{m-1}(y)[\psi - (y - a)\psi'] ,$$

étant bien entendu que la lettre y sera remplacée, après dérivation, par sa valeur a. Le second membre s'écrit évidemment

$$\frac{d^m}{da^m} F(a)\psi^m(a) - m \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} F(a)\psi^{m-1}(a)\psi'(a) ,$$

puis

$$\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} [F'(a)\psi^m(a) + mF(a)\psi^{m-1}(a)\psi'(a) - mF(a)\psi^{m-1}(a)\psi'(a)] ,$$

et enfin

$$\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} F'(a)\psi^m(a) ;$$

c'est le résultat connu.

2° *Exemple.*

$$y = \frac{1}{x} , \quad x = \frac{1}{y} , \quad \beta = -\frac{y}{x} .$$

On a immédiatement

$$\frac{d^m}{dx^m}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(-1)^m}{x^{m+1}}\,\frac{d^m}{dy^m}\,\mathrm{F}(y)\,y^{m-1}=$$

$$\frac{(-1)^m}{x^{m+1}}\sum\binom{m}{p}(m-1)\ldots(m-q)\,y^{m-1-q}\,\mathrm{F}^{(p)}(y)\,,$$

et dans la somme, il faut prendre pour p et q toutes les solutions entières et positives de l'équation $p+q=m$. Le résultat définitif se lira plutôt

$$\frac{d^m}{dx^m}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(-1)^m}{x^{2m}}\sum\binom{m}{p}(m-1)(m-2)\ldots(m-q)\,x^q\,\mathrm{F}^{(p)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

3° *Exemple.*

$$y=\frac{x}{x-1}\,,\qquad x=\frac{y}{y-1}\,,\qquad \beta=\frac{y-1}{1-x}\,.$$

On a de même

$$\frac{d^m}{dx^m}\,\mathrm{F}\left(\frac{x}{x-1}\right)=$$

$$\frac{(-1)^m}{(x-1)^m}\sum\binom{m}{p}(m-1)(m-2)\ldots(m-q)(y-1)^{m-1-q}\,\mathrm{F}^{(p)}(y)=$$

$$\frac{(-1)^m}{(x-1)^{2m}}\sum\binom{m}{p}(m-1)(m-2)\ldots(m-q)\,\frac{\mathrm{F}^{(p)}(y)}{(x-1)^q}\,.$$

4° *Exemple.*

$$y=\sqrt{x}\,,\qquad x=y^2\,,\qquad \beta=\frac{y-\sqrt{x}}{y^2-x}=\frac{1}{y+\sqrt{x}}\,.$$

Ainsi, par un calcul des plus simples,

$$\frac{d^m}{dx^m}\,\frac{\mathrm{F}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=$$

$$2(-1)^m\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p\,\frac{(m-p+1)(m-p+2)\ldots(2m-p)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}\,\frac{\mathrm{F}^{(p)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{2m-p+1}}\,,$$

et l'on aurait de même pour le cas $y=\sqrt[3]{x}$

$$\frac{d^m}{dx^m}\,\frac{\mathrm{F}(\sqrt[3]{x})}{x^{2/3}}=3\,\frac{d^m}{dy^m}\,\frac{\mathrm{F}(y)}{(y^2+ay+a^2)^{m+1}}\qquad\text{avec}\qquad \sqrt[3]{x}=a\,.$$

5° *Exemple.* — Prenons $\varphi(y) = \frac{h_2}{h_1}$, égal au quotient de deux polynomes quadratiques $h_1 = a_1y^2 + b_1y + c_1$, et $h_2 = a_2y^2 + b_2y + c_2$. Dans le faisceau $h_2 - xh_1$ existent, on le sait, deux carrés parfaits correspondant aux racines de l'équation

$$g(x) = (b_2 - b_1x)^2 - 4(a_2 - a_1x)(c_2 - c_1x) = 0 .$$

En même temps les points doubles de l'involution, autrement dit les valeurs de y correspondant à ces racines sont données directement par l'équation $\mathrm{H} = h_1h_2' - h_2h_1' = 0$; on sait que $\sqrt{g(x)} = \frac{\mathrm{H}}{h_1}$, et, de plus, $\varphi'(y) = \frac{\mathrm{H}}{h_1^2}$. Si f_2, f_1 sont les deux solutions tirées pour y de la relation $h_2 - xh_1 = 0$, on a évidemment

$$f_1 - f_2 = \frac{\sqrt{g(x)}}{a_2 - a_1x}$$

$$\beta = h_1 \frac{y - f_1}{h_2 - h_1x} = \frac{h_1}{(a_2 - a_1x)(y - f_2)} .$$

Ainsi

$$\frac{d^m}{dx^m} \mathrm{F}(y) = \frac{1}{(a_2 - a_1x)^{m+1}} \frac{\partial^m}{\partial y^m} \frac{\mathrm{F}(y)\mathrm{H}h_1^{m-1}}{(y - f_2)^{m+1}} ;$$

par suite, si l'on pose pour abréger $\mathrm{F}(y)\mathrm{H}h_1^{m-1} = \psi(y)$, on aura en exécutant les dérivations et remplaçant y par $f_1(x)$,

$$(a_2 - a_1x)^{m+1} \frac{d^m}{dx^m} \mathrm{F}(y) =$$

$$\sum_0^m (-1)^{m-p} \frac{(m-p+1)(m-p+2)\ldots(2m-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} \psi^{(p)}(y) \left(\frac{a_2 - a_1x}{\sqrt{g(x)}}\right)^{2m+1-p} .$$

Si, par exemple, on prend $\psi(y) = 1$, on obtient la formule remarquable

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{h_1^m \sqrt{g(x)}} = (-1)^m \frac{(m+1)(m+2)\ldots 2m}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} (a_2 - a_1x)^m .$$

Démonstration. — Venons maintenant à la démonstration de la formule (1); elle s'obtient d'abord comme une conséquence immédiate de l'intégrale de Cauchy envisagée dans la théorie des fonctions. La démonstration que voici, plus générale et pour le moins aussi simple, ne réclame que les éléments du calcul différentiel.

Soit, comme plus haut, β le rapport $\frac{y-f}{\varphi - x}$ dont la limite est $\alpha = f'(x)$, quand y s'approche de x. On a

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{y - f - \alpha(\varphi - x)}{(\varphi - x)^2} = \frac{\beta - \alpha}{y - f}\beta,$$

identité qui peut s'écrire aussi

$$\beta^m(\beta - \alpha) = (y - f)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta^m}{m}\right);$$

multiplions-en les deux membres par le produit $\varphi' \mathrm{F}$, puis différentions m fois par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}(\mathrm{F}\varphi'\beta^{m+1}) = \alpha \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\mathrm{F}\varphi'\beta^m + (y - f)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\mathrm{F}\varphi'\frac{\beta^m}{m}\right) +$$
$$m\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(\mathrm{F}\varphi'\frac{\beta^m}{m}\right).$$

Si l'on fait maintenant $y = f$, ce qui donne

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial y},$$

le second terme disparaît et il vient

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}(\mathrm{F}\varphi'\beta^{m+1}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathrm{F}\varphi'\beta^m = \frac{d}{dx}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}(\mathrm{F}\varphi'\beta^m).$$

Donc, si l'équation (1) est satisfaite pour $m = 0$, elle demeure exacte pour toute valeur de m ; il en est bien ainsi, puisque $\mathrm{F}\varphi'\beta$ tend vers $\mathrm{F}\varphi'\alpha = \mathrm{F}$.

Comme on le voit, la démonstration repose en définitive sur l'hypothèse que les différentes quantités telles que $\frac{\partial^n}{\partial y^n}(\beta^m)$ ou $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n}{\partial y^n}(\beta^m)$ admettent des limites finies quand y tend vers $f(x)$; voici sur ce point quelques remarques presque évidentes.

Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont toutes les deux finies, avec leurs dérivées d'ordre quelconque, dans un intervalle comprenant les points a et b, et que de plus $\varphi'(a)$ soit différent de zéro, les expressions

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial b^m \partial a^n}\left(\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right)^s \tag{2}$$

où s est un entier positif, atteignent chacune une limite finie quand b tend vers a. Cela résulte simplement du fait que le rapport

$$\left(\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right)^s$$

étant ordonné suivant les puissances de $b-a$, commence par le terme fini $\left(\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}\right)^s$; les coefficients seront d'ailleurs évidemment des fonctions entières de $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$... ; $\varphi''(a)$, $\varphi'''(a)$ ... et contiendront en diviseur la seule quantité $\varphi'(a)$.

Pour calculer les diverses quantités telles que (2), on emploiera le moyen suivant. Soient $B_{m,n}$ l'expression (2) et $A_{m,n}$ sa limite ; puisqu'on doit faire finalement $b=a$, on a $\frac{d}{da}=\frac{\partial}{\partial b}+\frac{\partial}{\partial a}$, donc

$$\frac{dA_{m,n}}{da}=A_{m,n+1}+A_{m+1,n} \quad \text{ou} \quad A_{m,n+1}=\frac{d}{da}A_{m,n}-A_{m+1,n}$$

formule récurrente par laquelle la détermination de $A_{m,n}$ est ramenée à celle de $A_{m,0}$ ou A_m.

Quant à cette dernière, remarquons que, quelle que soit la fonction $f(x)$,

$$\frac{\partial^m}{\partial b^m}\left(f(b)-f(a)\right)^s$$

a pour limite la quantité, où D désigne le symbole de dérivation,

$$\Delta^m f = D^m f^s(a) - \frac{s}{1} f(a) D^m f^{s-1}(a) + \frac{s(s-1)}{1\,.\,2} f^2(a) D^m f^{s-2}(a) - \ldots,$$

et il est clair que, le développement de $(f(b)-f(a))^s$ commençant par le terme $f'^s(b-a)^s$, on aura en particulier $\Delta^m f=0$ quand m est inférieur à s, et $\Delta^s f = s!(f'(a))^s$ pour $m=s$.

Or en écrivant $B_{m,0}$, ou B_m, sous la forme

$$B_m = \frac{\partial^m}{\partial b^m}\left(\varphi(b) - \varphi(a)\right)^s \left(\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\right)^s,$$

et dérivant par la règle des facteurs, on a, après avoir fait $b = a$,

$$\sum_{(p)} \binom{m}{p} A_p \Delta^q \varphi = \Delta^m f, \qquad p + q = m.$$

Cette formule se réduit à l'identité $0 = 0$ pour tout $m < s$; en donnant à m les valeurs successives s, $s+1$, $s+2$, ... et supprimant les termes $\Delta^q \varphi$ nuls parce que $q < s$, on obtient le tableau

$$\left.\begin{aligned} A_0 \Delta^s \varphi &= \Delta^s f \\ (s+1) A_1 \Delta^s \varphi + A_0 \Delta^{s+1} \varphi &= \Delta^{s+1} f \\ \frac{(s+1)(s+2)}{2} A_2 \Delta^s \varphi + \frac{s+2}{1} A_1 \Delta^{s+1} \varphi + A_0 \Delta^{s+2} \varphi &= \Delta^{s+2} f. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

qui donnera A_0, A_1, A_2, ... par des formules où apparaît comme seul diviseur la quantité $\Delta^s \varphi = s!\left(\varphi'(a)\right)^s$, ou l'une de ses puissances. Si, par exemple, $\varphi(x) = x$, et qu'il s'agisse de trouver

$$A_m = \lim \frac{m}{\partial b^m}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)^s,$$

tous les $\Delta^m \varphi$ sont nuls à l'exception de $\Delta^s \varphi = s!$, et par suite

$$\lim \frac{\partial^m}{\partial b^m}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)^s = \frac{s!}{(s+m)!} \Delta^{s+m} f.$$

résultat facile à obtenir directement.

Dans le cas de la formule (1) qu'on mettra également sous la forme

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{F(y)}{\varphi'(y)} = \sum \binom{m}{p} A_p^{m+1} F^{(m-p)}, \qquad (4)$$

on a

$$s = m + 1, \quad A_p^{m+1} = \lim \frac{\partial^p}{\partial y^p} \beta^{m+1}, \quad \Delta^{m+1} f = (m+1)!$$

et pour toute autre valeur de n, $\Delta^n f = 0$; comme on a d'autre part $\Delta^p \varphi = \lim_{y=f} \frac{\partial p}{\partial y^p} (\varphi - x)^{m+1}$, le tableau (3) devient

$$A_0^{m+1} \Delta^{m+1} \varphi = (m+1)!$$

$$(m+2) A_1^{m+1} \Delta^{m+1} \varphi + A_0^{m+1} \Delta^{m+2} \varphi = 0$$

$$\frac{(m+3)(m+2)}{2} A_2^{m+1} \Delta^{m+1} \varphi + \frac{m+3}{1} A_1^{m+1} \Delta^{m+2} \varphi + A_0^{m+1} \Delta^{m+3} \varphi = 0 .$$

. . . .

En différentiant d'ailleurs la formule (4) par rapport à x, on obtient pour déterminer les coefficients A_p^m une nouvelle loi de récurrence

$$m\varphi' A_p^{m+1} = (m-p-1) A_p^m + p \frac{d}{dy} A_{p-1}^m ,$$

ou, si l'on veut,

$$m A_p^{m+1} = (m-p-1) f' A_p^m + p \frac{d}{dx} A_{p-1}^m .$$

J'ajoute que la formule (1) s'étend aisément au cas du changement de plusieurs variables indépendantes. S'il y en a deux

$$x_1 = f_1(y_1, y_2) \quad \text{et} \quad x_2 = f_2(y_1, y_2) ,$$

donnant inversement

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) ,$$

on aura par exemple

$$\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} F(y_1, y_2) = \frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial y_1^{m_1} \partial y_2^{m_2}} F J \beta_1^{m_1+1} \beta_2^{m_2+1} ,$$

avec

$$\beta_1 = \frac{y_1 - f_1}{\varphi_1 - x_1} , \quad \beta_2 = \frac{y_2 - f_2}{\varphi_2 - x_2} \quad \text{et} \quad J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$$

C. CAILLER (Genève).