Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSTRUCTIONS SYNTHÉTIQUES RELATIVES A CERTAINES COURBES DU 3e DEGRÉ ET DE LA 3e CLASSE

Autor: Crelier, L.

Kapitel: II TANGENTES ET SÉCANTES

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10965

déduire les points des divisions sur xy au moyen des tangentes de cette conique. (Voir fig. 7).

Les points doubles du deuxième degré proviennent ici des points de coupe de $\alpha\beta$ avec le cercle. Ceux du troisième degré sont donnés par les tangentes communes en dehors de

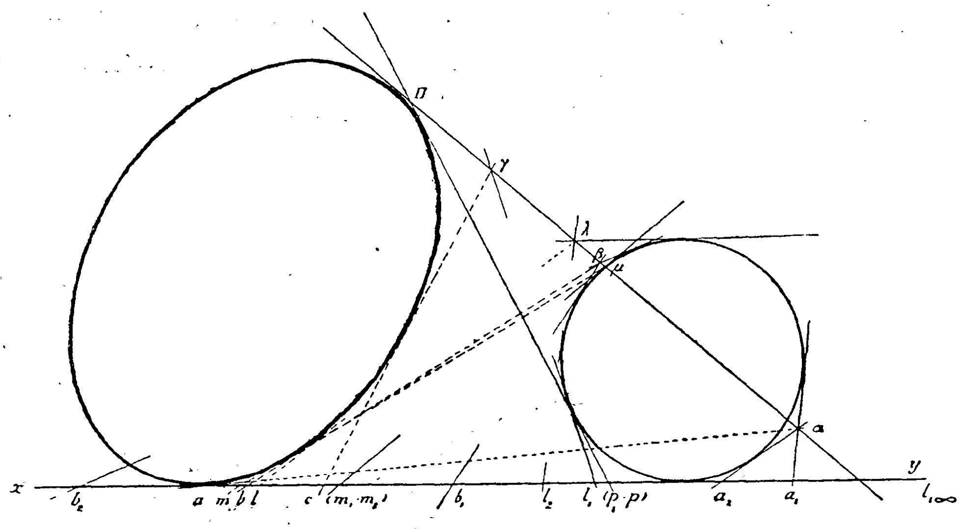

FIG. 7.

xy. *Toutes les coniques auxiliaires admettent quatre tangentes communes*. Ce sont les trois sus-indiquées et la ligne $\alpha\beta$.

Les points triples et les points limites se trouvent d'une manière analogue à celle de la construction précédente.

II

TANGENTES ET SÉCANTES

Nous considérons une courbe du 3e degré donnée par un faisceau multiple S_2 et un faisceau simple S_1 constituant un groupe du $(2 + 1)^e$ degré.

Pour construire la courbe nous nous reportons à ce que nous avons écrit précédemment (*Ens. math.*, 15 nov. 06). Les faisceaux sont donnés par cinq

Nous prenons également une courbe de la 3e classe formée par une division double et une division simple constituant ensemble un groupe de la $(2 + 1)^e$ classe.

Pour construire cette courbe suivant la méthode que nous avons déjà exposée, nous considérerons les cinq paires de paires de rayons homologues quelconques aa_1 ; aa_2 ; bb_1 cc_1 ; dd_1 ; ceux-ci déterminent sur les rayons homologues d et d_1 les ponctuelles :

$$d\ ;\quad \alpha_1\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_1$$

$$d_1\ ;\quad \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$$

les points d_1 et d sont confondus avec le point de coupe des bases d et d_1. Ces ponctuellès engendrent une conique donnée par cinq tangentes. Celles-ci sont :

$$d\ ,\ \alpha_1\alpha\ ;\ \alpha_2\alpha\ ;\ \beta_1\beta\ ;\ \gamma_1\gamma\ .$$

Toute tangente de la conique donne une paire de points homologues sur les bases. D'un autre côté, par tout point de d_1 nous pouvons mener deux tangentes et par chaque point de d une tangente à cette courbe; donc points homologues quelconques :

AA_1 ; AA_2 ; BB_1 ; CC_1 ; DD_1 qui déterminent la courbe et nous joindrons les points de la division simple ABCD avec le point D_1 de l'autre division, puis ceux de cette division $A_1A_2B_1C_1$ et D_1 avec D l'homologue de D_1. Nous formerons ainsi deux faisceaux homologues déterminant un groupe du $(2+1)^e$ degré. Le rayon DD_1 ou D_1D sera un rayon homologue commun des deux faisceaux. Ils engendreront une conique déterminée par cinq points : D ; α_1 ; α_2 ; β_1 ; γ_1. Ces derniers sont les points de coupe des rayons comme D_1A et DA_1 ou D_1A et DA_2, etc.

Toute transversale de cette courbe menée par D_1 donne deux rayons homologues passant par

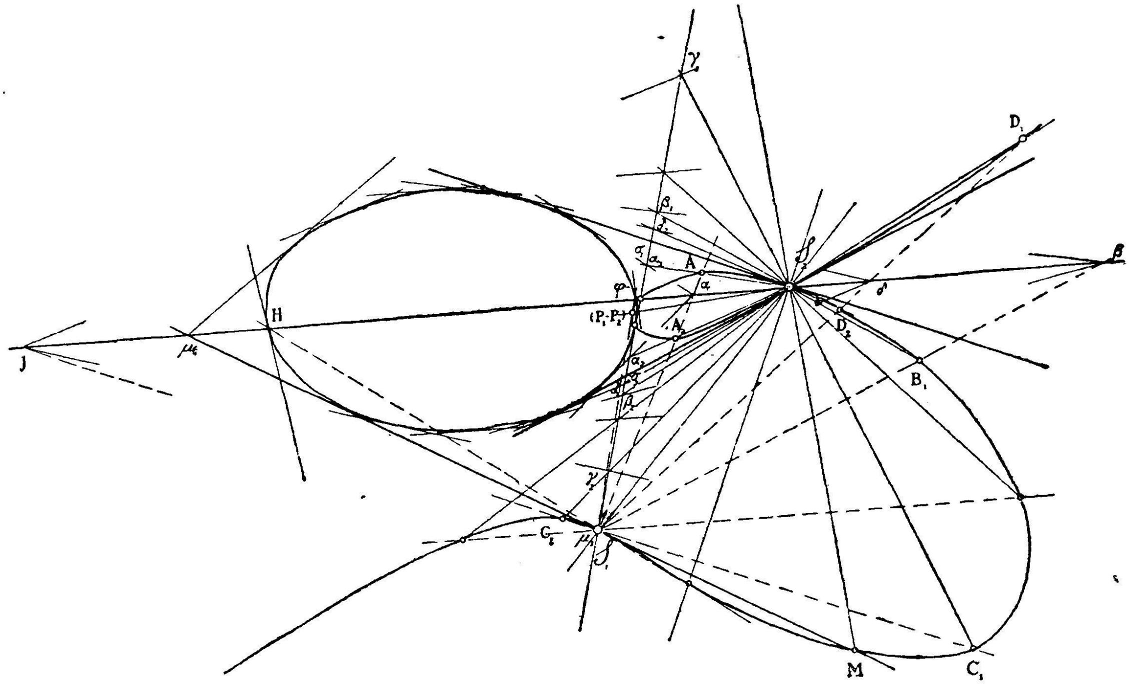

Fig 8.

tout point de d_1 correspond à deux points de d. En joignant ces points respectivement à S_1 et S_2 on obtient trois rayons appartenant au même groupement et formant deux paires de rayons homologues des divisions. Ils donnent deux points de la courbe du 3e degré. (Voir fig. 8).

Tangentes par le point double.

Considérons S_2 sur d_1 et menons les deux tangentes de la conique auxiliaire par ce point; elles donnent $\sigma_1 \sigma_2$ sur d, comme conjuguées de S_2 sur d_1. Ces tangentes sont les rayons conjugués du faisceau double correspondant au rayon $S_1 S_2$ du faisceau simple. Le point de coupe de chaque rayon du faisceau double avec son homologue $S_1 S_2$ est en S_2 ; donc chaque rayon est une tangente

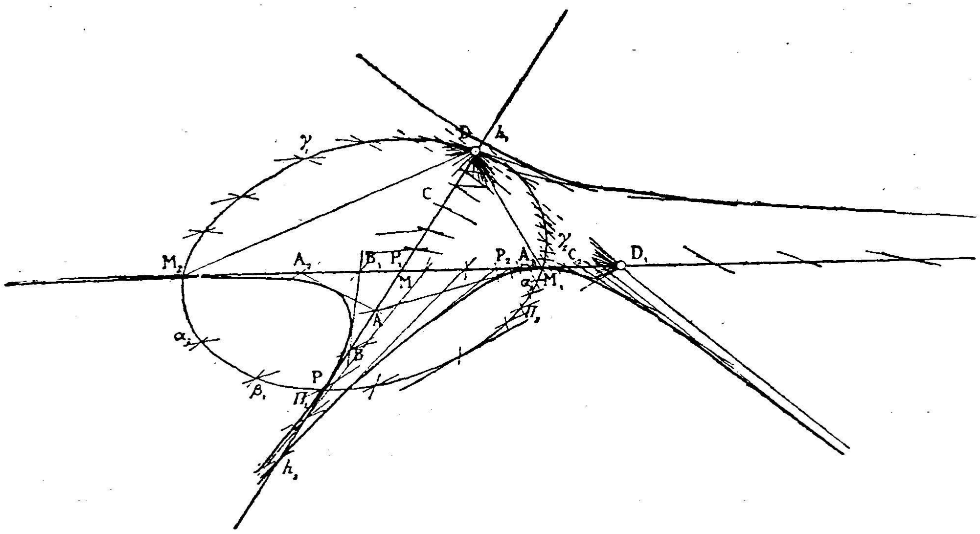

Fig. 9.

D et par les points de coupe. Ces rayons déterminent, les derniers deux points sur la base double et le premier un point sur la base simple. Ces trois points forment deux paires de points homologues et donnent ainsi deux tangentes de la courbe de 3e classe (Voir fig. 9).

Points de tangence sur la tangente double.

Pour obtenir les points de tangence de la tangente double considérons-là, comme une transversale de la conique auxiliaire; issue de D_1 elle donne M sur la tangente base de la division simple; les rayons homologues par D sont DM_1 et DM_2 menée par les points de coupe et donnant ces points de coupe comme conjugués de M. Nous aurons les tangentes MM_1 et MM_2 infiniment voisines de la base double, couà la courbe en S_2. On en conclut :

Les tangentes de la conique auxiliaire menées par le sommet du faisceau double sont donc les tangentes de la courbe du 3e degré menée par le point double (fig. 8).

pant celles-ci en M_1 et M_2 donc ces points sont les points de tangence de la base double. On en conclut :

Les points de tangence de la tangente double d'une courbe de 3e classe sont les points de coupe de cette tangente avec la conique auxiliaire (voir fig. 9).

Tangentes par le sommet du faisceau simple.

La tangente à la conique auxiliaire menée par S_1 en dehors de d, soit $S_1 \mu$ donne μ sur d_1. Par μ on mène encore une tangente $\mu\mu_2$. Le point correspondant de $S_1\mu$ sur d est μ_1 confondu avec S_1.

Les rayons S_2S_1 et $S_2\mu_2$ sont donc comme homologues $S_1\mu$.

Ils donnent les points S_1 et M de la courbe. Dans ces conditions S_1M a deux points confondus avec la courbe S_1 et un point de coupe en M.

D'autre part les points de coupe J et H de d_1 avec la conique ne donnent plus qu'une tangente par chacun de ces points. Ces tangentes donnent les points doubles de la division sur d; en menant ainsi les rayons doubles du faisceau S_2 on voit de suite que leurs points de coupe avec S_1J et S_1H donnent deux points confondus de la courbe du 3e degré sur ces droites. D'où il en résulte que S_1J et S_1H sont encore deux tangentes de la courbe du 3e degré passant par S_1 mais dont les points de

Point de tangence et points de coupe de la base de la division simple.

Le point de coupe P de la base de la division simple avec la conique auxiliaire donne la transversale $\pi_1\pi_2D_1$. Il en résulte les points P_1 et P_2 sur la base double comme conjugués de P. Le point P_1 est l'intersection des deux bases et le point π_1 est confondu avec P. La tangente P_1P infiniment voisine de la base simple, coupe celle-ci en P donc ce point P est le point de tangence de la base de la division simple avec la courbe du 3e degré. La tangente PP_2 est l'autre tangente de cette courbe que l'on peut mener par P.

Par le point D_1 on peut mener également deux tangentes à la conique auxiliaire. Celles-ci déterminent avec D les points doubles de la division multiple. En joignant ces points doubles avec le point de coupe de la tangente respective de la conique issue de D_1 on trouve une nouvelle tangente de la courbe de 3e classe représentant deux tangen-

tangence sont en dehors de S_1.

De ce qui précède, il en résulte donc :

La tangente de la conique auxiliaire menée par S_1 est en même temps tangente de la courbe du 3^e degré. Son dernier point de coupe avec cette courbe est différent de S_1.

Les rayons du faisceau simple conjugués respectivement aux rayons doubles du faisceau multiple S_2 sont encore deux tangentes de la courbe du 3^e degré passant par S_1 et dont les points de tangence sont leurs points de coupe avec les rayons doubles correspondants. (Voir fig. 8).

D'après ce qui précède, si nous connaissons dans une courbe du 3^e degré à point double, six points de cette courbe et le point double, cette courbe est complètement déterminée, car nous pouvons prendre un des points simples comme sommet d'un faisceau simple et le point double comme sommet d'un faisceau double et former avec ces deux faisceaux un groupe du $(2+1)^e$ degré avec lequel nous pouvons construire toute la courbe. Ces observations jointes aux lois importantes des tangentes peuvent se résumer comme suit :

tes confondues dont le point de coupe est en h_1 ou h_2 ou les tangentes de la conique par D_1 coupent la base simple ; h_1 et h_2 sont donc les autres points de coupe de la base simple avec la courbe de 3^e classe et les tangentes à la courbe menée par ces points sont ces tangentes confondues.

On en conclut donc :

Le point de coupe de la base de la division simple avec la conique auxiliaire est le point de tangence de cette base avec la courbe de 3^e classe. Ses deux autres points de coupe avec elle sont les points conjugués des points doubles de la base multiple.

Les tangentes par ces points de coupe sont les droites qui joignent les points doubles avec leurs homologues respectifs. (Voir fig. 9).

Dualistiquement nous pouvons dire qu'une courbe de la 3^e classe à tangente double est complètement déterminée avec la tangente double et six tangentes simples, car nous pouvons prendre une des tangentes simples comme base d'une division simple et la tangente multiple comme base d'une division double, puis former un groupe de la $(2+1)^e$ classe avec ces deux ponctuelles. Le groupe permet de déterminer toutes les autres tangentes de la courbe. De ceci, et des lois importantes des points de tangence nous pouvons dire :

Tangentes par un point quelconque d'une courbe du 3e degré à point double :

Par un point quelconque d'une courbe du 3e degré à point double on peut mener trois tangentes à cette courbe.

1° La tangente dont le point de tangence est le point donné. On l'obtient en considérant le point donné comme sommet d'un faisceau simple homographique avec le faisceau double du point double et en menant de ce point la tangente encore possible à la conique auxiliaire. Cette tangente est toujours réelle et son dernier point de coupe avec la courbe facilement déterminable.

2° Les deux tangentes passant par le point considéré mais dont les points de tangence sont différents de lui. On les obtient en joignant ce point aux points de coupe de la conique auxiliaire avec la seconde base qui a servi à l'établir. Le point de tangence de ces droites est sur les rayons doubles du deuxième faisceau. Il est à remarquer que ces deux tangentes peuvent être réelles ou imaginaires ou confondues.

Nous pouvons donc ajouter, puisque par chaque point de la courbe on peut lui mener trois tangentes :

Points de coupe d'une tangente quelconque d'une courbe de 3e classe à tangente double avec cette courbe :

Une tangente simple quelconque d'une courbe de 3e classe à tangente double possède trois points de coupe avec celle-ci. Ce sont :

1° Son point de tangence avec la courbe. On l'obtient en considérant la tangente donnée comme base d'une ponctuelle simple homographique avec celle de la tangente double et qui est une ponctuelle double. Le point de coupe de cette droite avec la conique auxiliaire, diffèrent du point de départ donne ce point de tangence.

Ce point est toujours réel, et par ce même point il existe une seconde tangente que l'on sait déterminer.

2° Les autres points communs à la courbe de 3e classe et à la tangente considérée sont les points de coupe de cette tangente avec les deux tangentes de la conique auxiliaire menée par le sommet du faisceau double relatif à celle-ci.

Les tangentes en ces points sont les droites qui les joignent aux points doubles de la ponctuelle sur la tangente double. Il est à remarquer que ces deux derniers points de coupe de la tangente simple avec la courbe peuvent être réels ou imaginaires et dans un cas limite confondus.

Nous pouvons donc dire que

La courbe du troisième degré à point double est une courbe de la quatrième classe.

Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire dépend comme on l'a vu des deux rayons homologues sur lesquels on prend les bases.

Toutes les coniques auxiliaires ont donc trois tangentes communes avec la courbe du troisième degré. Ce sont les deux tangentes par le point double et la tangente avec son point de tangence au sommet du faisceau simple.

Le rayon du faisceau simple sur lequel on prend la division double auxiliaire est également une tangente de cette conique. Son point de tangence est aussi son point de coupe avec son second rayon conjugué. C'est donc un point de la courbe du troisième degré. La conique auxiliaire correspondant à ce même rayon et à son autre rayon conjugué aura comme point de tangence sur le rayon dont nous causons, le point de coupe avec le premier rayon conjugué. Il est à remarquer que cette conique et la précédente auraient alors quatre tangentes communes.

chaque tangente simple a quatre points communs déterminés avec la courbe :

Une courbe de la troisième classe à tangente double est une courbe du quatrième degré.

Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire relative aux courbes de classe dépend des faisceaux construits par les points homologues D_1 et D.

Toutes les coniques auxiliaires auront donc trois points communs avec la courbe de la troisième classe. Ce sont les deux points de tangence de la tangente double et le point de tangence de la tangente utilisée comme base simple.

Le sommet D du faisceau double auxiliaire est également sur la conique. La tangente menée par ce point donne son deuxième conjugué D_2 sur la base double. C'est donc une tangente de la courbe de troisième classe.

La conique auxiliaire correspondant aux faisceaux de sommets D et D_2 passera également par D, mais cette conique aurait comme tangente en D la droite DD_2 tangente de la courbe de troisième classe. Comme précédemment nous pouvons dire que ces deux coniques auxiliaires ont alors quatre points communs.

Intersection d'une droite quelconque avec une courbe du 3e degré à point double.

Toute droite coupant les deux faisceaux d'un groupe du $(2+1)^e$ degré dont dépend la courbe considérée du troisième degré à point double, rencontre ces faisceaux suivant deux divisions du $(2+1)^e$ degré situées sur la même base et homographiques l'une à l'autre.

Les points de coupe avec les cinq paires de rayons homologues donne cinq paires de points, également homologues et suffisants pour déterminer les ponctuelles.

Chaque point de coupe de la transversale avec la courbe correspond évidemment à deux points homologues confondus des divisions de même base. Ces points homologues sont les points doubles du troisième degré des ponctuelles à base commune. Comme elles ont trois de ces points possibles, nous en concluons que toute droite à trois points de coupe avec la courbe du troisième degré à point double, et ceux-ci peuvent être déduits des cinq paires de points homologues fondamentaux d'après les méthodes que nous avons indiquées.

Tangentes d'une courbe de 3e classe à tangente double menées par un point quelconque.

En joignant tous les points des deux ponctuelles formant un groupe de la $(2+1)^e$ classe dont dépend la courbe considérée, de la 3e classe à tangente double, avec un point quelconque, on forme évidemment deux faisceaux concentriques du $(2+1)^e$ degré, homographiques l'un à l'autre.

Les cinq paires de points homologues donnés entraînent cinq paires de rayons homologues des faisceaux, au moyen desquelles on peut complètement déterminer ceux-ci.

Toute tangente de la courbe passant par le point considéré correspond évidemment à deux rayons homologues confondus des faisceaux concentriques. Ces rayons sont les rayons doubles du troisième degré des faisceaux. Ceux-ci ont trois de ces rayons possibles, d'où nous en concluons que par un point quelconque on peut mener trois tangentes à une courbe de la 3e classe à tangente double et ces tangentes peuvent être déduites des cinq paires de rayons fondamentaux des faisceaux concentriques. Il est bon de remarquer que deux tangentes peuvent être imaginaires et dualistiquement deux points de coupe dans l'autre courbe aussi.

Autres constructions.

La courbe du troisième degré

Autres constructions.

Les ponctuelles qui engenet les tangentes dont nous causons peuvent être construites encore d'une autre manière.

Si les éléments donnés sont : $S_1a - S_2a_1$; $S_1a - S_2a_2$; $S_1b - S_2b_1$; $S_1b - S_2b_2$; et $S_1c - S_2c_1$ le faisceau double en S_2 contient deux paires de rayons et comme il forme une involution, on peut le couper par une circonférence arbitraire passant par S_2. Les drent la courbe de 3e classe que nous considérons, peuvent être données par les points :

$$aA_1aA_2 \; ; \quad bB_1bB_2 \quad \text{et} \quad cC_1 \; .$$

La ponctuelle $A_1A_2B_1B_2$ dont chaque paire est homologue des points *abc* ..... forme comme nous le savons une involution. Cette involution peut être construite avec un cercle auxiliaire

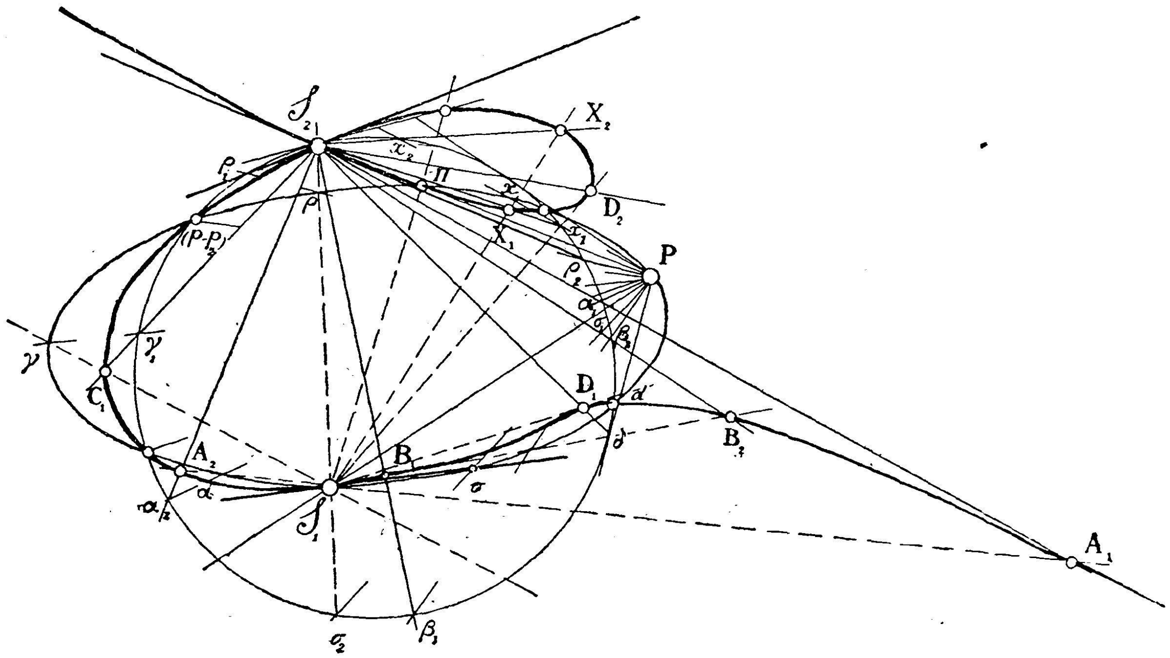

FIG. 10.

points de coupe des rayons, soient $a_1 a_2$; $b_1 b_2$; ... donnent un faisceau de sommet P, dont chaque rayon correspond à une paire de l'involution en S_2. Le faisceau simple de sommet S_1 devient ainsi homographique avec le faisceau simple de sommet P et ils engendrent une conique. Cette courbe est donnée par cinq points.

On peut construire toutes les autres paires d'éléments homologues des faisceaux primitifs tangent de la base double. Les tangentes de ce cercle par les points correspondants de l'involution donnent d'autres points de coupe $\alpha\beta\gamma$ ... situés sur une même droite et forment une ponctuelle sur celle-ci. Cette ponctuelle est homographique avec la ponctuelle simple *abc* ... Elles engendrent donc ensemble une conique dont elles donnent les cinq tangentes fondamentales.

Toute tangente à la conique

au moyen de transversales menées par P. Chaque transversale donne trois points dont deux x_1 et x_2 sur le cercle et un sur la conique x. Les premiers joints à S_2 et le dernier à S_1 forment les rayons $S_2 x_1$ et $S_2 x_2$ homologues de $S_1 x$. (Voir fig. 10.)

auxiliaire menée par un point ξ de $\alpha\beta$ donne x sur la base simple. Les tangentes au cercle menées par ξ donnent X_1 et X_2 sur la base double comme points conjugués de x. Les droites xX_1 et xX_2 sont ainsi de nouvelles tangentes de notre courbe de la troisième classe à tangente double. (Voir fig. 11.)

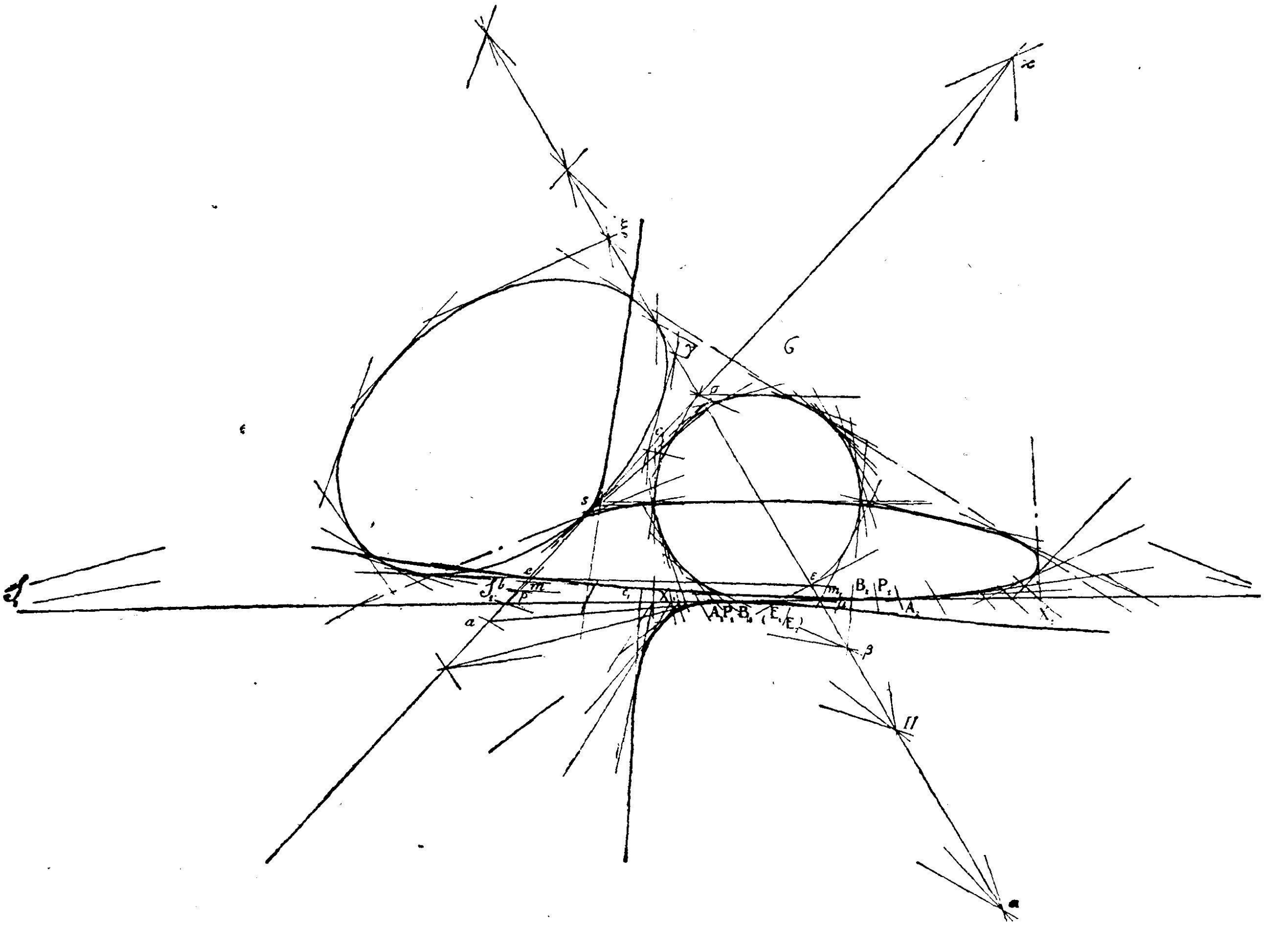

Fig. 11.

Pour obtenir les tangentes par le point double, considérons $S_1 S_2$ du faisceau simple donnant ϱ sur la conique, $P\varrho$ sera l'homologue dans le faisceau P. Celui-ci donnera ϱ_1 et ϱ_2 sur le cercle ; donc $S_2\varrho_1$ et $S_2\varrho_2$ seront les rayons homologues de $S_1 S_2$ dans le faisceau S_2.

Ce seront les tangentes de la

Les points de tangence de la tangente double seront ses points de coupe avec les tangentes infiniment voisines ou autrement dit les points conjugués sur la base double du point de coupe p des deux bases. Ce seront P_1 et P_2. C'est la tangente $p\pi$ de la conique qui donne π sur $\alpha\beta$, duquel on mène deux courbe du troisième degré par le point double.

On obtient la tangente en S_1 au moyen du rayon S_2S_1 donnant σ_2 sur le cercle ; $P\sigma_2$ donne encore σ_1 et σ. Le rayon $S_1\sigma$ est ainsi l'homologue des rayons S_2S_1 et $S_2\sigma_1$. C'est la tangente de la courbe en S_1.

Les rayons doubles de l'involution en S_2 résultent des tangentes du cercle par P ; — $P\delta$ est une de ces tangentes. Elle donne d sur la conique ; S_1d est son rayon conjugué en S_1 ou le rayon homologue des rayons doubles du faisceau S_2. Le point de coupe de ces rayons, soit D_1 montre que S_1d ou S_1D_1 a deux points de coupe avec la courbe confondus en D_1. C'est donc une tangente de cette courbe en D_1 et passant par S_1. L'autre tangente par S_1 correspond au point de tangence D_2.

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre points de coupe pouvant être imaginaires deux à deux. Ces points sont aussi les points de coupe de deux rayons homologues comme S_1p et S_2p_2. Ils sont donc des points de la courbe du troisième degré. Cette courbe peut avoir six points communs avec la conique. Le cinquième est S_1 puis le sixième qui doit toujours être réel est donné par le point de coupe du rayon S_2P avec son homologue $S_1\pi$. Le rayon $S_1\pi$ a encore un point sur la courbe, c'est son intersection avec la tangentes au cercle : πP_1 et πP_2.

Le point de tangence de la base simple est un point s conjugué des points S_1 et S_2 de la base double. S_1 étant le point de coupe des deux bases. La tangente du cercle par S_1 soit $S_1\sigma$ donne σ sur $\alpha\beta$. De ce point on mène une tangente au cercle pour avoir S_2 et une à la conique pour obtenir s.

Les points doubles de l'involution $A_1A_2B_1B_2$ ... proviennent des points de coupe de $\alpha\beta$ avec le cercle. Leurs homologues sur la base simple sont les points de coupe de celle-ci avec la courbe de la troisième classe. En outre la tangente menée par un point double et son homologue représente deux tangentes confondues se coupant dans le point de la base simple. Il en résulte donc que ce point de la base simple est le point de contact de cette tangente.

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre tangentes communes pouvant être imaginaires deux à deux. Ces tangentes sont également des tangentes de la courbe de 3e classe. Celle-ci peut en avoir six qui lui sont communes avec la conique auxiliaire. La base simple abc ... est une cinquième tangente commune. La sixième sera donc toujours réelle. Si nous considérons la droite $\alpha\beta$, elle coupe la base double en m_1 ou μ le conjugué sur cette base est m_2 le point de tangence du cercle auxiliaire et le conjugué sur la gente du cercle en S_2. (Voir fig. 10).

La conique auxiliaire dépend du cercle primitivement tracé. Si on laisse le sommet S_1 du faisceau simple se déplacer sur la courbe du 3e degré la conique auxiliaire change, mais passe toujours par les quatre points de coupe du cercle avec la courbe, autres que S_2.

base simple est m. La tangente mm_1 de la conique est en même temps tangente de la courbe de 3e classe. C'est la sixième tangente considérée. (Voir fig. 11.)

La conique auxiliaire dépend du cercle. Si on choisit une autre tangente simple que celle qu'on a prise la conique change aussi mais conserve toujours les quatre mêmes tangentes communes avec le cercle et la courbe de 3e classe.

III

ASYMPTOTES ET TANGENTES PARALLÈLES

Asymptotes des courbes du 3e degré à point double.

Le problème des asymptotes de ces courbes comprendra deux parties. D'abord on établira la direction des points à l'infini, et en second lieu on déterminera les tangentes par ces points.

Les points à l'infini proviendront de rayons homologues parallèles. Pour avoir leur direction, menons en S_2 des rayons parallèles à ceux de S_1. Nous formerons ainsi deux faisceaux concentriques homographiques du $(2 + 1)^e$ degré. Les rayons doubles du 3e degré de ces faisceaux correspondront aux rayons homologues parallèles.

Tangentes et points de tangence des courbes de 3e classe parallèlement à une direction donnée.

Ce problème se compose également de deux parties. Il faut en premier lieu trouver les tangentes en direction puis en second lieu déterminer les points de tangence.

La courbe sera donnée dans la fig. 12, par les cinq paires de tangentes $A_1 a$ — $B_1 b$ — $C_1 c$ — $D_1 d$ — $E_1 e$.

La direction de la ou des tangentes parallèles est donnée par xx'. Nous en sommes ramenés à chercher les tangentes de la courbe pour le point à l'infini sur cette direction. On joint les points des deux ponctuelles avec ce point. On forme ainsi des