Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSTRUCTIONS SYNTHÉTIQUES RELATIVES A CERTAINES COURBES DU 3e DEGRÉ ET DE LA 3e CLASSE

Autor: Crelier, L.

Kapitel: B. Points et rayons particuliers.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10965

et comme pour ce dernier cas ils sont situés sur des transversales concourantes en un point P.

B. Points et rayons particuliers.

1. *Rayons doubles du 2e degré.*

Nous désignerons sous ce nom les rayons Sl_1 et Sl_2 du faisceau multiple qui tombent ensemble mais qui restent différents de leur conjugué l du faisceau simple.

1. *Points doubles du 2e degré.*

Nous entendons par points doubles du 2e degré deux points comme L_1 et L_2 de la division multiple, qui sont confondus mais qui restent différents de leur homologue L de la division simple.

Dans la fig. 1 ces rayons sont donnés par les tangentes de la conique auxiliaire issues de a_1. On joint le point de tangence λ avec a pour obtenir les points doubles correspondants de la division circulaire. Il reste à mener les rayons Sl_1 et Sl_2 issus de S par ce nouveau point. On a évidemment deux rayons de ce genre réels, imaginaires ou confondus. (Fig. 1.)

Dans la deuxième construction (fig. 3), ce sont les tangentes au cercle issues de P qui donnent les points doubles de la division circulaire. On joint ceux-ci à S et on a les rayons cherchés.

Quand il s'agit de points doubles du 2e degré pris sur deux divisions de même base, on prolonge les rayons doubles des faisceaux concentriques correspondants menés par S jusqu'à cette base.

2. *Rayons doubles du 3e degré.*

Nous appellerons rayons doubles du 3e degré deux rayons homologues confondus tels de Sp et Sp_1.

2. *Points doubles du 3e degré.*

Les points doubles du 3e degré sont les points formés par deux homologues P et P′ confondus.

Pour obtenir ces rayons, considérons dans la fig. 1, un des points de coupe de la conique avec le cercle et désignons le par π_1. La transversale $a_1\pi_1$ donne également deux rayons par a soit $a\pi_1$ et $a\pi_2$. Sur le cercle $a_1\pi_1$ donne p, $a\pi_1$ donne p_1 et $a\pi_2$ donne p_2. Comme π_1 est déjà sur le cercle p et p_1 seront donc confondus avec π_1. Les rayons passant par S seront Sp, Sp_1 et Sp_2, les deux derniers étant les homologues du premier. Les rayons homologues Sp et Sp_1 seront donc confondus tandis que Sp_2 ne donne rien de particulier.

Le nombre des rayons doubles du 3e degré dépend ainsi du nombre des points de coupe des deux courbes en dehors du point a qui est le sommet du faisceau multiple auxiliaire.

Nous avons donc trois points de coupe possibles différents de a dont deux peuvent être imaginaires. Il en résulte ainsi : *Les faisceaux concentriques formant un groupe du* $(2+1)^e$ *degré ont trois rayons doubles du 3e degré dont deux peuvent être réels, imaginaires ou confondus.*

La conique auxiliaire utilisée dans la première figure dépend de deux faisceaux de sommets a et a_1. Il est aisé de voir qu'elle est tangente au rayon aa_2 en a. Si l'on avait pris les sommets des faisceaux auxiliaires en a et a_2, la nouvelle conique eût été tangente au rayon aa_1 en a. D'un autre côté les points doubles du 3e degré sur le cercle sont des points fixes de celui-ci. *Ils appartiendront ainsi à toutes les coniques auxiliaires.* Les deux coniques correspondant aux faisceaux de sommets a et a_1 ou a et a_2 passeront par ces trois points et par le point a.

Les sommets des faisceaux auxiliaires peuvent être deux points homologues quelconques x et x_1. D'après ce qui précède la conique correspondante passera par les trois points doubles et par le point x.

On passe des rayons doubles du 3e degré, aux points doubles de même nature des divisions situées sur une même base, en prolongeant les rayons en question jusqu'à cette base.

Dans la figure 3, toute transversale Pμ passant par un point de coupe de la conique et du cercle donne sur le cercle les points m_1 et m_2 tels que m_2 est confondu avec μ. D'autre part Sμ donne également m sur le cercle confondu avec μ ou m_2. Donc les rayons homologues Sm et Sm_2 sont confondus et constituent une paire de rayons doubles du 3e degré. En dehors du point S, les deux courbes ont encore trois points communs. Donc cette construction nous montre également que les faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré ont trois rayons doubles du $(2+1)^e$ degré, dont deux peuvent être imaginaires.

Dans la fig. 3 nous avons considéré la conique auxiliaire comme provenant de deux faisceaux simples, un de sommet P et l'autre de sommet S. Nous aurions pu prendre ce deuxième sommet en un point quelconque du cercle a_1 a_2, etc. appartenant à la division circulaire multiple. La conique auxiliaire eût passé par les trois points doubles du 3^e degré des divisions circulaires par P et par a_1. Toutes les coniques ainsi formées auraient constitué un faisceau de coniques dont les quatre points fixes auraient été les trois points doubles en question et le point P.

3. *Rayons triples.*

Les rayons triples de deux faisceaux homographiques concentriques, du $(2+1)^e$ degré sont formés par un rayon du faisceau simple confondus avec ses deux homologues du faisceau multiple.

Exemple : Sk confondu avec Sk_1 et Sk_2.

3. *Points triples.*

Les points triples de deux divisions homographiques de même base de la $(2+1)^e$ classe sont formés par un point de la division simple confondu avec ses deux homologues de la division multiple.

Exemple: K confondu avec K_1 et K_2 .

Ce cas sera réalisé dans la première construction (fig. 1) quand la transversale issue de a_1 et passant par un des points de coupe de la conique avec le cercle sera en même temps une tangente de la conique. Les points conjugués kk_1 et kk_2 des divisions circulaires seront tous confondus au point de coupe $\varkappa$ des deux courbes. La droite S$\varkappa$ donnera ainsi le rayon triple. On peut avoir 0, 1 ou 2 rayons triples suivant que les tangentes de la conique issues du point a_1 , ne passent pas, passent par un point de coupe des deux courbes ou passent par deux points de coupe de ces courbes.

Dans la fig. 3. le rayon triple sera donné par une transversale issue de P passant par un des points de coupe des deux courbes et en même temps tangente au cercle.

4. *Rayons rectangulaires conjugués.*

Etant donné deux faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré, nous appellerons rayons rectangulaires conjugués des rayons tels que Sm et Sm_1 qui sont homologues tout en étant perpendiculaires l'un à l'autre. Le deuxième rayon conjugué de Sm soit Sm_2 dépend des deux autres sans présenter de propriétés spéciales.

Pour obtenir ces rayons par la première méthode de construction nous observons que les solutions cherchées Sm et Sm_1 dépendent de rayons $a_1 m$ et am_1 passant par les extrémités d'un diamètre mm_1. Leur recherche dépend maintenant du problème suivant:

Problème: Etant donné deux points fixes d'un cercle a et a_1 et un diamètre mobile de celui-ci, déterminer le lieu géométrique des points de coupe des rayons joignant les extrémités du diamètre aux points fixes donnés.

Solution: Dans la fig. 4 considérons le diamètre xy; il donne les droites xa_1 et ya; après une demi-révolution y vient en x et vice-versa; le rayon ya donne xa et xa_1 donne ya_1. Dans ce cas les rayons ya_1 et ax ne sont pas à considérer sur le diamètre xy mais bien sur un nouveau diamètre obtenu après une demi-révolution.

Dans ces conditions à tout diamètre xy ne correspondent que deux droites conjuguées xa_1 et ya. Si xy tourne autour du *centre de* manière à ce que x décrive toute la circonférence xa_1 et ya engendreront deux faisceaux homographiques simples de sommet aa_1 et les points de coupe de ces rayons se trouveront sur une conique passant par a et a_1. Nous déterminons la nature de cette conique en observant que deux rayons du faisceau a comme ax et am_1 correspondent dans le faisceau a_1 à $a_1 y$ et $a_1 m$ et donnent:

$$\sphericalangle\, xa\,m_1 = \frac{1}{2} \text{ arc } xm_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle\, xom_1$$

$$\sphericalangle\, ya_1\,m = \frac{1}{2} \text{ arc } ym = \frac{1}{2} \sphericalangle\, yom$$

Ces angles sont égaux ; donc les angles compris entre les rayons homologues correspondants des deux faisceaux sont égaux. Nous avons des faisceaux homographiques égaux ; donc la conique qu'ils engendrent est un cercle passant par a et a_1. D'un autre côté il est aisé de voir que ce cercle est tangent aux rayons oa_1 et oa. Il en résulte maintenant que, ce cercle est complètement déterminé.

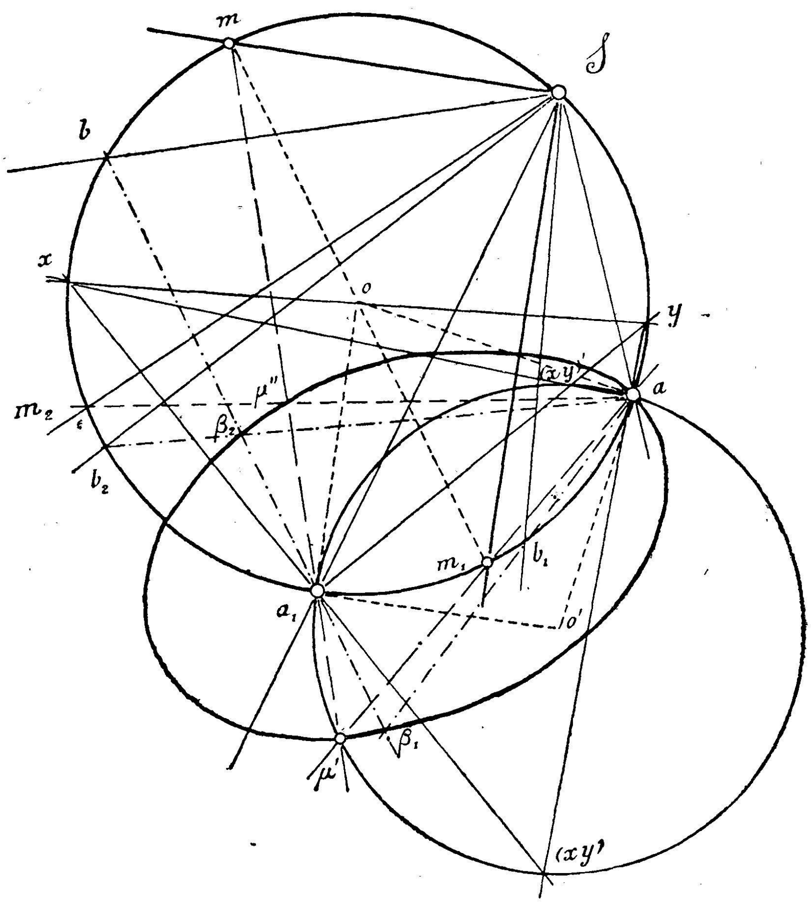

Fig. 4.

Si nous considérons de nouveau les faisceaux du $(2 + 1)^e$ degré en a et a_1 ils donneront des rayons homologues passant par les extrémités d'un même diamètre quand les points de coupe de ceux-ci seront à la fois sur le cercle nouveau et sur la conique auxiliaire.

Les rayons $a_1 m$ et am_1 correspondant aux rayons cherchés Sm et Sm_1, sont à la fois des rayons homologues des faisceaux homolographiques égaux qui engendrent le deuxième cercle, et des rayons homologues des faisceaux du $(2 + 1)^e$ degré engendrant la conique. Il faut donc que leur point d'intersection soit un point de coupe de ces deux courbes. En dehors de a ces courbes ont trois points de coupe dont deux peuvent être imaginaires. A ces trois points correspondent donc trois paires de points conjugués des divisions circulaires tels que les deux points d'une même paire sont sur un même diamètre. Ces points donnent à leur tour avec S les paires de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S.

Les faisceaux homographiques concentriques du $(2 + 1)^e$ *degré ont donc trois paires de rayons rectangulaires conjugués dont deux peuvent être imaginaires.*

Constructivement on joint le point de coupe μ_1 des courbes avec a et a_1. On a $a_1\mu_1$ et $a\mu_1$. La première droite donne μ'' sur la conique et m sur le premier cercle. La seconde droite donne m_1 sur le même cercle ; m et m_1 sont conjugués dans les divisions circulaires et appartiennent à un même diamètre. Ils donnent évidemment Sm perpendiculaire à Sm_1. Le deuxième rayon conjugué de Sm soit de Sm_2 se déduit de μ'' avec $a\mu''$ (fig. 4).

Avec la deuxième méthode de construction, les paires de rayons rectangulaires conjugués étant liées à un diamètre du cercle primitif, nous pouvons voir que les extrémités d'un diamètre, jointes à S et P engendrent deux faisceaux homographiques de sommets S et P et forment un groupe du $(2 + 1)^e$ degré. Le faisceau multiple a comme sommet S et le faisceau simple P. La courbe correspondante est une courbe du 3^e degré avec S comme point double et P comme point simple. Cette courbe aura encore trois points de coupe différents de S et de P avec la conique. De chacun de ces points on pourra donc en déduire une paire de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S. On arrive donc à la même conclusion qu'avec la méthode précédente.

5. *Points limites.*

Nous appellerons points limites de deux divisions homographiques de même base et de la $(2 + 1)^e$ classe les points conjugués du point à l'infini de la division simple ou le point conjugué et le point lié du point de la division multiple situé à l'$_\infty$.

Pour obtenir ces points, considérons les divisions déterminées suivant la méthode de la figure 1. (Voir fig. 5).

Nous prenons Sl parallèle à la base. Le rayon $a_1 l$ donne λ' et λ'', sur la conique, auxquels correspondent $a_1 l_1$ et $a_1 l_2$.

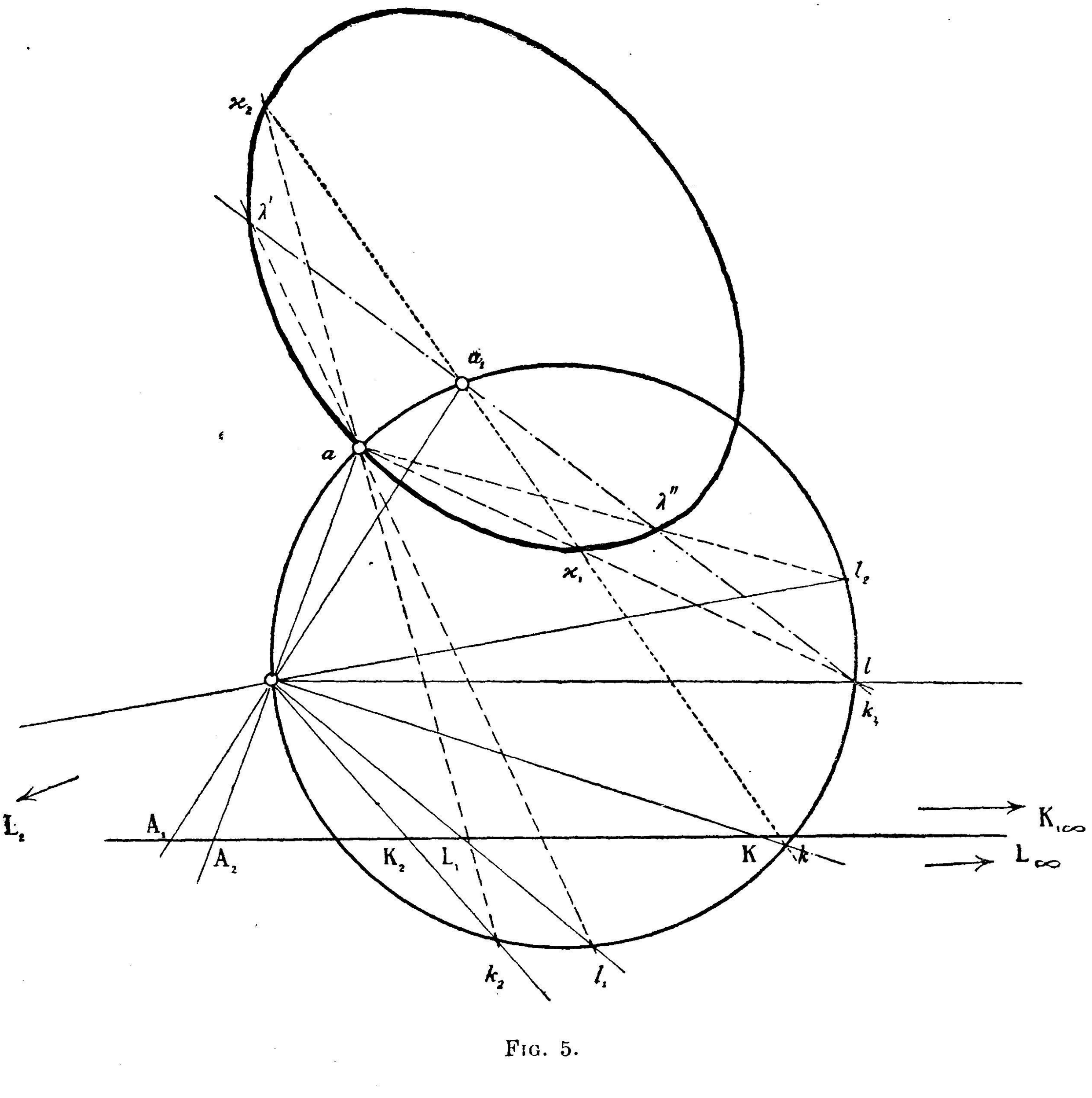

Fig. 5.

Les rayons Sl_1 et Sl_2 donnent L_1 et L_2 sur la base comme points conjugués de L_∞.

L_1 et L_2 forment un premier groupe de points limites. La parallèle précédente peut s'appeler Sk_1 ; le rayon ak_1 donne x_1 sur la conique, puis $a_1 x_1$ donne x_2, sur la conique également et k sur le cercle ; la droite ax_2, donne k_2 sur le cercle.

Les rayon Sk et Sk_1 puis Sk et k_2 sont conjugués. Ils donnent sur la base :

K conjugué de $K_{1\infty}$

K_2 » de K et lié à $K_{1\infty}$

K et K_2 forment le 2e groupe de points limites.

C. Remarque sur les divisions du $(2 + 1)^e$ degré, de même base.

On peut cependant développer les divisions homographiques du $(2 + 1)^e$ degré situées sur une même base, sans avoir besoin des faisceaux de même nature. Ce développement constitue la dualité du précédent et nous le résumons ici pour éviter d'allonger ce travail tout en voulant être aussi complet que possible. Chaque construction suppose évidemment une dualité.

Première construction. Nous donnerons les divisions au moyen des cinq paires d'éléments conjugués, aa_1 ; aa_2 ; bb_1 ; cc_1 et dd_1 . Nous construirons ensuite un cercle quelconque tangent à la base xy , et par chaque point donné nous tracerons les tangentes de cercle. Toutes ces tangentes couperont d'abord la tangente b suivant une division double, puis la tangente conjuguée b_1 suivant une division simple, homographique avec la première. Les tangentes issues de $a_1 a_2 b_1 c_1$ ... coupent b et celles issues de $abcd$ ... coupent b_1 . Ces deux nouvelles divisions ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... et $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1$ ... forment un groupe de $(2 + 1)^e$ classe avec un point homologue commun $\beta\beta_1$. Elles engendrent donc une conique que nous pouvons construire et qui est déterminée par cinq tangentes. Par tout point μ de b_1 on a deux tangentes de la conique donnant les points homologues μ_1 et μ_2 sur b. Par ces trois points, les tangentes du cercle donneront les trois points homologues des deux divisions sur xy , soient m, m_1 et m_2.

Les points doubles du deuxième degré seront évidemment donnés par les points de coupe de la base simple b_1 avec la conique auxiliaire. Ils peuvent être imaginaires.