

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1908)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CONSTRUCTIONS SYNTHÉTIQUES RELATIVES A CERTAINES COURBES DU 3<sup>e</sup> DEGRÉ ET DE LA 3<sup>e</sup> CLASSE  
**Autor:** Crelier, L.  
**Kapitel:** II TANGENTES ET SÉCANTES  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10965>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

déduire les points des divisions sur  $xy$  au moyen des tangentes de cette conique. (Voir fig. 7).

Les points doubles du deuxième degré proviennent ici des points de coupe de  $\alpha\beta$  avec le cercle. Ceux du troisième degré sont donnés par les tangentes communes en dehors de

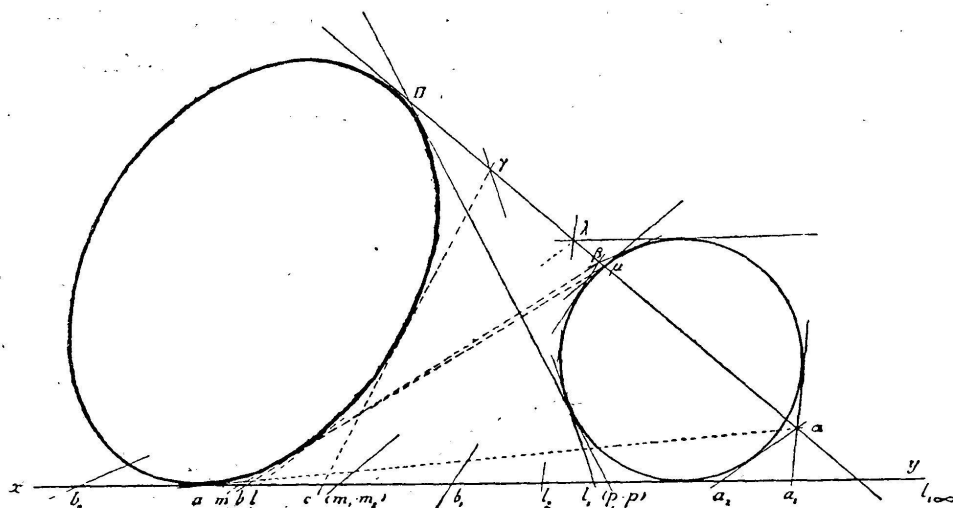


FIG. 7.

$xy$ . Toutes les coniques auxiliaires admettent quatre tangentes communes. Ce sont les trois sus-indiquées et la ligne  $\alpha\beta$ .

Les points triples et les points limites se trouvent d'une manière analogue à celle de la construction précédente.

## II

### TANGENTES ET SÉCANTES

Nous considérons une courbe du 3<sup>e</sup> degré donnée par un faisceau multiple  $S_2$  et un faisceau simple  $S_1$  constituant un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré.

Pour construire la courbe nous nous reportons à ce que nous avons écrit précédemment (*Ens. math.*, 15 nov. 06). Les faisceaux sont donnés par cinq

Nous prenons également une courbe de la 3<sup>e</sup> classe formée par une division double et une division simple constituant ensemble un groupe de la  $(2 + 1)^e$  classe.

Pour construire cette courbe suivant la méthode que nous avons déjà exposée, nous considérerons les cinq paires de

paires de rayons homologues quelconques  $aa_1 ; aa_2 ; bb_1 cc_1 ; dd_1$  ; ceux-ci déterminent sur les rayons homologues  $d$  et  $d_1$  les ponctuelles :

$$d ; \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$$

$$d_1 ; \alpha \beta \gamma \delta$$

les points  $d_1$  et  $d$  sont confondus

points homologues quelconques :

$AA_1 ; AA_2 ; BB_1 ; CC_1 ; DD_1$  qui déterminent la courbe et nous joindrons les points de la division simple ABCD avec le point  $D_1$  de l'autre division, puis ceux de cette division  $A_1 A_2 B_1 C_1$  et  $D_1$  avec D l'homologue de  $D_1$ . Nous formerons ainsi deux fais-

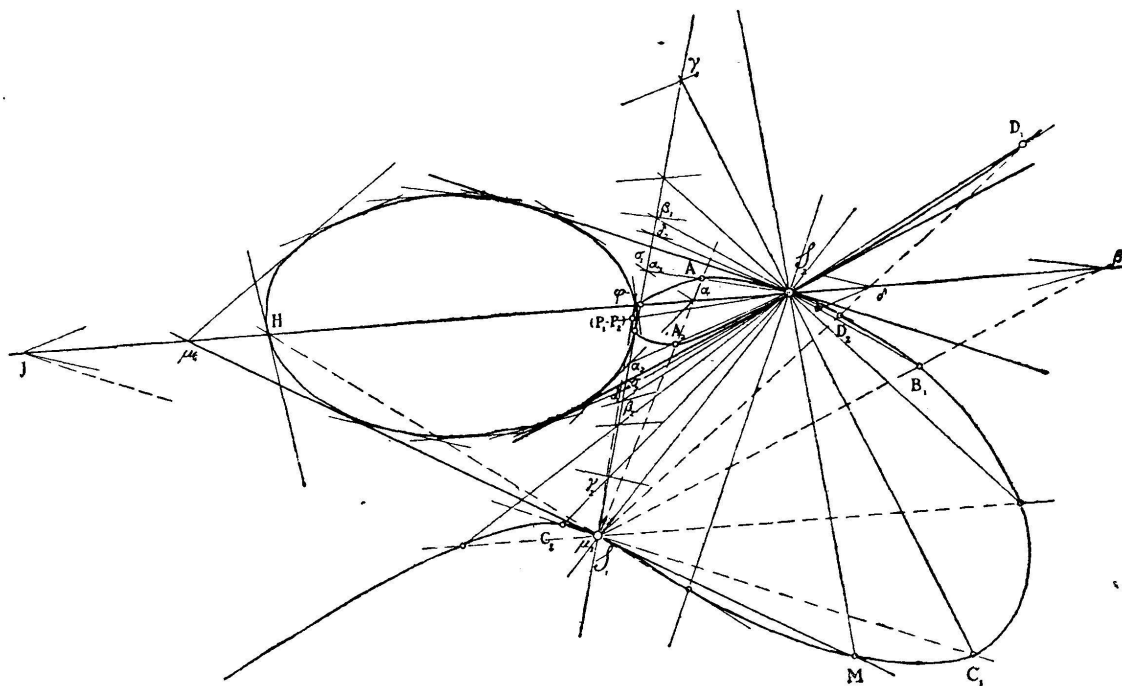


FIG 8.

avec le point de coupe des bases  $d$  et  $d_1$ . Ces ponctuelles engendrent une conique donnée par cinq tangentes. Celles-ci sont :

$$d, \alpha_1 \alpha ; \alpha_2 \alpha ; \beta_1 \beta ; \gamma_1 \gamma .$$

Toute tangente de la conique donne une paire de points homologues sur les bases. D'un autre côté, par tout point de  $d_1$  nous pouvons mener deux tangentes et par chaque point de  $d$  une tangente à cette courbe ; donc

ceux homologues déterminant un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré. Le rayon  $DD_1$  ou  $D_1 D$  sera un rayon homologue commun des deux faisceaux. Ils engendreront une conique déterminée par cinq points :  $D ; \alpha_1 ; \alpha_2 ; \beta_1 ; \gamma_1$ . Ces derniers sont les points de coupe des rayons comme  $D_1 A$  et  $DA_1$  ou  $D_1 A$  et  $DA_2$ , etc.

Toute transversale de cette courbe menée par  $D_1$  donne deux rayons homologues passant par

tout point de  $d_1$  correspond à deux points de  $d$ . En joignant ces points respectivement à  $S_1$  et  $S_2$  on obtient trois rayons appartenant au même groupement et formant deux paires de rayons homologues des divisions. Ils donnent deux points de la courbe du 3<sup>e</sup> degré. (Voir fig. 8).

D et par les points de coupe. Ces rayons déterminent, les derniers deux points sur la base double et le premier un point sur la base simple. Ces trois points forment deux paires de points homologues et donnent ainsi deux tangentes de la courbe de 3<sup>e</sup> classe (Voir fig. 9).

**Tangentes par le point double.**

Considérons  $S_2$  sur  $d_1$  et menons les deux tangentes de la co-

**Points de tangence sur la tangente double.**

Pour obtenir les points de tangence de la tangente double

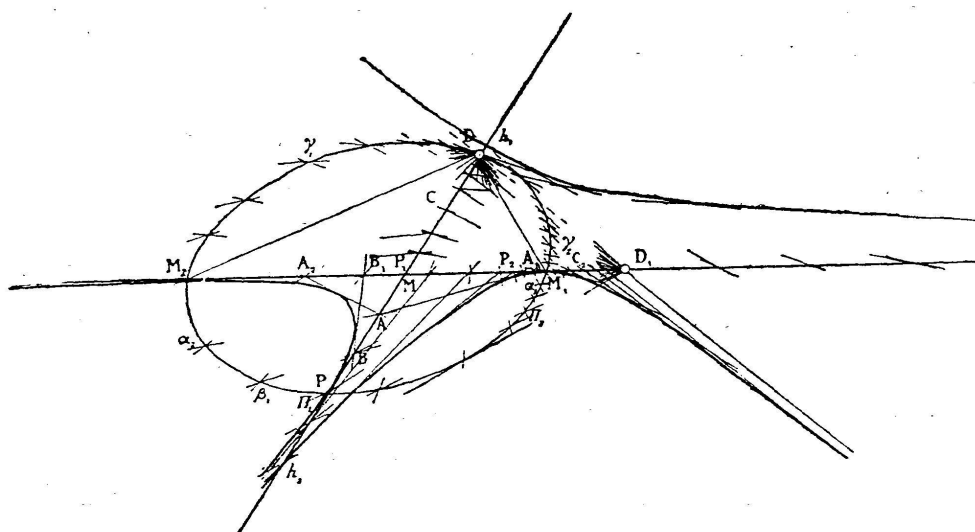


FIG. 9.

nique auxiliaire par ce point; elles donnent  $\sigma_1, \sigma_2$  sur  $d$ , comme conjuguées de  $S_2$  sur  $d_1$ . Ces tangentes sont les rayons conjugués du faisceau double correspondant au rayon  $S_1 S_2$  du faisceau simple. Le point de coupe de chaque rayon du faisceau double avec son homologue  $S_1 S_2$  est en  $S_2$ ; donc chaque rayon est une tangente

considérons-là, comme une transversale de la conique auxiliaire; issue de  $D_1$  elle donne  $M$  sur la tangente base de la division simple; les rayons homologues par  $D$  sont  $DM_1$  et  $DM_2$  menée par les points de coupe et donnant ces points de coupe comme conjugués de  $M$ . Nous aurons les tangentes  $MM_1$  et  $MM_2$  infiniment voisines de la base double, cou-

à la courbe en  $S_2$ . On en conclut :

*Les tangentes de la conique auxiliaire menées par le sommet du faisceau double sont donc les tangentes de la courbe du 3<sup>e</sup> degré menée par le point double (fig. 8).*

### Tangentes par le sommet du faisceau simple.

La tangente à la conique auxiliaire menée par  $S_1$  en dehors de  $d$ , soit  $S_1\mu$  donne  $\mu$  sur  $d_1$ . Par  $\mu$  on mène encore une tangente  $\mu\mu_2$ . Le point correspondant de  $S_1\mu$  sur  $d$  est  $\mu_1$  confondu avec  $S_1$ .

Les rayons  $S_2S_1$  et  $S_2\mu_2$  sont donc comme homologues  $S_1\mu$ .

Ils donnent les points  $S_1$  et  $M$  de la courbe. Dans ces conditions  $S_1M$  a deux points confondus avec la courbe  $S_1$  et un point de coupe en  $M$ .

D'autre part les points de coupe  $J$  et  $H$  de  $d_1$  avec la conique ne donnent plus qu'une tangente par chacun de ces points. Ces tangentes donnent les points doubles de la division sur  $d$ ; en menant ainsi les rayons doubles du faisceau  $S_2$  on voit de suite que leurs points de coupe avec  $S_1J$  et  $S_1H$  donnent deux points confondus de la courbe du 3<sup>e</sup> degré sur ces droites. D'où il en résulte que  $S_1J$  et  $S_1H$  sont encore deux tangentes de la courbe du 3<sup>e</sup> degré passant par  $S_1$  mais dont les points de

tant celles-ci en  $M_1$  et  $M_2$  donc ces points sont les points de tangence de la base double. On en conclut :

*Les points de tangence de la tangente double d'une courbe de 3<sup>e</sup> classe sont les points de coupe de cette tangente avec la conique auxiliaire (voir fig. 9).*

### Point de tangence et points de coupe de la base de la division simple.

Le point de coupe  $P$  de la base de la division simple avec la conique auxiliaire donne la transversale  $\pi_1\pi_2D_1$ . Il en résulte les points  $P_1$  et  $P_2$  sur la base double comme conjugués de  $P$ . Le point  $P_1$  est l'intersection des deux bases et le point  $\pi_1$  est confondu avec  $P$ . La tangente  $P_1P$  infiniment voisine de la base simple, coupe celle-ci en  $P$  donc ce point  $P$  est le point de tangence de la base de la division simple avec la courbe du 3<sup>e</sup> degré. La tangente  $PP_2$  est l'autre tangente de cette courbe que l'on peut mener par  $P$ .

Par le point  $D_1$  on peut mener également deux tangentes à la conique auxiliaire. Celles-ci déterminent avec  $D$  les points doubles de la division multiple. En joignant ces points doubles avec le point de coupe de la tangente respective de la conique issue de  $D_1$  on trouve une nouvelle tangente de la courbe de 3<sup>e</sup> classe représentant deux tangen-

tangence sont en dehors de  $S_1$ .

De ce qui précède, il en résulte donc :

*La tangente de la conique auxiliaire menée par  $S_1$  est en même temps tangente de la courbe du 3<sup>e</sup> degré. Son dernier point de coupe avec cette courbe est différent de  $S_1$ .*

*Les rayons du faisceau simple conjugués respectivement aux rayons doubles du faisceau multiple  $S_2$  sont encore deux tangentes de la courbe du 3<sup>e</sup> degré passant par  $S_1$  et dont les points de tangence sont leurs points de coupe avec les rayons doubles correspondants. (Voir fig. 8).*

D'après ce qui précède, si nous connaissons dans une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double, six points de cette courbe et le point double, cette courbe est complètement déterminée, car nous pouvons prendre un des points simples comme sommet d'un faisceau simple et le point double comme sommet d'un faisceau double et former avec ces deux faisceaux un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré avec lequel nous pouvons construire toute la courbe. Ces observations jointes aux lois importantes des tangentes peuvent se résumer comme suit :

tes confondues dont le point de coupe est en  $h_1$  ou  $h_2$  ou les tangentes de la conique par  $D_1$  coupent la base simple;  $h_1$  et  $h_2$  sont donc les autres points de coupe de la base simple avec la courbe de 3<sup>e</sup> classe et les tangentes à la courbe menée par ces points sont ces tangentes confondues.

On en conclut donc :

*Le point de coupe de la base de la division simple avec la conique auxiliaire est le point de tangence de cette base avec la courbe de 3<sup>e</sup> classe. Ses deux autres points de coupe avec elle sont les points conjugués des points doubles de la base multiple.*

*Les tangentes par ces points de coupe sont les droites qui joignent les points doubles avec leurs homologues respectifs. (Voir fig. 9).*

Dualistiquement nous pouvons dire qu'une courbe de la 3<sup>e</sup> classe à tangente double est complètement déterminée avec la tangente double et six tangentes simples, car nous pouvons prendre une des tangentes simples comme base d'une division simple et la tangente multiple comme base d'une division double, puis former un groupe de la  $(2 + 1)^e$  classe avec ces deux ponctuelles. Le groupe permet de déterminer toutes les autres tangentes de la courbe. De ceci, et des lois importantes des points de tangence nous pouvons dire :

**Tangentes par un point quelconque d'une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double :**

Par un point quelconque d'une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double on peut mener trois tangentes à cette courbe.

1<sup>o</sup> La tangente dont le point de tangence est le point donné. On l'obtient en considérant le point donné comme sommet d'un faisceau simple homographique avec le faisceau double du point double et en menant de ce point la tangente encore possible à la conique auxiliaire. Cette tangente est toujours réelle et son dernier point de coupe avec la courbe facilement déterminable.

2<sup>o</sup> Les deux tangentes passant par le point considéré mais dont les points de tangence sont différents de lui. On les obtient en joignant ce point aux points de coupe de la conique auxiliaire avec la seconde base qui a servi à l'établir. Le point de tangence de ces droites est sur les rayons doubles du deuxième faisceau. Il est à remarquer que ces deux tangentes peuvent être réelles ou imaginaires ou confondues.

Nous pouvons donc ajouter, puisque par chaque point de la courbe on peut lui mener trois tangentes :

**Points de coupe d'une tangente quelconque d'une courbe de 3<sup>e</sup> classe à tangente double avec cette courbe :**

Une tangente simple quelconque d'une courbe de 3<sup>e</sup> classe à tangente double possède trois points de coupe avec celle-ci. Ce sont :

1<sup>o</sup> Son point de tangence avec la courbe. On l'obtient en considérant la tangente donnée comme base d'une ponctuelle simple homographique avec celle de la tangente double et qui est une ponctuelle double. Le point de coupe de cette droite avec la conique auxiliaire, différent du point de départ donne ce point de tangence.

Ce point est toujours réel, et par ce même point il existe une seconde tangente que l'on sait déterminer.

2<sup>o</sup> Les autres points communs à la courbe de 3<sup>e</sup> classe et à la tangente considérée sont les points de coupe de cette tangente avec les deux tangentes de la conique auxiliaire menée par le sommet du faisceau double relatif à celle-ci.

Les tangentes en ces points sont les droites qui les joignent aux points doubles de la ponctuelle sur la tangente double. Il est à remarquer que ces deux derniers points de coupe de la tangente simple avec la courbe peuvent être réels ou imaginaires et dans un cas limite confondus.

Nous pouvons donc dire que

*La courbe du troisième degré à point double est une courbe de la quatrième classe.*

### Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire dépend comme on l'a vu des deux rayons homologues sur lesquels on prend les bases.

*Toutes les coniques auxiliaires ont donc trois tangentes communes avec la courbe du troisième degré. Ce sont les deux tangentes par le point double et la tangente avec son point de tangence au sommet du faisceau simple.*

Le rayon du faisceau simple sur lequel on prend la division double auxiliaire est également une tangente de cette conique. Son point de tangence est aussi son point de coupe avec son second rayon conjugué. C'est donc un point de la courbe du troisième degré. La conique auxiliaire correspondant à ce même rayon et à son autre rayon conjugué aura comme point de tangence sur le rayon dont nous causons, le point de coupe avec le premier rayon conjugué. Il est à remarquer que cette conique et la précédente auraient alors quatre tangentes communes.

chaque tangente simple a quatre points communs déterminés avec la courbe :

*Une courbe de la troisième classe à tangente double est une courbe du quatrième degré.*

### Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire relative aux courbes de classe dépend des faisceaux construits par les points homologues  $D_1$  et  $D$ .

*Toutes les coniques auxiliaires auront donc trois points communs avec la courbe de la troisième classe. Ce sont les deux points de tangence de la tangente double et le point de tangence de la tangente utilisée comme base simple.*

Le sommet  $D$  du faisceau double auxiliaire est également sur la conique. La tangente menée par ce point donne son deuxième conjugué  $D_2$  sur la base double. C'est donc une tangente de la courbe de troisième classe.

La conique auxiliaire correspondant aux faisceaux de sommets  $D$  et  $D_2$  passera également par  $D$ , mais cette conique aurait comme tangente en  $D$  la droite  $DD_2$  tangente de la courbe de troisième classe. Comme précédemment nous pouvons dire que ces deux coniques auxiliaires ont alors quatre points communs.

**Intersection d'une droite quelconque avec une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double.**

Toute droite coupant les deux faisceaux d'un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré dont dépend la courbe considérée du troisième degré à point double, rencontre ces faisceaux suivant deux divisions du  $(2 + 1)^e$  degré situées sur la même base et homographiques l'une à l'autre.

Les points de coupe avec les cinq paires de rayons homologues donne cinq paires de points, également homologues et suffisants pour déterminer les ponctuelles.

Chaque point de coupe de la transversale avec la courbe correspond évidemment à deux points homologues confondus des divisions de même base. Ces points homologues sont les points doubles du troisième degré des ponctuelles à base commune. Comme elles ont trois de ces points possibles, nous en concluons que toute droite à trois points de coupe avec la courbe du troisième degré à point double, et ceux-ci peuvent être déduits des cinq paires de points homologues fondamentaux d'après les méthodes que nous avons indiquées.

#### **Autres constructions.**

La courbe du troisième degré

**Tangentes d'une courbe de 3<sup>e</sup> classe à tangente double menées par un point quelconque.**

En joignant tous les points des deux ponctuelles formant un groupe de la  $(2 + 1)^e$  classe dont dépend la courbe considérée, de la 3<sup>e</sup> classe à tangente double, avec un point quelconque, on forme évidemment deux faisceaux concentriques du  $(2 + 1)^e$  degré, homographiques l'un à l'autre.

Les cinq paires de points homologues donnés entraînent cinq paires de rayons homologues des faisceaux, au moyen desquelles on peut complètement déterminer ceux-ci.

Toute tangente de la courbe passant par le point considéré correspond évidemment à deux rayons homologues confondus des faisceaux concentriques. Ces rayons sont les rayons doubles du troisième degré des faisceaux. Ceux-ci ont trois de ces rayons possibles, d'où nous en concluons que par un point quelconque on peut mener trois tangentes à une courbe de la 3<sup>e</sup> classe à tangente double et ces tangentes peuvent être déduites des cinq paires de rayons fondamentaux des faisceaux concentriques. Il est bon de remarquer que deux tangentes peuvent être imaginaires et dualistiquement deux points de coupe dans l'autre courbe aussi.

#### **Autres constructions.**

Les ponctuelles qui engen-

et les tangentes dont nous causons peuvent être construites encore d'une autre manière.

Si les éléments donnés sont :  $S_1a - S_2a_1$ ;  $S_1a - S_2a_2$ ;  $S_1b - S_2b_1$ ;  $S_1b - S_2b_2$ ; et  $S_1c - S_2c_1$  le faisceau double en  $S_2$  contient deux paires de rayons et comme il forme une involution, on peut le couper par une circonférence arbitraire passant par  $S_2$ . Les

drent la courbe de 3<sup>e</sup> classe que nous considérons, peuvent être données par les points :

$$aA_1aA_2; \quad bB_1bB_2 \quad \text{et} \quad cC_1.$$

La ponctuelle  $A_1A_2B_1B_2$  dont chaque paire est homologue des points  $abc \dots$  forme comme nous le savons une involution. Cette involution peut être construite avec un cercle auxiliaire

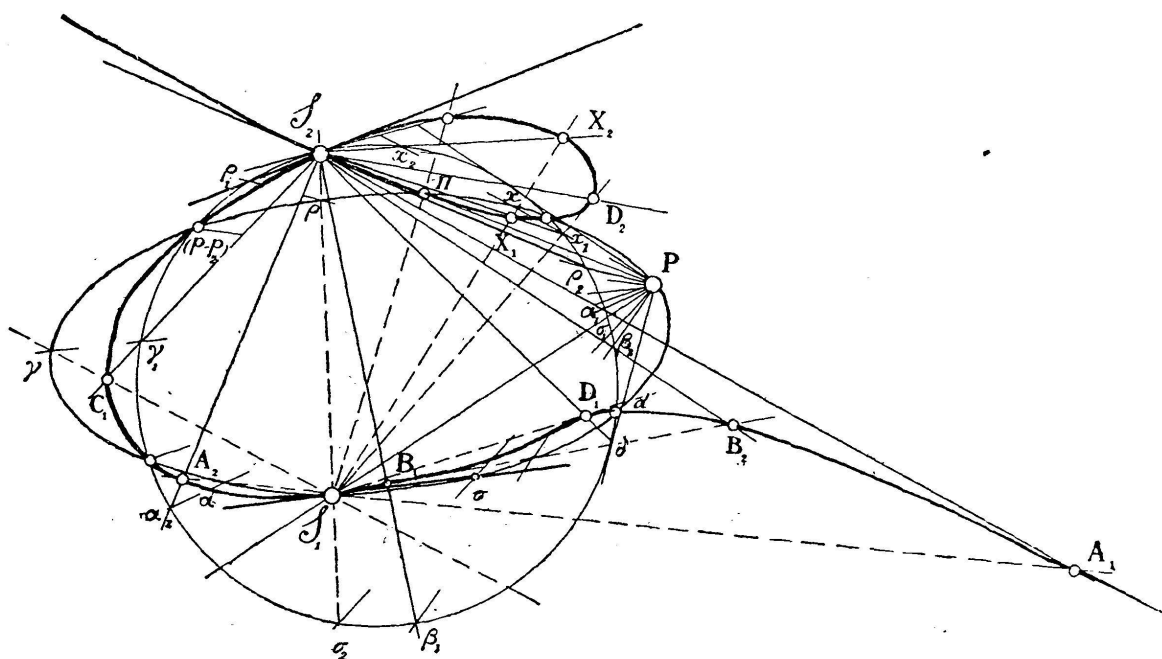


FIG. 10.

points de coupe des rayons, soient  $a_1a_2$ ;  $b_1b_2$ ; ... donnent un faisceau de sommet P, dont chaque rayon correspond à une paire de l'involution en  $S_2$ . Le faisceau simple de sommet  $S_1$  devient ainsi homographique avec le faisceau simple de sommet P et ils engendrent une conique. Cette courbe est donnée par cinq points.

On peut construire toutes les autres paires d'éléments homologues des faisceaux primitifs

tangent de la base double. Les tangentes de ce cercle par les points correspondants de l'involution donnent d'autres points de coupe  $\alpha\beta\gamma \dots$  situés sur une même droite et forment une ponctuelle sur celle-ci. Cette ponctuelle est homographique avec la ponctuelle simple  $abc \dots$ . Elles engendrent donc ensemble une conique dont elles donnent les cinq tangentes fondamentales.

Toute tangente à la conique

au moyen de transversales menées par P. Chaque transversale donne trois points dont deux  $x_1$  et  $x_2$  sur le cercle et un sur la conique  $x$ . Les premiers joints à  $S_2$  et le dernier à  $S_1$  forment les rayons  $S_2x_1$  et  $S_2x_2$  homologues de  $S_1x$ . (Voir fig. 10.)

auxiliaire menée par un point  $\xi$  de  $\alpha\beta$  donne  $x$  sur la base simple. Les tangentes au cercle menées par  $\xi$  donnent  $X_1$  et  $X_2$  sur la base double comme points conjugués de  $x$ . Les droites  $xX_1$  et  $xX_2$  sont ainsi de nouvelles tangentes de notre courbe de la troisième classe à tangente double. (Voir fig. 11.)

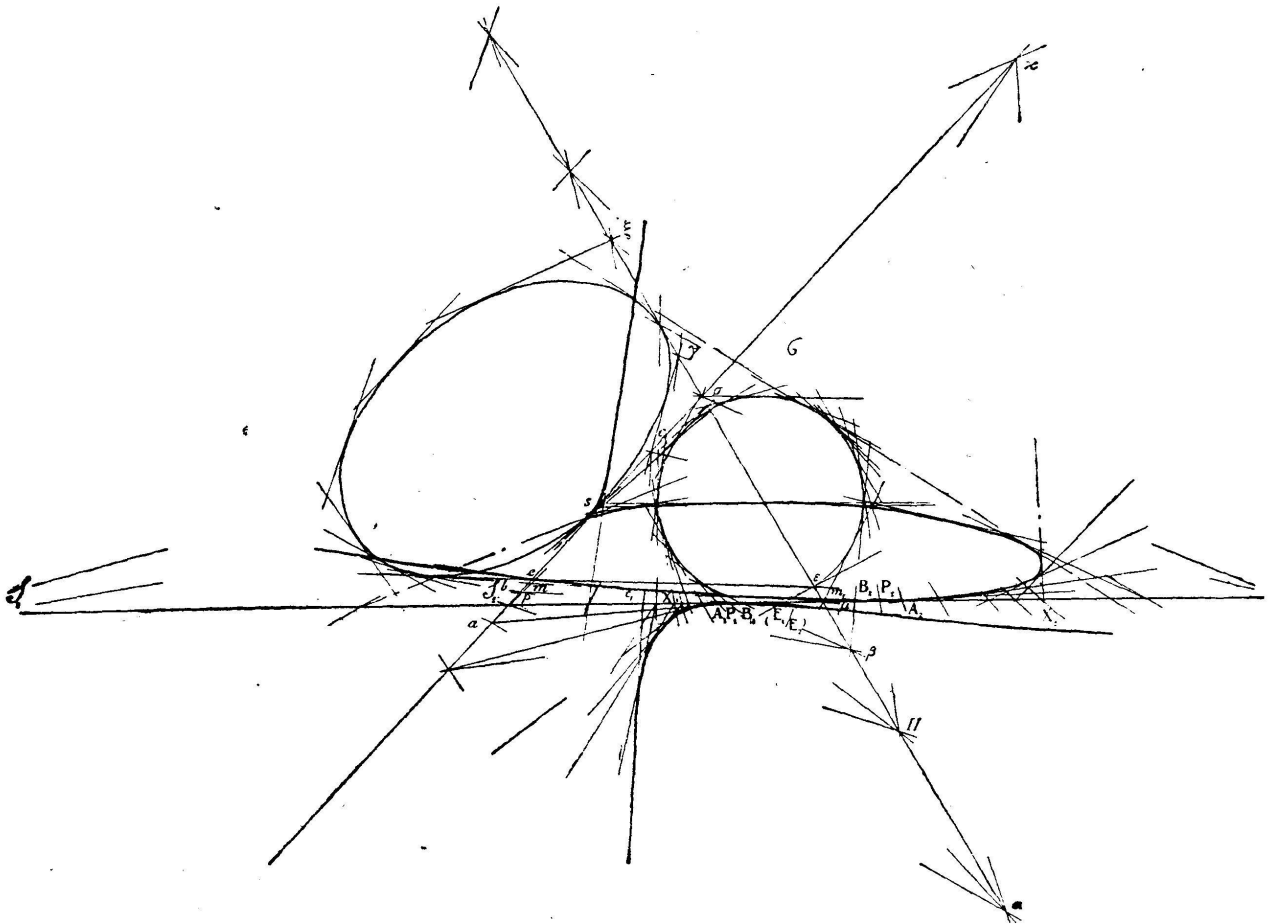


FIG. 11.

Pour obtenir les tangentes par le point double, considérons  $S_1S_2$  du faisceau simple donnant  $q$  sur la conique,  $Pq$  sera l'homologue dans le faisceau P. Celui-ci donnera  $q_1$  et  $q_2$  sur le cercle; donc  $S_2q_1$  et  $S_2q_2$  seront les rayons homologues de  $S_1S_2$  dans le faisceau  $S_2$ .

Ce seront les tangentes de la

Les points de tangence de la tangente double seront ses points de coupe avec les tangentes infiniment voisines ou autrement dit les points conjugués sur la base double du point de coupe  $p$  des deux bases. Ce seront  $P_1$  et  $P_2$ . C'est la tangente  $p\pi$  de la conique qui donne  $\pi$  sur  $\alpha\beta$ , duquel on mène deux

courbe du troisième degré par le point double.

On obtient la tangente en  $S_1$  au moyen du rayon  $S_2S_1$  donnant  $\sigma_2$  sur le cercle;  $P\sigma_2$  donne encore  $\sigma_1$  et  $\sigma$ . Le rayon  $S_1\sigma$  est ainsi l'homologue des rayons  $S_2S_1$  et  $S_2\sigma_1$ . C'est la tangente de la courbe en  $S_1$ .

Les rayons doubles de l'involution en  $S_2$  résultent des tangentes du cercle par  $P$ ; —  $P\delta$  est une de ces tangentes. Elle donne  $d$  sur la conique;  $S_1d$  est son rayon conjugué en  $S_1$  ou le rayon homologue des rayons doubles du faisceau  $S_2$ . Le point de coupe de ces rayons, soit  $D_1$  montre que  $S_1d$  ou  $S_1D_1$  a deux points de coupe avec la courbe confondus en  $D_1$ . C'est donc une tangente de cette courbe en  $D_1$  et passant par  $S_1$ . L'autre tangente par  $S_1$  correspond au point de tangence  $D_2$ .

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre points de coupe pouvant être imaginaires deux à deux. Ces points sont aussi les points de coupe de deux rayons homologues comme  $S_1p$  et  $S_2p_2$ . Ils sont donc des points de la courbe du troisième degré. Cette courbe peut avoir six points communs avec la conique. Le cinquième est  $S_1$  puis le sixième qui doit toujours être réel est donné par le point de coupe du rayon  $S_2P$  avec son homologue  $S_1\pi$ . Le rayon  $S_1\pi$  a encore un point sur la courbe, c'est son intersection avec la tan-

tangentes au cercle :  $\pi P_1$  et  $\pi P_2$ .

Le point de tangence de la base simple est un point  $s$  conjugué des points  $S_1$  et  $S_2$  de la base double.  $S_1$  étant le point de coupe des deux bases. La tangente du cercle par  $S_1$  soit  $S_1\sigma$  donne  $\sigma$  sur  $\alpha\beta$ . De ce point on mène une tangente au cercle pour avoir  $S_2$  et une à la conique pour obtenir  $s$ .

Les points doubles de l'involution  $A_1A_2B_1B_2 \dots$  proviennent des points de coupe de  $\alpha\beta$  avec le cercle. Leurs homologues sur la base simple sont les points de coupe de celle-ci avec la courbe de la troisième classe. En outre la tangente menée par un point double et son homologue représente deux tangentes confondues se coupant dans le point de la base simple. Il en résulte donc que ce point de la base simple est le point de contact de cette tangente.

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre tangentes communes pouvant être imaginaires deux à deux. Ces tangentes sont également des tangentes de la courbe de 3<sup>e</sup> classe. Celle-ci peut en avoir six qui lui sont communes avec la conique auxiliaire. La base simple  $abc \dots$  est une cinquième tangente commune. La sixième sera donc toujours réelle. Si nous considérons la droite  $\alpha\beta$ , elle coupe la base double en  $m_1$  ou  $\mu$  le conjugué sur cette base est  $m_2$  le point de tangence du cercle auxiliaire et le conjugué sur la

gente du cercle en  $S_2$ . (Voir fig. 10).

La conique auxiliaire dépend du cercle primitivement tracé. Si on laisse le sommet  $S_1$  du faisceau simple se déplacer sur la courbe du 3<sup>e</sup> degré la conique auxiliaire change, mais passe toujours par les quatre points de coupe du cercle avec la courbe, autres que  $S_2$ .

base simple est  $m$ . La tangente  $mm_1$  de la conique est en même temps tangente de la courbe de 3<sup>e</sup> classe. C'est la sixième tangente considérée. (Voir fig. 11.)

La conique auxiliaire dépend du cercle. Si on choisit une autre tangente simple que celle qu'on a prise la conique change aussi mais conserve toujours les quatre mêmes tangentes communes avec le cercle et la courbe de 3<sup>e</sup> classe.

### III

#### ASYMPTOTES ET TANGENTES PARALLÈLES

*Asymptotes des courbes du 3<sup>e</sup> degré à point double.*

Le problème des asymptotes de ces courbes comprendra deux parties. D'abord on établira la direction des points à l'infini, et en second lieu on déterminera les tangentes par ces points.

Les points à l'infini proviendront de rayons homologues parallèles. Pour avoir leur direction, menons en  $S_2$  des rayons parallèles à ceux de  $S_1$ . Nous formerons ainsi deux faisceaux concentriques homographiques du  $(2 + 1)^e$  degré. Les rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré de ces faisceaux correspondront aux rayons homologues parallèles.

*Tangentes et points de tangence des courbes de 3<sup>e</sup> classe parallèlement à une direction donnée.*

Ce problème se compose également de deux parties. Il faut en premier lieu trouver les tangentes en direction puis en second lieu déterminer les points de tangence.

La courbe sera donnée dans la fig. 12, par les cinq paires de tangentes  $A_1a - B_1b - C_1c - D_1d - E_1e$ .

La direction de la ou des tangentes parallèles est donnée par  $xx'$ . Nous en sommes ramenés à chercher les tangentes de la courbe pour le point à l'infini sur cette direction. On joint les points des deux ponctuelles avec ce point. On forme ainsi des