

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	10 (1908)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	CONSTRUCTIONS SYNTHÉTIQUES RELATIVES A CERTAINES COURBES DU 3e DEGRÉ ET DE LA 3e CLASSE
<b>Autor:</b>	Crelier, L.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-10965">https://doi.org/10.5169/seals-10965</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de groupes analogues aux précédents, mais formés de faisceaux concentriques ou de ponctuelles situées sur une même base. En conséquence, nous étudierons d'abord ces cas spéciaux des groupes sus-mentionnés de la même manière que les ouvrages classiques<sup>1</sup> développent la théorie des faisceaux homographiques concentriques simples et des ponctuelles homographiques simples et de même base.

## I

## GÉNÉRALITÉS

*Faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré.*

Nous appellerons faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré deux faisceaux formant un groupe du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré et issus du même sommet.

Comme dans le cas général, deux de ces faisceaux seront évidemment déterminés dès que nous connaîtrons cinq paires de rayons homologues quelconques.

D'après les définitions que nous avons adoptées pour les groupes, il en résulte que toute transversale détermine, sur deux faisceaux concentriques ou non du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré, deux ponctuelles de la  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> classe *de même base*. En sachant donc construire deux faisceaux concentriques de cette nature, nous pourrons en déduire, à priori, deux divisions analogues de même base et inversement. Dans ces conditions nous n'aurons qu'à développer les constructions relatives aux faisceaux sans avoir besoin d'une partie dualistique pour les divisions.

*Divisions homographiques de même base de la  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> classe.*

Nous appellerons divisions ou ponctuelles homographiques de même base, de la  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> classe deux ponctuelles formant un groupe de la  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> classe et situées sur la même base.

Deux ponctuelles de cette nature seront déterminées également dès que nous aurons cinq paires de points homologues quelconques.

<sup>1</sup> W. FIEDLER : *Die darstellende Geometrie*. — T. REYE : *Die Geometrie der Lage*. — R. BÖGER : *Ebene Geometrie der Lage*.

### A. Construction de deux faisceaux concentriques du (2 + 1)<sup>e</sup> degré.

Les faisceaux sont donnés par les paires,  $Sa; Sa_1 - Sb$ ;  $Sb_1 - Sc$ ;  $Sc_1 - Sd$ ;  $Sd_1 - Se$ ;  $Se_1$ . Il reste bien entendu que chaque rayon  $a, b, c \dots$  du faisceau simple correspond à 2 rayons  $a_1$  et  $a_2 - b_1$  et  $b_2 \dots$  du faisceau multiple; par contre chaque rayon de celui-ci ne correspond qu'à un du premier. (Fig. 1.)

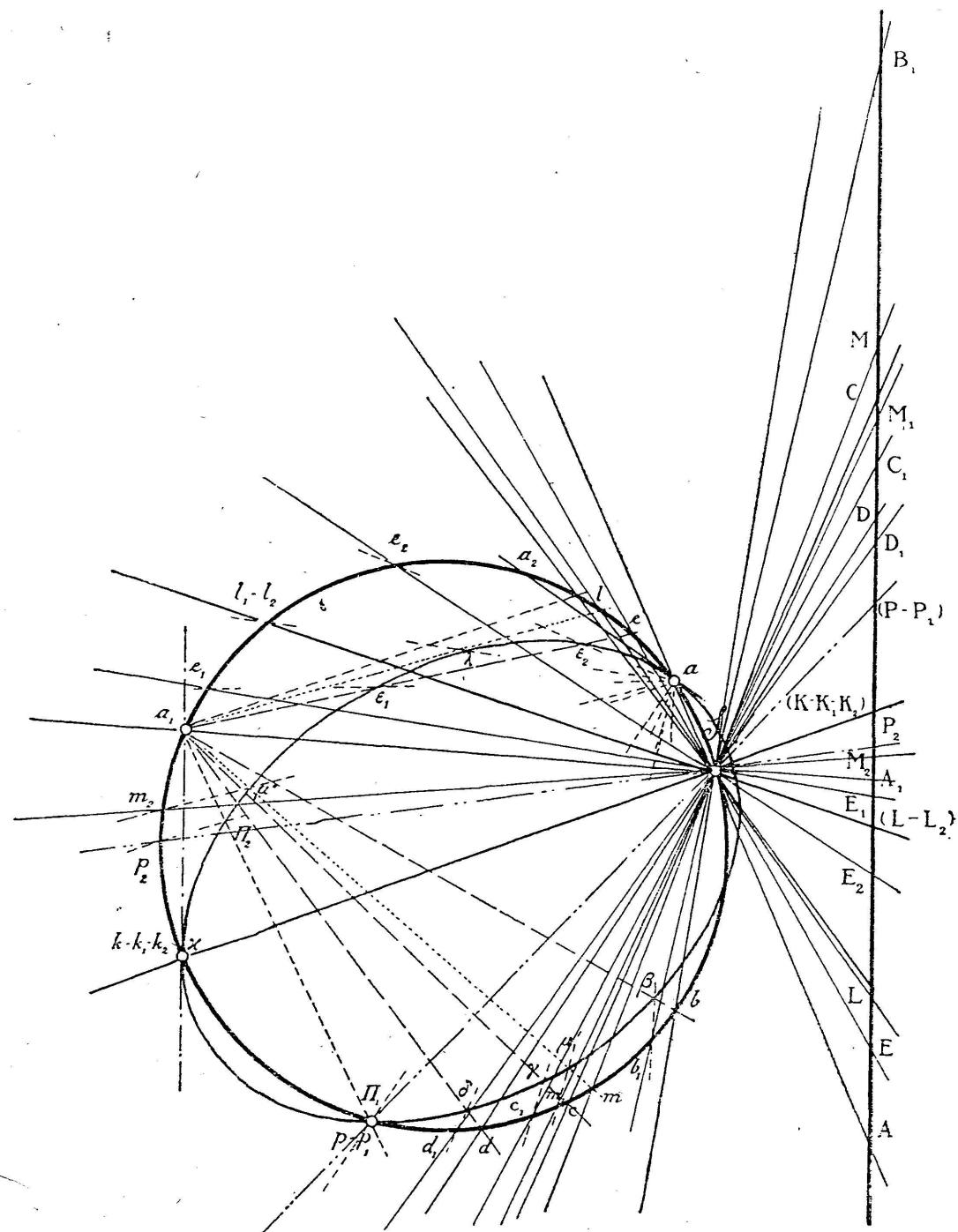


FIG. 1.

Nous coupons ensuite le groupe par une circonference arbitraire mais passant par le sommet S. Les points de coupe des rayons avec la circonference forment deux divisions circulaires homographiques du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> ordre. Celles-ci sont determinees par les points:  $aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1$  et  $ee_1$ . Les points de la division simple sont:  $abcde$  et ceux de l'autre sont:  $a_1b_1c_1d_1e_1$ . Nous joignons maintenant tous les points de la division multiple avec  $a$  et tous ceux de la division simple avec  $a_1$ . De cette maniere, et dans le sens ou nous avons defini les groupes du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré, nous obtenons deux faisceaux homographiques de sommet  $a$  et  $a_1$  formant un groupe du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré, et possédant un rayon homologue commun  $aa_1$ . D'après notre théorème, le lieu de points de coupe des rayons homologues est une conique passant par les points :

1.  $a$  sommet du faisceau multiple.
2.  $\beta$  point de coupe de  $a_1b$  avec  $ab_1$ .
3.  $\gamma$  " " "  $a_1c$  "  $ac_1$ .
4.  $\delta$  " " "  $a_1d$  "  $ad_1$ .
5.  $\varepsilon_1$  " " "  $a_1e$  "  $ae_1$ .

Cette conique peut être entièrement construite au moyen de ces cinq points et elle nous permettra de déterminer tous les autres rayons du groupe de sommet S. Si nous voulons obtenir deux rayons conjugués quelconques  $Sm$  et  $Sm_1$ , ou  $Sm$  et  $Sm_2$ , nous menons par  $a_1$  une transversale qui coupe la conique en  $\mu'$  et  $\mu''$ . Nous joignons  $a\mu'$  et  $a\mu''$  qui sont les homologues de la transversale dans les faisceaux auxiliaires de sommets  $a$  et  $a_1$ . Ces trois droites  $a_1\mu'\mu'' - a\mu' - a\mu''$  déterminent respectivement sur le cercle les points  $m$ ,  $m_1$  et  $m_2$  constituant deux paires de points conjugués des divisions circulaires. Les rayons cherchés sont ainsi  $Sm$ ,  $Sm_1$  et  $Sm_2$ .

En faisant tourner la transversale autour de  $a_1$  et en joignant les points de coupe sur la conique avec  $a$  nous obtenons ainsi tous les rayons des faisceaux de sommets  $a$  et  $a_1$ . Ceux-ci déterminent à leur tour tous les points des divisions circulaires et partant tous les rayons du groupe concentrique en S du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré.

Si nous considérons en particulier une des paires de rayons

donnés, soit  $Se$ ;  $Se_1$  nous voyons qu'il existe un deuxième rayon  $Se_2$  du faisceau multiple également conjugué de  $Se$ . Pour l'obtenir menons la droite  $a_1 \varepsilon_1$  qui donne encore  $\varepsilon_2$ , sur la courbe;  $a\varepsilon_2$ , donne  $e_2$  sur le cercle et de celui-ci on déduit aisément  $Se_2$ . (Fig. 1.)

Si nous avions eu des divisions à déterminer au lieu de

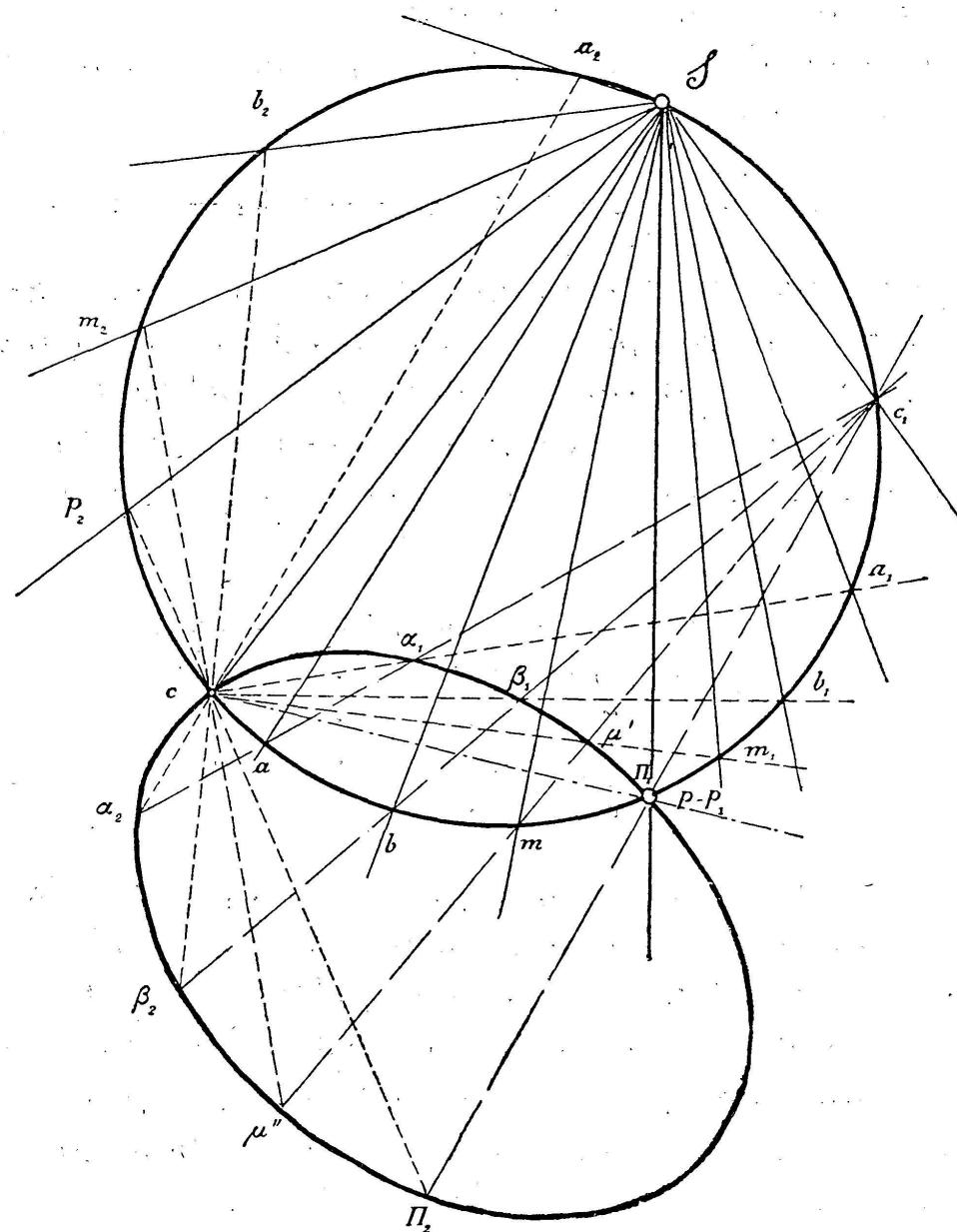


FIG. 2.

faisceaux, nous aurions joint les cinq paires de points homologues donnés  $AA_1 - BB_1 - CC_1 - DD_1 - EE_1$  avec un point arbitraire  $S$  de manière à former un groupe de deux faisceaux comme les précédents. Nous aurions ensuite achevé la construction des rayons de ces faisceaux, comme il vient d'être dit, et chaque paire nouvelle de rayons homologues

aurait donné la paire correspondante de points homologues sur la base commune. (Fig. 1.)

*Cas spécial.* Quand les rayons donnés des faisceaux du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré sont tels que deux paires du faisceau multiple sont complètes avec chacune leur rayon conjugué du faisceau simple, on peut également appliquer la construction précédente, ou utiliser une autre conique.

Si nous considérons la fig. 2, les paires de rayons homologues donnés sont :

$$Sa ; Sa_1 - Sa ; Sa_2 - Sb ; Sb_1 - Sb ; Sb_2 - Sc ; Sc_1 .$$

Les paires  $Sa_1$  et  $Sa_2$  conjuguées à  $Sa$ , puis  $Sb_1$  et  $Sb_2$  conjuguées à  $Sb$  sont complètes. On peut utiliser les points  $c$  et  $c_1$  pris sur la circonférence comme sommets des faisceaux auxiliaires et former un groupe du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré. Ce groupe donne naissance à une conique dont nous avons également cinq points. Ce sont :

1.  $c$  sommet du faisceau multiple.
2.  $\alpha_1$  sur  $ca_1$  et  $c_1a$ .
3.  $\alpha_2$  »  $ca_2$  »  $c_1a$ .
4.  $\beta_1$  »  $cb_1$  »  $c_1b$ .
5.  $\beta_2$  »  $cb_2$  »  $c_1b$ .

Les paires de rayons conjugués  $Sm Sm_1$  et  $Sm Sm_2$  sont ensuite déterminées comme précédemment. (Fig. 2.)

*Autre construction.* Nous savons également que les rayons du faisceau multiple sont liés deux à deux et qu'ils forment une involution. Nous pouvons considérer le groupe du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré comme formé d'un faisceau simple, homographique avec une involution du 2<sup>e</sup> degré et de même sommet. En coupant le groupe par un cercle passant par  $S$ , nous pouvons rappeler que les sécantes joignant les points correspondants de l'involution circulaire ainsi obtenue, forment un faisceau concentrique de sommet  $P$ . (Fig. 3.) Chaque rayon de ce faisceau correspond à un rayon du faisceau simple en  $S$ . Nous avons ainsi deux nouveaux faisceaux homographiques simples de sommets  $S$  et  $P$  qui engendrent une conique.

Les éléments donnés sont :  $Sa$ ;  $Sa_1 - Sa$ ;  $Sa_2 - Sb$ ;  $Sb_1$

—  $Sb$ ;  $Sb_2$  —  $Se$ ;  $Se_1$ . Les transversales  $a_1a_2$  et  $b_1b_2$  donnent le point P.

Le rayon  $Pa_1a_2$  est conjugué de  $Sa$  et donne  $\alpha$  de la conique auxiliaire.

$$\begin{array}{lllllll} \text{»} & Pb_1b_2 & \text{»} & Sb & \text{»} & \beta & \text{»} \\ \text{»} & Pc_1 & \text{»} & Sc & \text{»} & \gamma & \text{»} \end{array}$$

Les points P et S sont encore deux points de cette conique, laquelle est ainsi complètement déterminée.

En laissant une sécante mobile tourner autour de P, elle donnera sur la conique un point  $v$  et sur la circonférence les

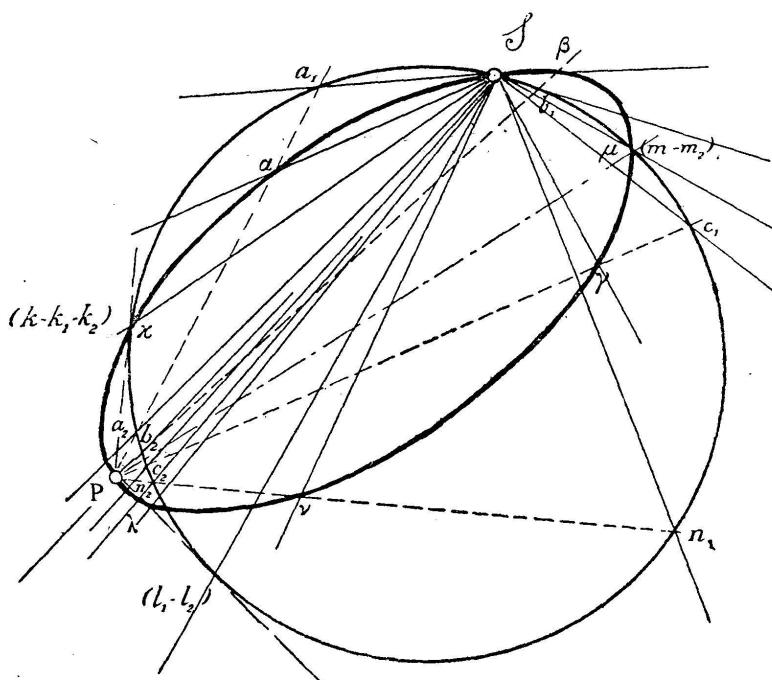


FIG. 3.

points  $n_1$  et  $n_2$ . Au premier correspond le rayon  $Sn$  ou  $Sv$  et aux autres les rayons  $Sn_1$  et  $Sn_2$  tous deux conjugués du premier. Les diverses positions de cette sécante donneront ainsi toutes les paires de rayons homologues des deux faisceaux concentriques du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré. Cette construction relative à des données spéciales est également applicable aux divisions du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré situées sur une même base.

*Remarque.* Les points correspondants de la division multiple circulaire comme  $m_1$  et  $m_2$  ou  $e_1$  et  $e_2$  que nous avons déjà trouvés dans la première construction forment évidemment la même involution que dans la deuxième construction

et comme pour ce dernier cas ils sont situés sur des transversales concourantes en un point P.

### B. Points et rayons particuliers.

#### 1. Rayons doubles du 2<sup>e</sup> degré.

Nous désignerons sous ce nom les rayons  $Sl_1$  et  $Sl_2$  du faisceau multiple qui tombent ensemble mais qui restent différents de leur conjugué  $l$  du faisceau simple.

#### 1. Points doubles du 2<sup>e</sup> degré.

Nous entendons par points doubles du 2<sup>e</sup> degré deux points comme  $L_1$  et  $L_2$  de la division multiple, qui sont confondus mais qui restent différents de leur homologue L de la division simple.

Dans la fig. 1 ces rayons sont donnés par les tangentes de la conique auxiliaire issues de  $\alpha_1$ . On joint le point de tangence  $\lambda$  avec  $\alpha$  pour obtenir les points doubles correspondants de la division circulaire. Il reste à mener les rayons  $Sl_1$  et  $Sl_2$  issus de S par ce nouveau point. On a évidemment deux rayons de ce genre réels, imaginaires ou confondus. (Fig. 1.)

Dans la deuxième construction (fig. 3), ce sont les tangentes au cercle issues de P qui donnent les points doubles de la division circulaire. On joint ceux-ci à S et on a les rayons cherchés.

Quand il s'agit de points doubles du 2<sup>e</sup> degré pris sur deux divisions de même base, on prolonge les rayons doubles des faisceaux concentriques correspondants menés par S jusqu'à cette base.

#### 2. Rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré.

Nous appellerons rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré deux rayons homologues confondus tels de  $Sp$  et  $Sp_1$ .

#### 2. Points doubles du 3<sup>e</sup> degré.

Les points doubles du 3<sup>e</sup> degré sont les points formés par deux homologues P et  $P'$  confondus.

Pour obtenir ces rayons, considérons dans la fig. 1, un des points de coupe de la conique avec le cercle et désignons le par  $\pi_1$ . La transversale  $\alpha_1\pi_1$  donne également deux rayons

par  $a$  soit  $a\pi_1$  et  $a\pi_2$ . Sur le cercle  $a_1\pi_1$  donne  $p$ ,  $a\pi_1$  donne  $p_1$  et  $a\pi_2$  donne  $p_2$ . Comme  $\pi_1$  est déjà sur le cercle  $p$  et  $p_1$  seront donc confondus avec  $\pi_1$ . Les rayons passant par  $S$  seront  $Sp$ ,  $Sp_1$  et  $Sp_2$ , les deux derniers étant les homologues du premier. Les rayons homologues  $Sp$  et  $Sp_1$  seront donc confondus tandis que  $Sp_2$  ne donne rien de particulier.

Le nombre des rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré dépend ainsi du nombre des points de coupe des deux courbes en dehors du point  $a$  qui est le sommet du faisceau multiple auxiliaire.

Nous avons donc trois points de coupe possibles différents de  $a$  dont deux peuvent être imaginaires. Il en résulte ainsi : *Les faisceaux concentriques formant un groupe du (2 + 1)<sup>e</sup> degré ont trois rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré dont deux peuvent être réels, imaginaires ou confondus.*

La conique auxiliaire utilisée dans la première figure dépend de deux faisceaux de sommets  $a$  et  $a_1$ . Il est aisément de voir qu'elle est tangente au rayon  $aa_2$  en  $a$ . Si l'on avait pris les sommets des faisceaux auxiliaires en  $a$  et  $a_2$ , la nouvelle conique eût été tangente au rayon  $aa_1$  en  $a$ . D'un autre côté les points doubles du 3<sup>e</sup> degré sur le cercle sont des points fixes de celui-ci. *Ils appartiendront ainsi à toutes les coniques auxiliaires.* Les deux coniques correspondant aux faisceaux de sommets  $a$  et  $a_1$  ou  $a$  et  $a_2$  passeront par ces trois points et par le point  $a$ .

Les sommets des faisceaux auxiliaires peuvent être deux points homologues quelconques  $x$  et  $x_1$ . D'après ce qui précède la conique correspondante passera par les trois points doubles et par le point  $x$ .

On passe des rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré, aux points doubles de même nature des divisions situées sur une même base, en prolongeant les rayons en question jusqu'à cette base.

Dans la figure 3, toute transversale  $P\mu$  passant par un point de coupe de la conique et du cercle donne sur le cercle les points  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $m_2$  est confondu avec  $\mu$ . D'autre part  $S\mu$  donne également  $m$  sur le cercle confondu avec  $\mu$  ou  $m_2$ . Donc les rayons homologues  $Sm$  et  $Sm_2$  sont confondus et constituent une paire de rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré. En dehors du point  $S$ , les deux courbes ont encore trois points

communs. Donc cette construction nous montre également que les faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré ont trois rayons doubles du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré, dont deux peuvent être imaginaires.

Dans la fig. 3 nous avons considéré la conique auxiliaire comme provenant de deux faisceaux simples, un de sommet P et l'autre de sommet S. Nous aurions pu prendre ce deuxième sommet en un point quelconque du cercle  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , etc. appartenant à la division circulaire multiple. La conique auxiliaire eût passé par les trois points doubles du 3<sup>e</sup> degré des divisions circulaires par P et par  $\alpha_1$ . Toutes les coniques ainsi formées auraient constitué un faisceau de coniques dont les quatre points fixes auraient été les trois points doubles en question et le point P.

### 3. Rayons triples.

Les rayons triples de deux faisceaux homographiques concentriques, du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré sont formés par un rayon du faisceau simple confondus avec ses deux homologues du faisceau multiple.

Exemple : Sk confondu avec  $Sk_1$  et  $Sk_2$ .

Ce cas sera réalisé dans la première construction (fig. 1) quand la transversale issue de  $\alpha_1$  et passant par un des points de coupe de la conique avec le cercle sera en même temps une tangente de la conique. Les points conjugués  $kk_1$  et  $kk_2$  des divisions circulaires seront tous confondus au point de coupe  $z$  des deux courbes. La droite  $Sz$  donnera ainsi le rayon triple. On peut avoir 0, 1 ou 2 rayons triples suivant que les tangentes de la conique issues du point  $\alpha_1$ , ne passent pas, passent par un point de coupe des deux courbes ou passent par deux points de coupe de ces courbes.

Dans la fig. 3. le rayon triple sera donné par une transversale issue de P passant par un des points de coupe des deux courbes et en même temps tangente au cercle.

### 3. Points triples.

Les points triples de deux divisions homographiques de même base de la  $(2 + 1)^{\text{e}}$  classe sont formés par un point de la division simple confondu avec ses deux homologues de la division multiple.

Exemple : K confondu avec  $K_1$  et  $K_2$ .

#### 4. Rayons rectangulaires conjugués.

Etant donné deux faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré, nous appellerons rayons rectangulaires conjugués des rayons tels que  $Sm$  et  $Sm_1$  qui sont homologues tout en étant perpendiculaires l'un à l'autre. Le deuxième rayon conjugué de  $Sm$  soit  $Sm_2$  dépend des deux autres sans présenter de propriétés spéciales.

Pour obtenir ces rayons par la première méthode de construction nous observons que les solutions cherchées  $Sm$  et  $Sm_1$  dépendent de rayons  $a_1 m$  et  $am_1$  passant par les extrémités d'un diamètre  $mm_1$ . Leur recherche dépend maintenant du problème suivant:

*Problème:* Etant donné deux points fixes d'un cercle  $a$  et  $a_1$  et un diamètre mobile de celui-ci, déterminer le lieu géométrique des points de coupe des rayons joignant les extrémités du diamètre aux points fixes donnés.

*Solution:* Dans la fig. 4 considérons le diamètre  $xy$ ; il donne les droites  $xa_1$  et  $ya$ ; après une demi-révolution  $y$  vient en  $x$  et vice-versa; le rayon  $ya$  donne  $xa$  et  $xa_1$  donne  $ya_1$ . Dans ce cas les rayons  $ya_1$  et  $ax$  ne sont pas à considérer sur le diamètre  $xy$  mais bien sur un nouveau diamètre obtenu après une demi-révolution.

Dans ces conditions à tout diamètre  $xy$  ne correspondent que deux droites conjuguées  $xa_1$  et  $ya$ . Si  $xy$  tourne autour du *centre de* manière à ce que  $x$  décrive toute la circonférence  $xa_1$  et  $ya$  engendreront deux faisceaux homographiques simples de sommet  $aa_1$  et les points de coupe de ces rayons se trouveront sur une conique passant par  $a$  et  $a_1$ . Nous déterminons la nature de cette conique en observant que deux rayons du faisceau  $a$  comme  $ax$  et  $am_1$  correspondent dans le faisceau  $a_1$  à  $a_1 y$  et  $a_1 m$  et donnent:

$$\triangle x a m_1 = \frac{1}{2} \text{arc } xm_1 = \frac{1}{2} \triangle x o m_1$$

$$\triangle y a_1 m = \frac{1}{2} \text{arc } ym = \frac{1}{2} \triangle y o m$$

Ces angles sont égaux ; donc les angles compris entre les rayons homologues correspondants des deux faisceaux sont égaux. Nous avons dès faisceaux homographiques égaux ; donc la conique qu'ils engendrent est un cercle passant par  $a$  et  $a_1$ . D'un autre côté il est aisé de voir que ce cercle est tangent aux rayons  $oa_1$  et  $oa$ . Il en résulte maintenant que, ce cercle est complètement déterminé.

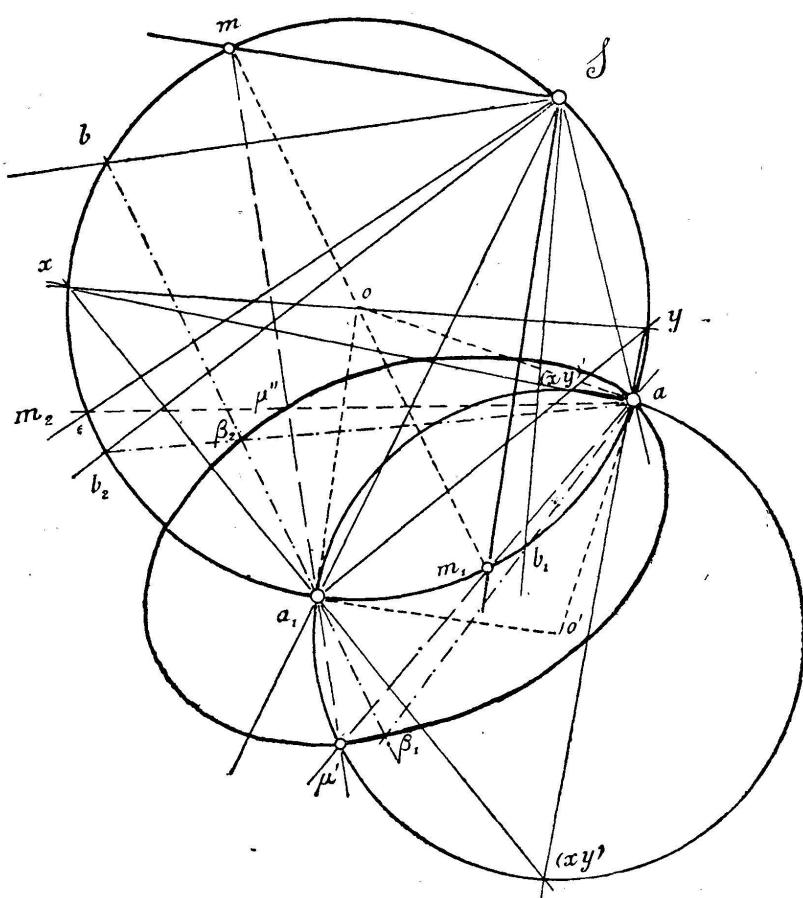


FIG. 4.

Si nous considérons de nouveau les faisceaux du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré en  $a$  et  $a_1$  ils donneront des rayons homologues passant par les extrémités d'un même diamètre quand les points de coupe de ceux-ci seront à la fois sur le cercle nouveau et sur la conique auxiliaire.

Les rayons  $a_1m$  et  $am_1$  correspondant aux rayons cherchés  $Sm$  et  $Sm_1$ , sont à la fois des rayons homologues des faisceaux homographiques égaux qui engendrent le deuxième cercle, et des rayons homologues des faisceaux du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré engendrant la conique. Il faut donc que leur point

d'intersection soit un point de coupe de ces deux courbes. En dehors de  $a$  ces courbes ont trois points de coupe dont deux peuvent être imaginaires. A ces trois points correspondent donc trois paires de points conjugués des divisions circulaires tels que les deux points d'une même paire sont sur un même diamètre. Ces points donnent à leur tour avec  $S$  les paires de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en  $S$ .

*Les faisceaux homographiques concentriques du (2 + 1)<sup>e</sup> degré ont donc trois paires de rayons rectangulaires conjugués dont deux peuvent être imaginaires.*

Constructivement on joint le point de coupe  $\mu_1$  des courbes avec  $a$  et  $a_1$ . On a  $a_1\mu_1$  et  $a\mu_1$ . La première droite donne  $\mu''$  sur la conique et  $m$  sur le premier cercle. La seconde droite donne  $m_1$  sur le même cercle ;  $m$  et  $m_1$  sont conjugués dans les divisions circulaires et appartiennent à un même diamètre. Ils donnent évidemment  $Sm$  perpendiculaire à  $Sm_1$ . Le deuxième rayon conjugué de  $Sm$  soit de  $Sm_2$  se déduit de  $\mu''$  avec  $a\mu''$  (fig. 4).

Avec la deuxième méthode de construction, les paires de rayons rectangulaires conjugués étant liées à un diamètre du cercle primitif, nous pouvons voir que les extrémités d'un diamètre, jointes à  $S$  et  $P$  engendrent deux faisceaux homographiques de sommets  $S$  et  $P$  et forment un groupe du (2 + 1)<sup>e</sup> degré. Le faisceau multiple  $a$  comme sommet  $S$  et le faisceau simple  $P$ . La courbe correspondante est une courbe du 3<sup>e</sup> degré avec  $S$  comme point double et  $P$  comme point simple. Cette courbe aura encore trois points de coupe différents de  $S$  et de  $P$  avec la conique. De chacun de ces points on pourra donc en déduire une paire de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en  $S$ . On arrive donc à la même conclusion qu'avec la méthode précédente.

### 5. Points limites.

Nous appellerons points limites de deux divisions homographiques de même base et de la (2 + 1)<sup>e</sup> classe les points conjugués du point à l'infini de la division simple ou le

point conjugué et le point lié du point de la division multiple situé à  $l_\infty$ .

Pour obtenir ces points, considérons les divisions déterminées suivant la méthode de la figure 1. (Voir fig. 5).

Nous prenons  $Sl$  parallèle à la base. Le rayon  $a_1 l$  donne  $\lambda'$  et  $\lambda''$ , sur la conique, auxquels correspondent  $a_1 l_1$  et  $a_1 l_2$ .

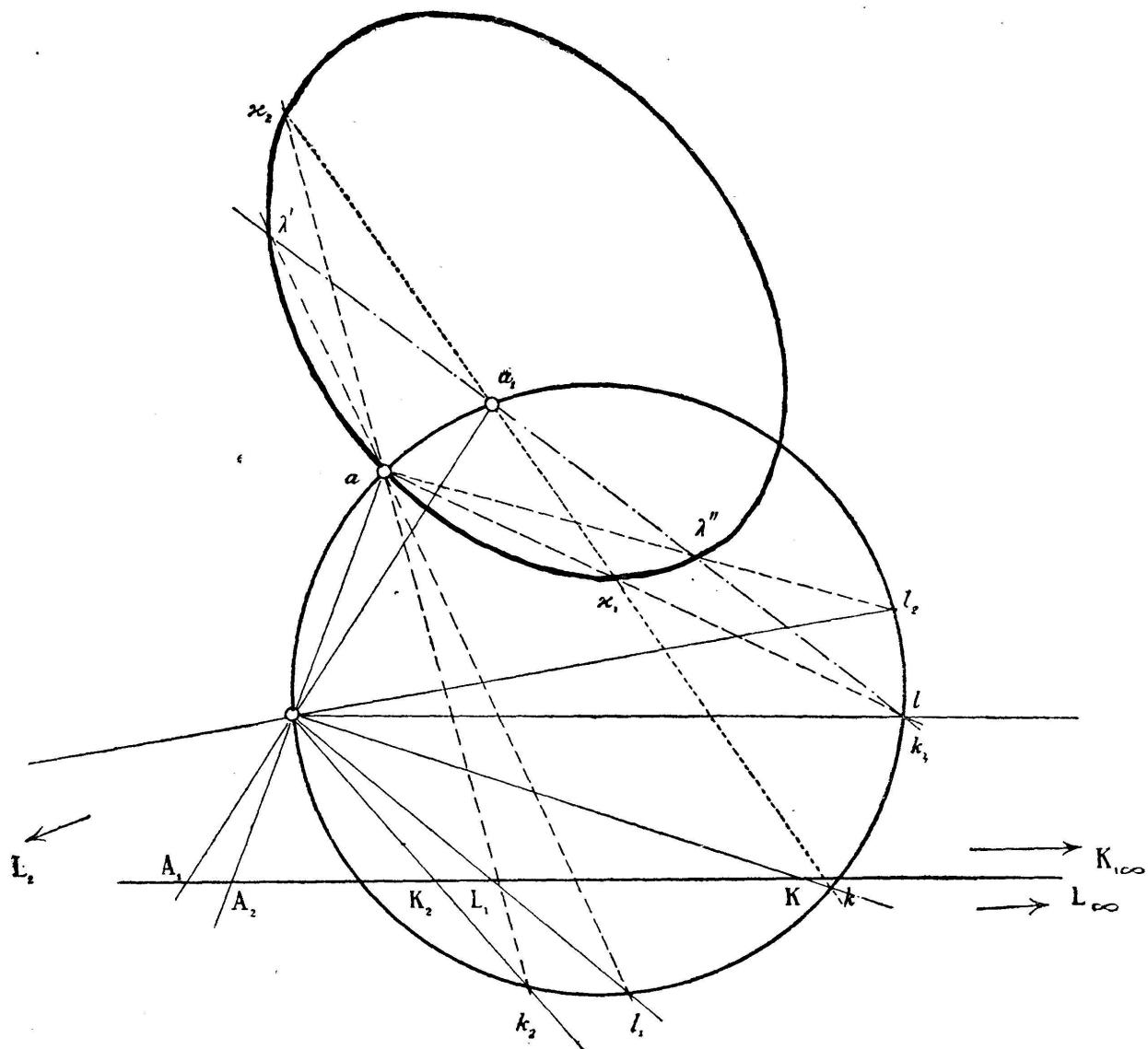


FIG. 5.

Les rayons  $Sl_1$  et  $Sl_2$  donnent  $L_1$  et  $L_2$  sur la base comme points conjugués de  $L_\infty$ .

$L_1$  et  $L_2$  forment un premier groupe de points limites. La parallèle précédente peut s'appeler  $Sk_1$ ; le rayon  $ak_1$  donne  $x_1$  sur la conique, puis  $a_1 x_1$  donne  $x_2$ , sur la conique également et  $k$  sur le cercle; la droite  $ax_2$ , donne  $k_2$  sur le cercle.

Les rayon  $Sk$  et  $Sk_1$  puis  $Sk$  et  $k_2$  sont conjugués. Ils donnent sur la base :

$K$  conjugué de  $K_{1\infty}$

$K_2$  » de  $K$  et lié à  $K_{1\infty}$

$K$  et  $K_2$  forment le 2<sup>e</sup> groupe de points limites.

### C. Remarque sur les divisions du (2 + 1)<sup>e</sup> degré, de même base.

On peut cependant développer les divisions homographiques du (2 + 1)<sup>e</sup> degré situées sur une même base, sans avoir besoin des faisceaux de même nature. Ce développement constitue la dualité du précédent et nous le résumons ici pour éviter d'allonger ce travail tout en voulant être aussi complet que possible. Chaque construction suppose évidemment une dualité.

*Première construction.* Nous donnerons les divisions au moyen des cinq paires d'éléments conjugués,  $aa_1$  ;  $aa_2$  ;  $bb_1$  ;  $cc_1$  et  $dd_1$ . Nous construirons ensuite un cercle quelconque tangent à la base  $xy$ , et par chaque point donné nous tracerons les tangentes de cercle. Toutes ces tangentes couperont d'abord la tangente  $b$  suivant une division double, puis la tangente conjuguée  $b_1$  suivant une division simple, homographique avec la première. Les tangentes issues de  $a_1 a_2 b_1 c_1 \dots$  coupent  $b$  et celles issues de  $abcd \dots$  coupent  $b_1$ . Ces deux nouvelles divisions ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$  et  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \dots$  forment un groupe de (2 + 1)<sup>e</sup> classe avec un point homologue commun  $\beta\beta_1$ . Elles engendrent donc une conique que nous pouvons construire et qui est déterminée par cinq tangentes. Par tout point  $\mu$  de  $b_1$  on a deux tangentes de la conique donnant les points homologues  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sur  $b$ . Par ces trois points, les tangentes du cercle donneront les trois points homologues des deux divisions sur  $xy$ , soient  $m$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .

Les points doubles du deuxième degré seront évidemment donnés par les points de coupe de la base simple  $b_1$  avec la conique auxiliaire. Ils peuvent être imaginaires.

Les points doubles du troisième degré proviendront des tangentes communes des deux courbes. Il y en a trois en dehors de  $b$ . Deux peuvent être imaginaires. *Toutes les coniques auxiliaires admettent ces trois tangentes du premier cercle comme tangentes communes.*

On obtiendra un point triple quand une tangente commune des courbes sera tangente à la conique par son point de coupe avec la base  $b_1$ .

Les points limites conjugués du point de l'infini de la division simple proviendront de la tangente du cercle parallèle

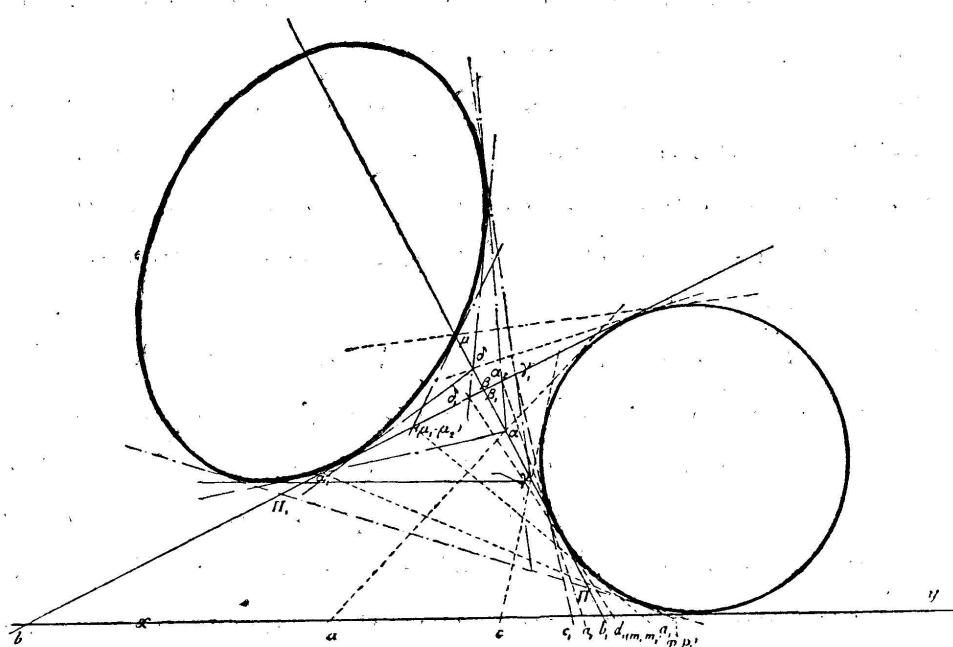


FIG. 6.

à  $xy$  et de son point de coupe avec  $b_1$ . Le point de coupe de cette même tangente avec  $b$  entraînera les points conjugués du point de l'infini sur la base double. (Voir fig. 6).

*Deuxième construction.* Celle-ci correspond au cas spécial où les éléments donnés peuvent se représenter par  $aa_1$ ;  $aa_2$ ;  $bb_1$ ;  $bb_2$ ;  $cc_1$ . On prend un cercle tangent à la base  $xy$ . Les tangentes issues par les paires  $a_1a_2$ ;  $b_1b_2$  se coupent en  $\alpha$  et  $\beta$  sur une droite qui contiendra les points de coupe des paires de tangentes analogues. La ponctuelle  $\alpha\beta\gamma$  sur cette droite est homographique avec  $abc$  et elle détermine une conique également tangente à  $xy$ . On peut

déduire les points des divisions sur  $xy$  au moyen des tangentes de cette conique. (Voir fig. 7).

Les points doubles du deuxième degré proviennent ici des points de coupe de  $\alpha\beta$  avec le cercle. Ceux du troisième degré sont donnés par les tangentes communes en dehors de

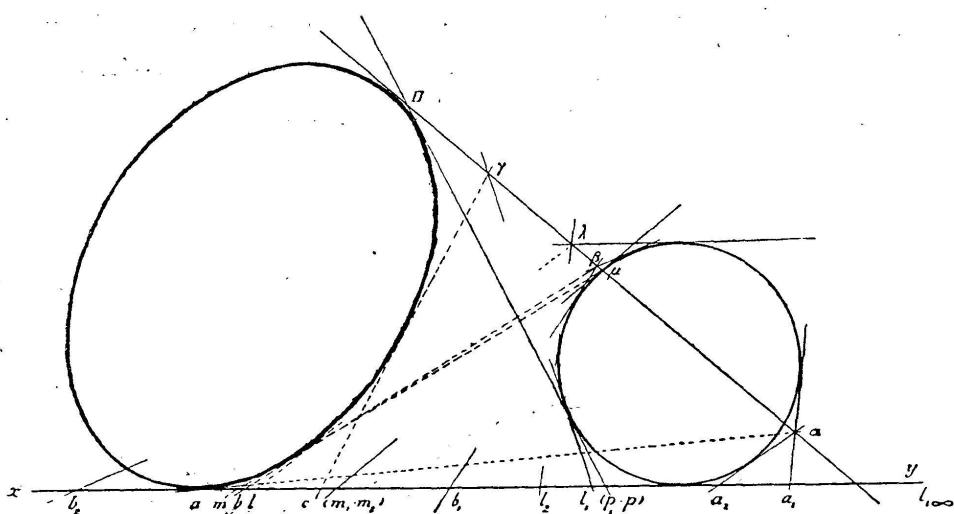


FIG. 7.

$xy$ . Toutes les coniques auxiliaires admettent quatre tangentes communes. Ce sont les trois sus-indiquées et la ligne  $\alpha\beta$ .

Les points triples et les points limites se trouvent d'une manière analogue à celle de la construction précédente.

## II

## TANGENTES ET SÉCANTES

Nous considérons une courbe du 3<sup>e</sup> degré donnée par un faisceau multiple  $S_2$  et un faisceau simple  $S_1$  constituant un groupe du (2 + 1)<sup>e</sup> degré.

Pour construire la courbe nous nous reportons à ce que nous avons écrit précédemment (*Ens. math.*, 15 nov. 06). Les faisceaux sont donnés par cinq

Nous prenons également une courbe de la 3<sup>e</sup> classe formée par une division double et une division simple constituant ensemble un groupe de la (2 + 1)<sup>e</sup> classe.

Pour construire cette courbe suivant la méthode que nous avons déjà exposée, nous considérerons les cinq paires de

paires de rayons homologues quelconques  $aa_1$ ;  $aa_2$ ;  $bb_1$ ;  $cc_1$ ;  $dd_1$ ; ceux-ci déterminent sur les rayons homologues  $d$  et  $d_1$ , les ponctuelles :

$$d; \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$$

$$d_1; \alpha \beta \gamma \delta$$

les points  $d_1$  et  $d$  sont confondus

points homologues quelconques :

$AA_1$ ;  $AA_2$ ;  $BB_1$ ;  $CC_1$ ;  $DD_1$  qui déterminent la courbe et nous joindrons les points de la division simple ABCD avec le point  $D_1$  de l'autre division, puis ceux de cette division  $A_1 A_2 B_1 C_1$  et  $D_1$  avec  $D$  l'homologue de  $D_1$ . Nous formerons ainsi deux fais-

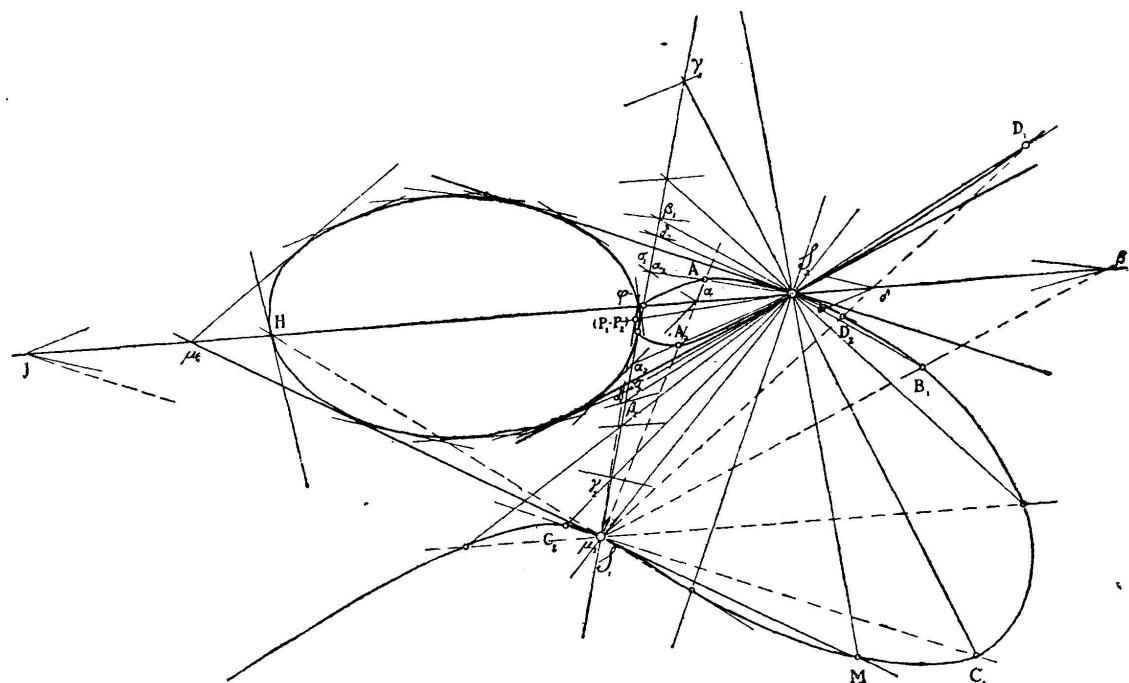


FIG. 8.

avec le point de coupe des bases  $d$  et  $d_1$ . Ces ponctuelles engendrent une conique donnée par cinq tangentes. Celles-ci sont :

$$d, \alpha_1 \alpha; \alpha_2 \alpha; \beta_1 \beta; \gamma_1 \gamma.$$

Toute tangente de la conique donne une paire de points homologues sur les bases. D'un autre côté, par tout point de  $d_1$  nous pouvons mener deux tangentes et par chaque point de  $d$  une tangente à cette courbe; donc

ceaux homologues déterminant un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré. Le rayon  $DD_1$  ou  $D_1 D$  sera un rayon homologue commun des deux faisceaux. Ils engendreront une conique déterminée par cinq points :  $D; \alpha_1; \alpha_2; \beta_1; \gamma_1$ . Ces derniers sont les points de coupe des rayons comme  $D_1 A$  et  $DA_1$  ou  $D_1 A$  et  $DA_2$ , etc.

Toute transversale de cette courbe menée par  $D_1$  donne deux rayons homologues passant par

tout point de  $d_1$  correspond à deux points de  $d$ . En joignant ces points respectivement à  $S_1$  et  $S_2$ , on obtient trois rayons appartenant au même groupement et formant deux paires de rayons homologues des divisions. Ils donnent deux points de la courbe du 3<sup>e</sup> degré. (Voir fig. 8).

### Tangentes par le point double.

Considérons  $S_2$  sur  $d_1$  et menons les deux tangentes de la co-

D et par les points de coupe. Ces rayons déterminent, les derniers deux points sur la base double et le premier un point sur la base simple. Ces trois points forment deux paires de points homologues et donnent ainsi deux tangentes de la courbe de 3<sup>e</sup> classe (Voir fig. 9).

### Points de tangence sur la tangente double.

Pour obtenir les points de tangence de la tangente double

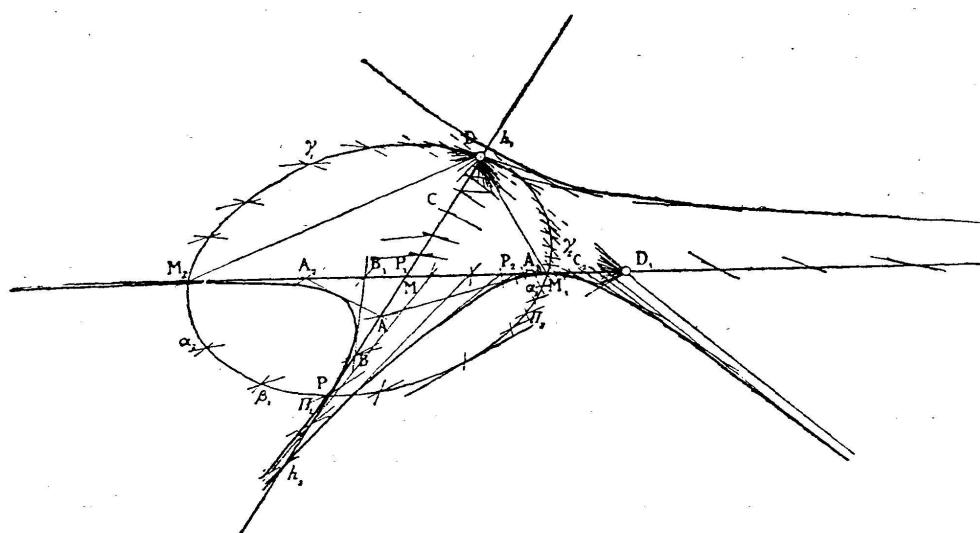


FIG. 9.

nique auxiliaire par ce point; elles donnent  $\sigma_1 \sigma_2$  sur  $d$ , comme conjuguées de  $S_2$  sur  $d_1$ . Ces tangentes sont les rayons conjugués du faisceau double correspondant au rayon  $S_1 S_2$  du faisceau simple. Le point de coupe de chaque rayon du faisceau double avec son homologue  $S_1 S_2$  est en  $S_2$ ; donc chaque rayon est une tangente

considérons-là, comme une transversale de la conique auxiliaire; issue de  $D_1$  elle donne  $M$  sur la tangente basée de la division simple; les rayons homologues par  $D$  sont  $DM_1$  et  $DM_2$  menée par les points de coupe et donnant ces points de coupe comme conjugués de  $M$ . Nous aurons les tangentes  $MM_1$  et  $MM_2$  infiniment voisines de la base double, cou-

à la courbe en  $S_2$ . On en conclut :

*Les tangentes de la conique auxiliaire menées par le sommet du faisceau double sont donc les tangentes de la courbe du 3<sup>e</sup> degré menée par le point double (fig. 8).*

pant celles-ci en  $M_1$  et  $M_2$  donc ces points sont les points de tangence de la base double. On en conclut :

*Les points de tangence de la tangente double d'une courbe de 3<sup>e</sup> classe sont les points de coupe de cette tangente avec la conique auxiliaire (voir fig. 9).*

### Tangentes par le sommet du faisceau simple.

La tangente à la conique auxiliaire menée par  $S_1$  en dehors de  $d$ , soit  $S_1\mu$  donne  $\mu$  sur  $d_1$ . Par  $\mu$  on mène encore une tangente  $\mu\mu_2$ . Le point correspondant de  $S_1\mu$  sur  $d$  est  $\mu_1$  confondu avec  $S_1$ .

Les rayons  $S_2S_1$  et  $S_2\mu_2$  sont donc comme homologues  $S_1\mu$ .

Ils donnent les points  $S_1$  et  $M$  de la courbe. Dans ces conditions  $S_1M$  a deux points confondus avec la courbe  $S_1$  et un point de coupe en  $M$ .

D'autre part les points de coupe  $J$  et  $H$  de  $d_1$  avec la conique ne donnent plus qu'une tangente par chacun de ces points. Ces tangentes donnent les points doubles de la division sur  $d$ ; en menant ainsi les rayons doubles du faisceau  $S_2$  on voit de suite que leurs points de coupe avec  $S_1J$  et  $S_1H$  donnent deux points confondus de la courbe du 3<sup>e</sup> degré sur ces droites. D'où il en résulte que  $S_1J$  et  $S_1H$  sont encore deux tangentes de la courbe du 3<sup>e</sup> degré passant par  $S_1$  mais dont les points de

### Point de tangence et points de coupe de la base de la division simple.

Le point de coupe  $P$  de la base de la division simple avec la conique auxiliaire donne la transversale  $\pi_1\pi_2D_1$ . Il en résulte les points  $P_1$  et  $P_2$  sur la base double comme conjugués de  $P$ . Le point  $P_1$  est l'intersection des deux bases et le point  $\pi_1$  est confondu avec  $P$ . La tangente  $P_1P$  infiniment voisine de la base simple, coupe celle-ci en  $P$  donc ce point  $P$  est le point de tangence de la base de la division simple avec la courbe du 3<sup>e</sup> degré. La tangente  $PP_2$  est l'autre tangente de cette courbe que l'on peut mener par  $P$ .

Par le point  $D_1$  on peut mener également deux tangentes à la conique auxiliaire. Celles-ci déterminent avec  $D$  les points doubles de la division multiple. En joignant ces points doubles avec le point de coupe de la tangente respective de la conique issue de  $D_1$  on trouve une nouvelle tangente de la courbe de 3<sup>e</sup> classe représentant deux tangen-

tangence sont en dehors de  $S_1$ .

De ce qui précède, il en résulte donc :

*La tangente de la conique auxiliaire menée par  $S_1$  est en même temps tangente de la courbe du 3<sup>e</sup> degré. Son dernier point de coupe avec cette courbe est différent de  $S_1$ .*

*Les rayons du faisceau simple conjugués respectivement aux rayons doubles du faisceau multiple  $S_2$  sont encore deux tangentes de la courbe du 3<sup>e</sup> degré passant par  $S_1$  et dont les points de tangence sont leurs points de coupe avec les rayons doubles correspondants.* (Voir fig. 8).

D'après ce qui précède, si nous connaissons dans une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double, six points de cette courbe et le point double, cette courbe est complètement déterminée, car nous pouvons prendre un des points simples comme sommet d'un faisceau simple et le point double comme sommet d'un faisceau double et former avec ces deux faisceaux un groupe du (2 + 1)<sup>e</sup> degré avec lequel nous pouvons construire toute la courbe. Ces observations jointes aux lois importantes des tangentes peuvent se résumer comme suit :

tes confondues dont le point de coupe est en  $h_1$  ou  $h_2$  ou les tangentes de la conique par  $D_1$  coupent la base simple ;  $h_1$  et  $h_2$  sont donc les autres points de coupe de la base simple avec la courbe de 3<sup>e</sup> classe et les tangentes à la courbe menée par ces points sont ces tangentes confondues.

On en conclut donc :

*Le point de coupe de la base de la division simple avec la conique auxiliaire est le point de tangence de cette base avec la courbe de 3<sup>e</sup> classe. Ses deux autres points de coupe avec elle sont les points conjugués des points doubles de la base multiple.*

*Les tangentes par ces points de coupe sont les droites qui joignent les points doubles avec leurs homologues respectifs.* (Voir fig. 9).

Dualistiquement nous pouvons dire qu'une courbe de la 3<sup>e</sup> classe à tangente double est complètement déterminée avec la tangente double et six tangentes simples, car nous pouvons prendre une des tangentes simples comme base d'une division simple et la tangente multiple comme base d'une division double, puis former un groupe de la (2 + 1)<sup>e</sup> classe avec ces deux ponctuelles. Le groupe permet de déterminer toutes les autres tangentes de la courbe. De ceci, et des lois importantes des points de tangence nous pouvons dire :

**Tangentes par un point quelconque d'une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double :**

Par un point quelconque d'une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double on peut mener trois tangentes à cette courbe.

1<sup>o</sup> La tangente dont le point de tangence est le point donné. On l'obtient en considérant le point donné comme sommet d'un faisceau simple homographique avec le faisceau double du point double et en menant de ce point la tangente encore possible à la conique auxiliaire. Cette tangente est toujours réelle et son dernier point de coupe avec la courbe facilement déterminable.

2<sup>o</sup> Les deux tangentes passant par le point considéré mais dont les points de tangence sont différents de lui. On les obtient en joignant ce point aux points de coupe de la conique auxiliaire avec la seconde base qui a servi à l'établir. Le point de tangence de ces droites est sur les rayons doubles du deuxième faisceau. Il est à remarquer que ces deux tangentes peuvent être réelles ou imaginaires ou confondues.

Nous pouvons donc ajouter, puisque par chaque point de la courbe on peut lui mener trois tangentes :

**Points de coupe d'une tangente quelconque d'une courbe de 3<sup>e</sup> classe à tangente double avec cette courbe :**

Une tangente simple quelconque d'une courbe de 3<sup>e</sup> classe à tangente double possède trois points de coupe avec celle-ci. Ce sont :

1<sup>o</sup> Son point de tangence avec la courbe. On l'obtient en considérant la tangente donnée comme base d'une ponctuelle simple homographique avec celle de la tangente double et qui est une ponctuelle double. Le point de coupe de cette droite avec la conique auxiliaire, différent du point de départ donne ce point de tangence.

Ce point est toujours réel, et par ce même point il existe une seconde tangente que l'on sait déterminer.

2<sup>o</sup> Les autres points communs à la courbe de 3<sup>e</sup> classe et à la tangente considérée sont les points de coupe de cette tangente avec les deux tangentes de la conique auxiliaire menée par le sommet du faisceau double relatif à celle-ci.

Les tangentes en ces points sont les droites qui les joignent aux points doubles de la ponctuelle sur la tangente double. Il est à remarquer que ces deux derniers points de coupe de la tangente simple avec la courbe peuvent être réels ou imaginaires et dans un cas limite confondus.

Nous pouvons donc dire que

*La courbe du troisième degré à point double est une courbe de la quatrième classe.*

### Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire dépend comme on l'a vu des deux rayons homologues sur lesquels on prend les bases.

*Toutes les coniques auxiliaires ont donc trois tangentes communes avec la courbe du troisième degré. Ce sont les deux tangentes par le point double et la tangente avec son point de tangence au sommet du faisceau simple.*

Le rayon du faisceau simple sur lequel on prend la division double auxiliaire est également une tangente de cette conique. Son point de tangence est aussi son point de coupe avec son second rayon conjugué. C'est donc un point de la courbe du troisième degré. La conique auxiliaire correspondant à ce même rayon et à son autre rayon conjugué aura comme point de tangence sur le rayon dont nous causons, le point de coupe avec le premier rayon conjugué. Il est à remarquer que cette conique et la précédente auraient alors quatre tangentes communes.

chaque tangente simple a quatre points communs déterminés avec la courbe :

*Une courbe de la troisième classe à tangente double est une courbe du quatrième degré.*

### Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire relative aux courbes de classe dépend des faisceaux construits par les points homologues  $D_1$  et  $D$ .

*Toutes les coniques auxiliaires auront donc trois points communs avec la courbe de la troisième classe. Ce sont les deux points de tangence de la tangente double et le point de tangence de la tangente utilisée comme base simple.*

Le sommet  $D$  du faisceau double auxiliaire est également sur la conique. La tangente menée par ce point donne son deuxième conjugué  $D_2$  sur la base double. C'est donc une tangente de la courbe de troisième classe.

La conique auxiliaire correspondant aux faisceaux de sommets  $D$  et  $D_2$  passera également par  $D$ , mais cette conique aurait comme tangente en  $D$  la droite  $DD_2$ , tangente de la courbe de troisième classe. Comme précédemment nous pouvons dire que ces deux coniques auxiliaires ont alors quatre points communs.

**Intersection d'une droite quelconque avec une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double.**

Toute droite coupant les deux faisceaux d'un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré dont dépend la courbe considérée du troisième degré à point double, rencontre ces faisceaux suivant deux divisions du  $(2 + 1)^e$  degré situées sur la même base et homographiques l'une à l'autre.

Les points de coupe avec les cinq paires de rayons homologues donne cinq paires de points, également homologues et suffisants pour déterminer les ponctuelles.

Chaque point de coupe de la transversale avec la courbe correspond évidemment à deux points homologues confondus des divisions de même base. Ces points homologues sont les points doubles du troisième degré des ponctuelles à base commune. Comme elles ont trois de ces points possibles, nous en concluons que toute droite à trois points de coupe avec la courbe du troisième degré à point double, et ceux-ci peuvent être déduits des cinq paires de points homologues fondamentaux d'après les méthodes que nous avons indiquées.

**Autres constructions.**

La courbe du troisième degré

**Tangentes d'une courbe de 3<sup>e</sup> classe à tangente double menées par un point quelconque.**

En joignant tous les points des deux ponctuelles formant un groupe de la  $(2 + 1)^e$  classe dont dépend la courbe considérée, de la 3<sup>e</sup> classe à tangente double, avec un point quelconque, on forme évidemment deux faisceaux concentriques du  $(2 + 1)^e$  degré, homographiques l'un à l'autre.

Les cinq paires de points homologues donnés entraînent cinq paires de rayons homologues des faisceaux, au moyen desquelles on peut complètement déterminer ceux-ci.

Toute tangente de la courbe passant par le point considéré correspond évidemment à deux rayons homologues confondus des faisceaux concentriques. Ces rayons sont les rayons doubles du troisième degré des faisceaux. Ceux-ci ont trois de ces rayons possibles, d'où nous en concluons que par un point quelconque on peut mener trois tangentes à une courbe de la 3<sup>e</sup> classe à tangente double et ces tangentes peuvent être déduites des cinq paires de rayons fondamentaux des faisceaux concentriques. Il est bon de remarquer que deux tangentes peuvent être imaginaires et dualistiquement deux points de coupe dans l'autre courbe aussi.

**Autres constructions.**

Les ponctuelles qui engen-

et les tangentes dont nous caisons peuvent être construites encore d'une autre manière.

Si les éléments donnés sont :  $S_1a = S_2a_1$ ;  $S_1a = S_2a_2$ ;  $S_1b = S_2b_1$ ;  $S_1b = S_2b_2$ ; et  $S_1c = S_2c_1$  le faisceau double en  $S_2$  contient deux paires de rayons et comme il forme une involution, on peut le couper par une circonference arbitraire passant par  $S_2$ . Les

drivent la courbe de 3<sup>e</sup> classe que nous considérons, peuvent être données par les points :

$$aA_1aA_2; bB_1bB_2 \text{ et } cC_1.$$

La ponctuelle  $A_1A_2B_1B_2$  dont chaque paire est homologue des points  $abc \dots$  forme comme nous le savons une involution. Cette involution peut être construite avec un cercle auxiliaire

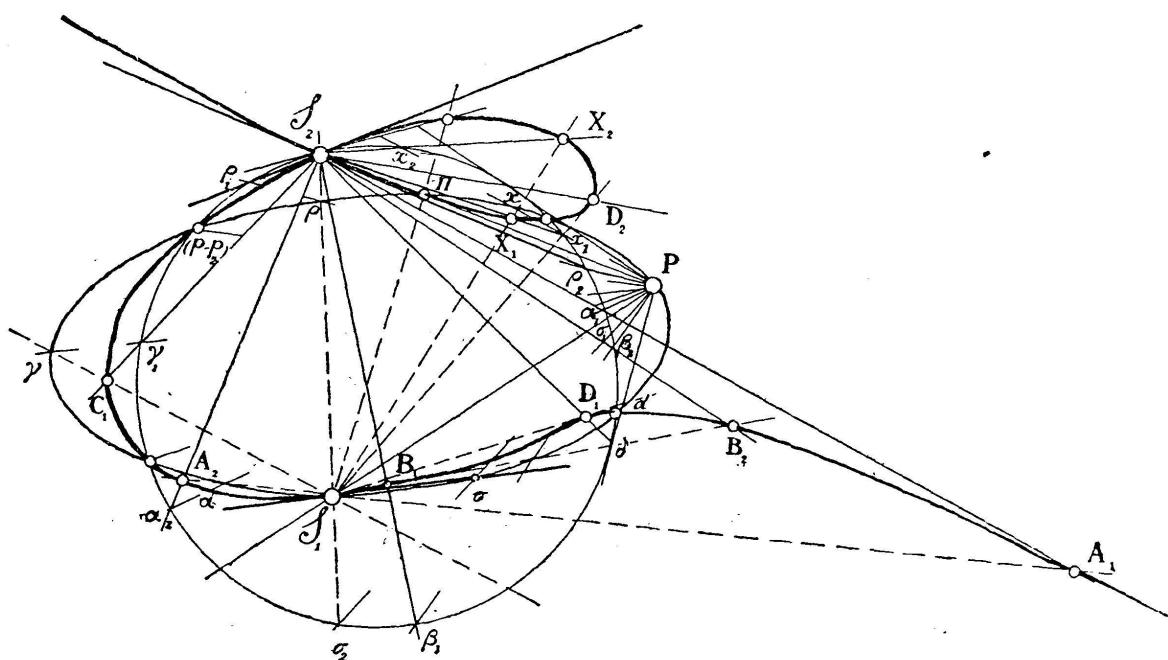


FIG. 10.

points de coupe des rayons, soient  $a_1a_2; b_1b_2; \dots$  donnent un faisceau de sommet P, dont chaque rayon correspond à une paire de l'involution en  $S_2$ . Le faisceau simple de sommet  $S_1$  devient ainsi homographique avec le faisceau simple de sommet P et ils engendrent une conique. Cette courbe est donnée par cinq points.

On peut construire toutes les autres paires d'éléments homologues des faisceaux primitifs

tangent de la base double. Les tangentes de ce cercle par les points correspondants de l'involution donnent d'autres points de coupe  $\alpha\beta\gamma\dots$  situés sur une même droite et forment une ponctuelle sur celle-ci. Cette ponctuelle est homographique avec la ponctuelle simple  $abc\dots$  Elles engendrent donc ensemble une conique dont elles donnent les cinq tangentes fondamentales.

Toute tangente à la conique

au moyen de transversales menées par  $P$ . Chaque transversale donne trois points dont deux  $x_1$  et  $x_2$  sur le cercle et un sur la conique  $x$ . Les premiers joints à  $S_2$  et le dernier à  $S_1$  forment les rayons  $S_2x_1$  et  $S_2x_2$  homologues de  $S_1x$ . (Voir fig. 10.)

auxiliaire menée par un point  $\xi$  de  $\alpha\beta$  donne  $x$  sur la base simple. Les tangentes au cercle menées par  $\xi$  donnent  $X_1$  et  $X_2$  sur la base double comme points conjugués de  $x$ . Les droites  $xX_1$  et  $xX_2$  sont ainsi de nouvelles tangentes de notre courbe de la troisième classe à tangente double. (Voir fig. 11.)

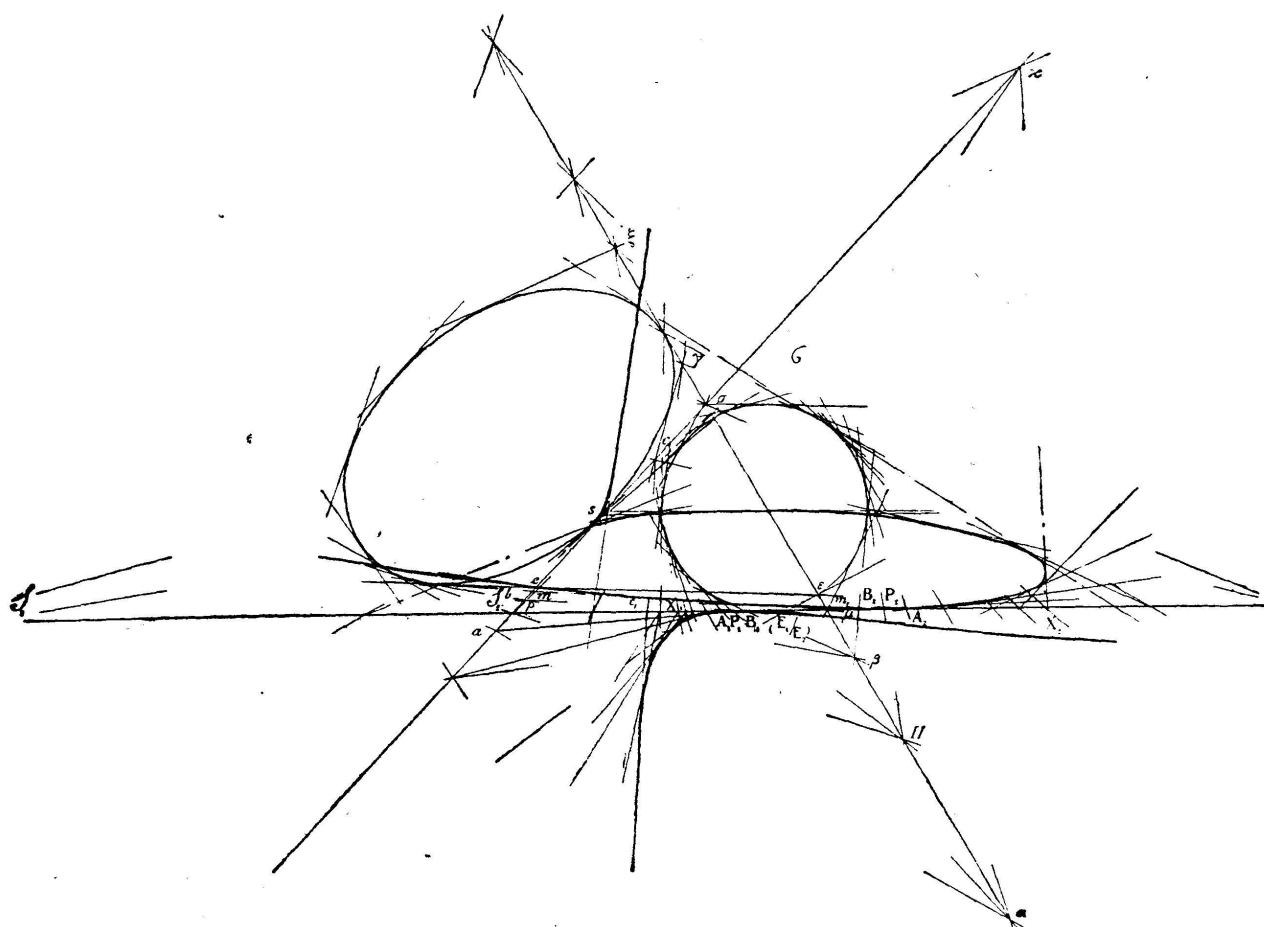


FIG. 11.

Pour obtenir les tangentes par le point double, considérons  $S_1S_2$  du faisceau simple donnant  $q$  sur la conique,  $Pq$  sera l'homologue dans le faisceau  $P$ . Celui-ci donnera  $q_1$  et  $q_2$  sur le cercle; donc  $S_2q_1$  et  $S_2q_2$  seront les rayons homologues de  $S_1S_2$  dans le faisceau  $S_2$ .

Ce seront les tangentes de la

Les points de tangence de la tangente double seront ses points de coupe avec les tangentes infiniment voisines ou autrement dit les points conjugués sur la base double du point de coupe  $p$  des deux bases. Ce seront  $P_1$  et  $P_2$ . C'est la tangente  $p\pi$  de la conique qui donne  $\pi$  sur  $\alpha\beta$ , duquel on mène deux

courbe du troisième degré par le point double.

On obtient la tangente en  $S_1$  au moyen du rayon  $S_2S_1$ , donnant  $\sigma_2$  sur le cercle;  $P\sigma_2$  donne encore  $\sigma_1$  et  $\sigma$ . Le rayon  $S_1\sigma$  est ainsi l'homologue des rayons  $S_2S_1$  et  $S_2\sigma_1$ . C'est la tangente de la courbe en  $S_1$ .

Les rayons doubles de l'involution en  $S_2$  résultent des tangentes du cercle par  $P$ ; —  $P\delta$  est une de ces tangentes. Elle donne  $d$  sur la conique;  $S_1d$  est son rayon conjugué en  $S_1$  ou le rayon homologue des rayons doubles du faisceau  $S_2$ . Le point de coupe de ces rayons, soit  $D_1$ , montre que  $S_1d$  ou  $S_1D_1$  a deux points de coupe avec la courbe confondus en  $D_1$ . C'est donc une tangente de cette courbe en  $D_1$  et passant par  $S_1$ . L'autre tangente par  $S_1$  correspond au point de tangence  $D_2$ .

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre points de coupe pouvant être imaginaires deux à deux. Ces points sont aussi les points de coupe de deux rayons homologues comme  $S_1p$  et  $S_2p_2$ . Ils sont donc des points de la courbe du troisième degré. Cette courbe peut avoir six points communs avec la conique. Le cinquième est  $S_1$  puis le sixième qui doit toujours être réel est donné par le point de coupe du rayon  $S_2P$  avec son homologue  $S_1\pi$ . Le rayon  $S_1\pi$  a encore un point sur la courbe, c'est son intersection avec la tan-

tangentes au cercle :  $\pi P_1$  et  $\pi P_2$ .

Le point de tangence de la base simple est un point  $s$  conjugué des points  $S_1$  et  $S_2$  de la base double.  $S_1$  étant le point de coupe des deux bases. La tangente du cercle par  $S_1$  soit  $S_1\sigma$  donne  $\sigma$  sur  $\alpha\beta$ . De ce point on mène une tangente au cercle pour avoir  $S_2$  et une à la conique pour obtenir  $s$ .

Les points doubles de l'involution  $A_1A_2B_1B_2\dots$  proviennent des points de coupe de  $\alpha\beta$  avec le cercle. Leurs homologues sur la base simple sont les points de coupe de celle-ci avec la courbe de la troisième classe. En outre la tangente menée par un point double et son homologue représentent deux tangentes confondues se coupant dans le point de la base simple. Il en résulte donc que ce point de la base simple est le point de contact de cette tangente.

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre tangentes communes pouvant être imaginaires deux à deux. Ces tangentes sont également des tangentes de la courbe de 3<sup>e</sup> classe. Celle-ci peut en avoir six qui lui sont communes avec la conique auxiliaire. La base simple  $abc\dots$  est une cinquième tangente commune. La sixième sera donc toujours réelle. Si nous considérons la droite  $\alpha\beta$ , elle coupe la base double en  $m_1$  ou  $\mu$  le conjugué sur cette base est  $m_2$ , le point de tangence du cercle auxiliaire et le conjugué sur la

gente du cercle en  $S_2$ . (Voir fig. 10).

La conique auxiliaire dépend du cercle primitivement tracé. Si on laisse le sommet  $S_1$  du faisceau simple se déplacer sur la courbe du 3<sup>e</sup> degré la conique auxiliaire change, mais passe toujours par les quatre points de coupe du cercle avec la courbe, autres que  $S_2$ .

base simple est  $m$ . La tangente  $mm_1$  de la conique est en même temps tangente de la courbe de 3<sup>e</sup> classe. C'est la sixième tangente considérée. (Voir fig. 11.)

La conique auxiliaire dépend du cercle. Si on choisit une autre tangente simple que celle qu'on a prise la conique change aussi mais conserve toujours les quatre mêmes tangentes communes avec le cercle et la courbe de 3<sup>e</sup> classe.

### III

## ASYMPTOTES ET TANGENTES PARALLÈLES

*Asymptotes des courbes du 3<sup>e</sup> degré à point double..*

Le problème des asymptotes de ces courbes comprendra deux parties. D'abord on établira la direction des points à l'infini, et en second lieu on déterminera les tangentes par ces points.

Les points à l'infini proviendront de rayons homologues parallèles. Pour avoir leur direction, menons en  $S_2$  des rayons parallèles à ceux de  $S_1$ . Nous formerons ainsi deux faisceaux concentriques homographiques du (2 + 1)<sup>e</sup> degré. Les rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré de ces faisceaux correspondront aux rayons homologues parallèles.

*Tangentes et points de tangence des courbes de 3<sup>e</sup> classe parallèlement à une direction donnée.*

Ce problème se compose également de deux parties. Il faut en premier lieu trouver les tangentes en direction puis en second lieu déterminer les points de tangence.

La courbe sera donnée dans la fig. 12, par les cinq paires de tangentes  $A_1a - B_1b - C_1c - D_1d - E_1e$ .

La direction de la ou des tangentes parallèles est donnée par  $xx'$ . Nous en sommes ramenés à chercher les tangentes de la courbe pour le point à l'infini sur cette direction. On joint les points des deux ponctuelles avec ce point. On forme ainsi des

Dans la fig. 12 la courbe est donnée par les faisceaux en  $S_2$  et  $S_4$  correspondant aux cinq points ABCDE.

Les parallèles en  $S_2$  aux rayons de  $S_4$  sont désignées par 1, 2, 3, 4 et 5. Les faisceaux concentriques en  $S_2$  ont donné un rayon double du 3<sup>e</sup> degré  $kk$ . Celui-ci donne donc une direction asymptotique de la courbe.

Nous obtiendrons maintenant l'asymptote correspondante en formant un nouveau faisceau simple dont le sommet est à l'infini sur la direction  $kk$  et dont les rayons passent par les points de la courbe ABCDE.

Le rayon V par E de ce faisceau coupera les rayons du faisceau  $S_2$  en cinq points. Le rayon  $e_1$  du faisceau  $S_2$  coupera les parallèles en cinq autres points homologues des premiers. La ponctuelle sur V. E sera une ponctuelle double ; celle sur  $e_1$  une ponctuelle simple homographique avec la première. Ensemble elles engendrent une conique qui peut servir de conique auxiliaire pour la courbe du 3<sup>e</sup> degré.

*La tangente de cette conique menée par le sommet  $M_\infty$  du faisceau simple sera comme nous l'avons vu antérieurement la tangente de la courbe du 3<sup>e</sup> degré par  $M_\infty$ . Ce sera donc une*

faisceaux homographiques concentriques du (2 + 1)<sup>e</sup> degré ou sur la base double, des divisions homographiques formant un groupe de la (2 + 1)<sup>e</sup> classe. Les points doubles du 3<sup>e</sup> degré de ces divisions correspondent aux rayons de même nature des faisceaux de rayons parallèles et donnent ainsi les tangentes parallèles à la direction considérée.

Par M dans la fig. 12, nous avons une de ces tangentes. Sa construction étant développée par des méthodes connues.

Nous considérons ensuite la division simple déterminée sur la nouvelle tangente par les tangentes de la courbe de 3<sup>e</sup> classe issues des points de la ponctuelle double. Ce sont I, II, III, IV et V. En prenant deux points homologues  $C_1$  et III comme sommets de deux faisceaux auxiliaires

$$\text{III}(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1; \dots)$$

et

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}, \mathbf{IV}, \mathbf{V} \dots)$$

formés avec les ponctuelles, nous obtenons une conique donnée par cinq points 1, 2, 3, 4 et 5. Cette conique auxiliaire peut servir à la construction de la courbe de 3<sup>e</sup> classe.

*Le point de cette conique avec la tangente simple ( $T_g$ ) menée parallèlement à la direction xx' sera comme nous le savons le point de tangence de la droite avec la courbe de 3<sup>e</sup> classe.*

*asymptote.* Elle est marquée (As).

Comme on connaît cinq tangentes de la conique auxiliaire considérée et la direction de la sixième, on peut construire celle-ci par le théorème de

Ce point est marqué P. Nous avions donc cinq points de la conique et la direction passant par le sixième. Nous avons cherché celui-ci par le théorème de

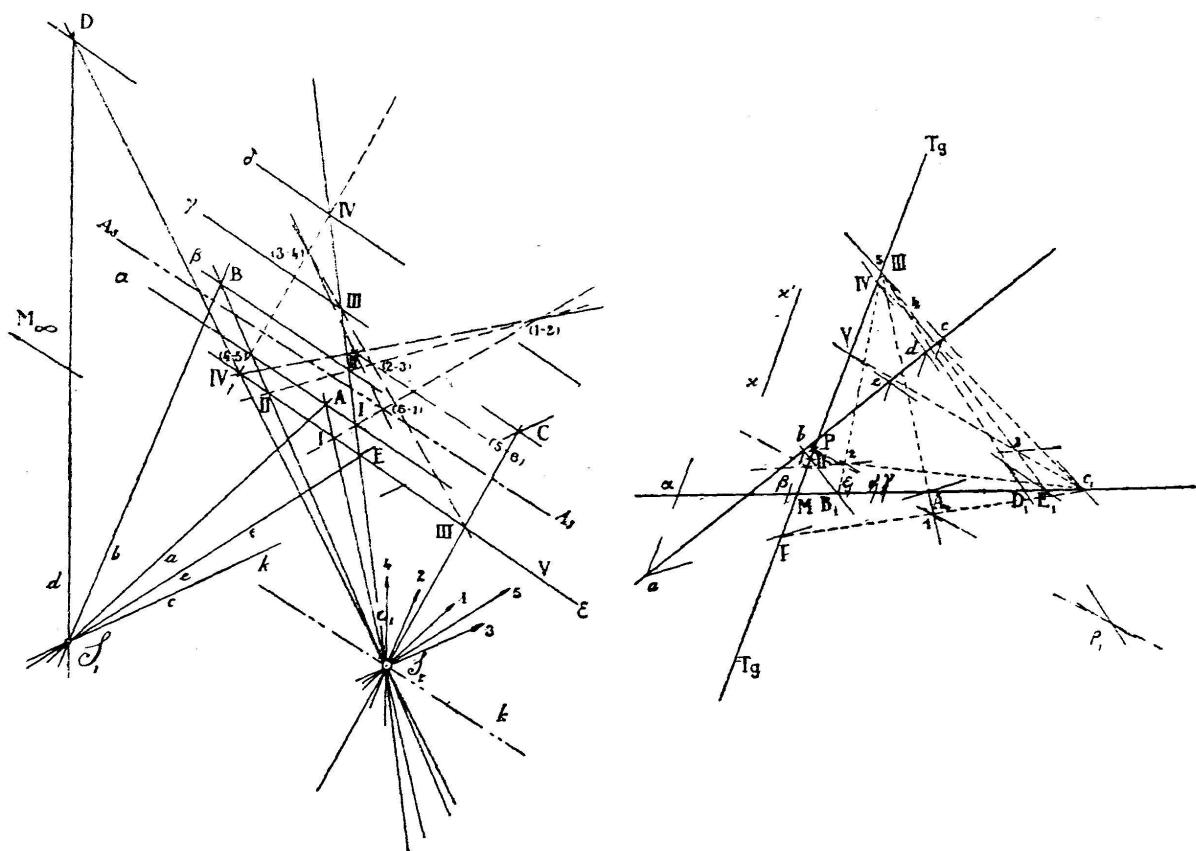


FIG. 12.

Brianchon sans tracer la conique.

Il ressort de ce qui précède que la courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double a trois asymptotes dont deux peuvent être imaginaires.

Pascal sans construire la conique.

Il est donc évident d'après ces observations qu'il y a trois tangentes de la courbe de la troisième classe parallèles à la direction donnée. Deux d'entre elles peuvent être imaginaires.

L. CRELIER (Bienne).