Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSTRUCTIONS SYNTHÉTIQUES RELATIVES A CERTAINES COURBES DU 3e DEGRÉ ET DE LA 3e CLASSE

Autor: Crelier, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10965

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de groupes analogues aux précédents, mais formés de faisceaux concentriques ou de ponctuelles situées sur une même base. En conséquence, nous étudierons d'abord ces cas spéciaux des groupes sus-mentionnés de la même manière que les ouvrages classiques[1] développent la théorie des faisceaux homographiques concentriques simples et des ponctuelles homographiques simples et de même base.

I

GÉNÉRALITÉS

Faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ *degré.*

Nous appellerons faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré deux faisceaux formant un groupe du $(2+1)^e$ degré et issus du même sommet.

Comme dans le cas général, deux de ces faisceaux seront évidemment déterminés dès que nous connaîtrons cinq paires de rayons homologues quelconques.

Divisions homographiques de même base de la $(2+1)^e$ *classe.*

Nous appellerons divisions ou ponctuelles homographiques de même base, de la $(2+1)^e$ classe deux ponctuelles formant un groupe de la $(2+1)^e$ classe et situées sur la même base.

Deux ponctuelles de cette nature seront déterminées également dès que nous aurons cinq paires de points homologues quelconques.

D'après les définitions que nous avons adoptées pour les groupes, il en résulte que toute transversale détermine, sur deux faisceaux concentriques ou non du $(2+1)^e$ degré, deux ponctuelles de la $(2+1)^e$ classe *de même base*. En sachant donc construire deux faisceaux concentriques de cette nature, nous pourrons en déduire, à priori, deux divisions analogues de même base et inversement. Dans ces conditions nous n'aurons qu'à développer les constructions relatives aux faisceaux sans avoir besoin d'une partie dualistique pour les divisions.

---

[2] W. Fiedler : *Die darstellende Geometrie.* — T. Reye : *Die Geometrie der Lage.* — R. Böger : *Ebene Geometrie der Lage.*

A. Construction de deux faisceaux concentriques du (2 + 1)e degré.

Les faisceaux sont donnés par les paires, Sa ; Sa_1 — Sb ; Sb_1 — Sc ; Sc_1 — Sd ; Sd_1 — Se ; Se_1. Il reste bien entendu que chaque rayon a, b, c ... du faisceau simple correspond à 2 rayons a_1 et a_2 — b_1 et b_2 ... du faisceau multiple ; par contre chaque rayon de celui-ci ne correspond qu'à un du premier. (Fig. 1.)

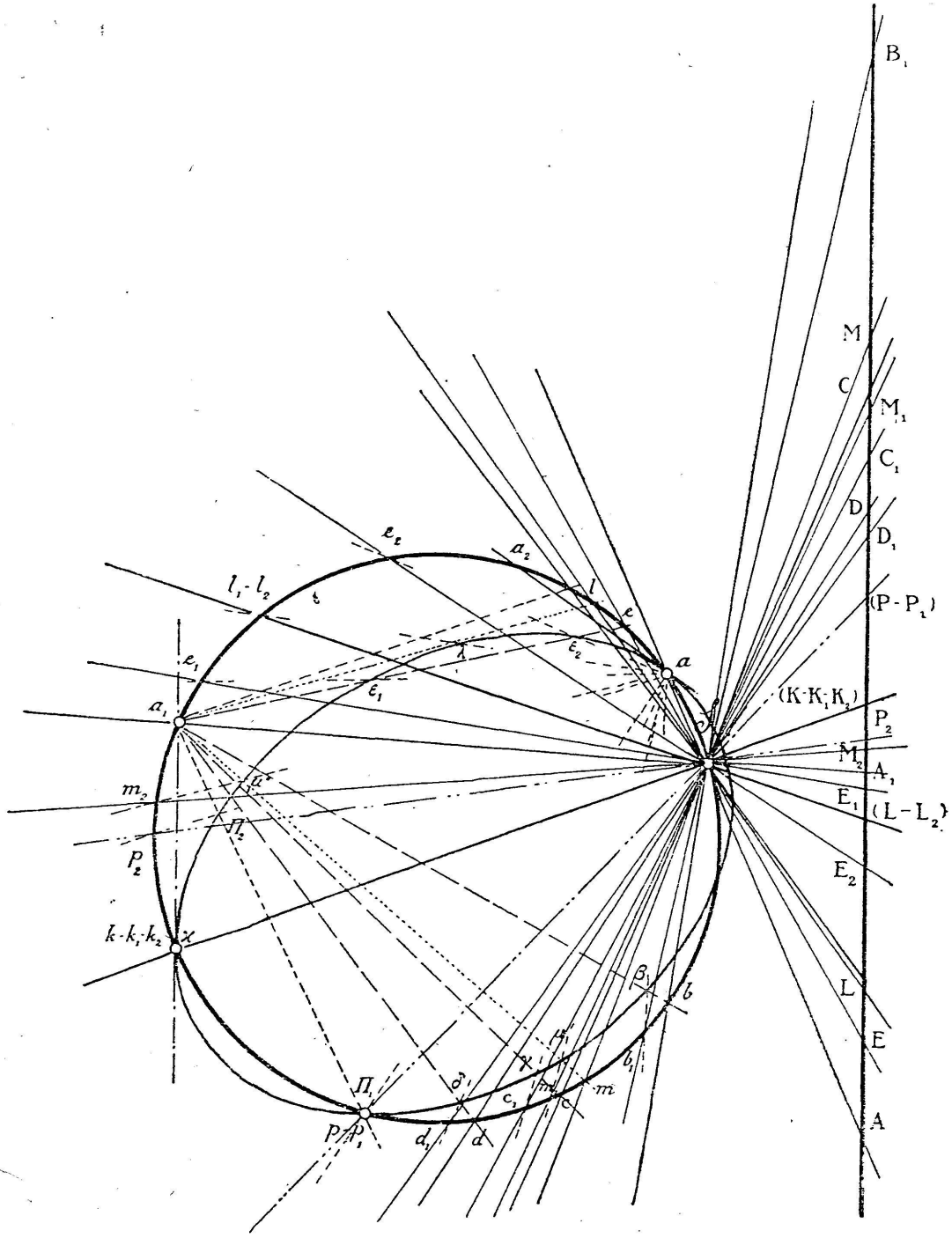

Fig. 1.

Nous coupons ensuite le groupe par une circonférence arbitraire mais passant par le sommet S. Les points de coupe des rayons avec la circonférence forment deux divisions circulaires homographiques du $(2+1)^e$ ordre. Celles-ci sont déterminées par les points : aa_1 — bb_1 — cc_1 — dd_1 et ee_1. Les points de la division simple sont : $abcde$ et ceux de l'autre sont : $a_1b_1c_1d_1e_1$. Nous joignons maintenant tous les points de la division multiple avec a et tous ceux de la division simple avec a_1. De cette manière, et dans le sens où nous avons défini les groupes du $(2+1)^e$ degré, nous obtenons deux faisceaux homographiques de sommet a et a_1 formant un groupe du $(2+1)^e$ degré, et possédant un rayon homologue commun aa_1. D'après notre théorème, le lieu de points de coupe des rayons homologues est une conique passant par les points :

1. a sommet du faisceau multiple.
2. β point de coupe de a_1b avec ab_1.
3. γ » » a_1c » ac_1.
4. δ » » a_1d » ad_1.
5. ε_1 » » a_1e » ae_1.

Cette conique peut être entièrement construite au moyen de ces cinq points et elle nous permettra de déterminer tous les autres rayons du groupe de sommet S. Si nous voulons obtenir deux rayons conjugués quelconques Sm et Sm_1 ou Sm et Sm_2 nous menons par a_1 une transversale qui coupe la conique en μ' et μ''. Nous joignons $a\mu'$ et $a\mu''$ qui sont les homologues de la transversale dans les faisceaux auxiliaires de sommets a et a_1. Ces trois droites $a_1\mu'\mu''$ — $a\mu'$ — $a\mu''$ déterminent respectivement sur le cercle les points m, m_1 et m_2 constituant deux paires de points conjugués des divisions circulaires. Les rayons cherchés sont ainsi Sm, Sm_1 et Sm_2.

En faisant tourner la transversale autour de a_1 et en joignant les points de coupe sur la conique avec a nous obtenons ainsi tous les rayons des faisceaux de sommets a et a_1. Ceux-ci déterminent à leur tour tous les points des divisions circulaires et partant tous les rayons du groupe concentrique en S du $(2+1)^e$ degré.

Si nous considérons en particulier une des paires de rayons

donnés, soit Se ; Se_1 nous voyons qu'il existe un deuxième rayon Se_2 du faisceau multiple également conjugué de Se. Pour l'obtenir menons la droite $a_1\varepsilon_1$ qui donne encore ε_2, sur la courbe ; $a\varepsilon_2$, donne e_2 sur le cercle et de celui-ci on déduit aisément Se_2. (Fig. 1.)

Si nous avions eu des divisions à déterminer au lieu de

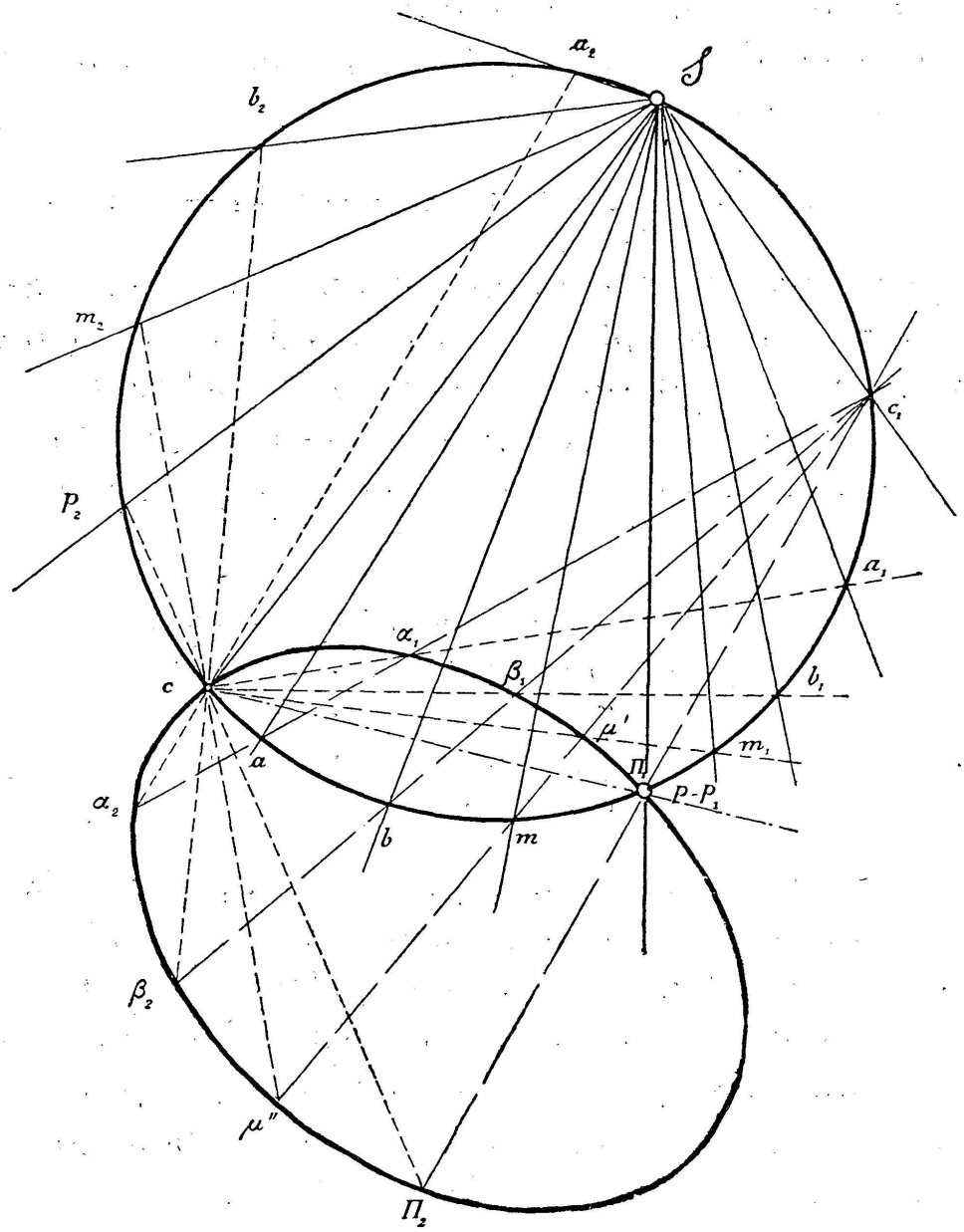

FIG. 2.

faisceaux, nous aurions joint les cinq paires de points homologues donnés AA_1 — BB_1 — CC_1 — DD_1 — EE_1 avec un point arbitraire S de manière à former un groupe de deux faisceaux comme les précédents. Nous aurions ensuite achevé la construction des rayons de ces faisceaux, comme il vient d'être dit, et chaque paire nouvelle de rayons homologues

aurait donné la paire correspondante de points homologues sur la base commune. (Fig. 1.)

Cas spécial. Quand les rayons donnés des faisceaux du $(2+1)^e$ degré sont tels que deux paires du faisceau multiple sont complètes avec chacune leur rayon conjugué du faisceau simple, on peut également appliquer la construction précédente, ou utiliser une autre conique.

Si nous considérons la fig. 2, les paires de rayons homologues donnés sont :

$$Sa \; ; \; Sa_1 - Sa \; ; \; Sa_2 - Sb \; ; \; Sb_1 - Sb \; ; \; Sb_2 - Sc \; ; \; Sc_1 \, .$$

Les paires Sa_1 et Sa_2 conjuguées à Sa, puis Sb_1 et Sb_2 conjuguées à Sb sont complètes. On peut utiliser les points c et c_1 pris sur la circonférence comme sommets des faisceaux auxiliaires et former un groupe du $(2+1)^e$ degré. Ce groupe donne naissance à une conique dont nous avons également cinq points. Ce sont :

1. c sommet du faisceau multiple.
2. α_1 sur ca_1 et c_1a.
3. α_2 » ca_2 » c_1a.
4. β_1 » cb_1 » c_1b.
5 β_2 » cb_2 » c_1b.

Les paires de rayons conjugués $Sm\,Sm_1$ et $Sm\,Sm_2$ sont ensuite déterminées comme précédemment. (Fig. 2.)

Autre construction. Nous savons également que les rayons du faisceau multiple sont liés deux à deux et qu'ils forment une involution. Nous pouvons considérer le groupe du $(2+1)^e$ degré comme formé d'un faisceau simple, homographique avec une involution du 2e degré et de même sommet. En coupant le groupe par un cercle passant par S, nous pouvons rappeler que les sécantes joignant les points correspondants de l'involution circulaire ainsi obtenue, forment un faisceau concentrique de sommet P. (Fig. 3.) Chaque rayon de ce faisceau correspond à un rayon du faisceau simple en S. Nous avons ainsi deux nouveaux faisceaux homographiques simples de sommets S et P qui engendrent une conique.

Les éléments donnés sont : Sa ; $Sa_1 - Sa$; $Sa_2 - Sb$; Sb_1

— Sb ; Sb_2 — Se ; Se_1. Les transversales $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$ donnent le point P.

Le rayon	P$a_1 a_2$	est conjugué de	Sa	et donne	α	de la conique auxiliaire.	
»	P$b_1 b_2$	»	Sb	»	β	»	»
»	Pc_1	»	Sc	»	γ	»	»

Les points P et S sont encore deux points de cette conique, laquelle est ainsi complètement déterminée.

En laissant une sécante mobile tourner autour de P, elle donnera sur la conique un point v et sur la circonférence les

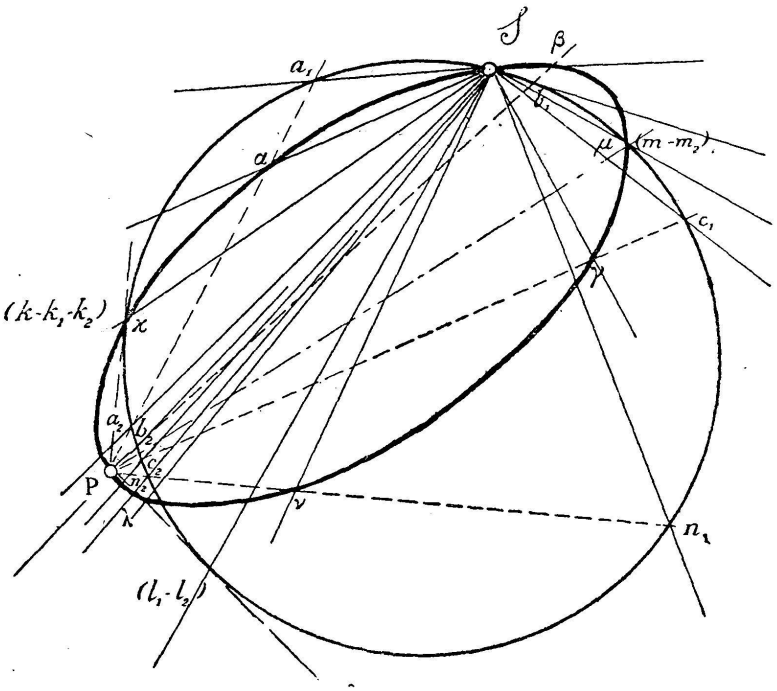

Fig. 3.

points n_1 et n_2. Au premier correspond le rayon Sn ou Sv et aux autres les rayons Sn_1 et Sn_2 tous deux conjugués du premier. Les diverses positions de cette sécante donneront ainsi toutes les paires de rayons homologues des deux faisceaux concentriques du $(2 + 1)^e$ degré. Cette construction relative à des données spéciales est également applicable aux divisions du $(2 + 1)^e$ degré situées sur une même base.

Remarque. Les points correspondants de la division multiple circulaire comme m_1 et m_2 ou e_1 et e_2 que nous avons déjà trouvés dans la première construction forment évidemment la même involution que dans la deuxième construction

et comme pour ce dernier cas ils sont situés sur des transversales concourantes en un point P.

B. Points et rayons particuliers.

1. *Rayons doubles du 2e degré.*

Nous désignerons sous ce nom les rayons Sl_1 et Sl_2 du faisceau multiple qui tombent ensemble mais qui restent différents de leur conjugué l du faisceau simple.

1. *Points doubles du 2e degré.*

Nous entendons par points doubles du 2e degré deux points comme L_1 et L_2 de la division multiple, qui sont confondus mais qui restent différents de leur homologue L de la division simple.

Dans la fig. 1 ces rayons sont donnés par les tangentes de la conique auxiliaire issues de a_1. On joint le point de tangence λ avec a pour obtenir les points doubles correspondants de la division circulaire. Il reste à mener les rayons Sl_1 et Sl_2 issus de S par ce nouveau point. On a évidemment deux rayons de ce genre réels, imaginaires ou confondus. (Fig. 1.)

Dans la deuxième construction (fig. 3), ce sont les tangentes au cercle issues de P qui donnent les points doubles de la division circulaire. On joint ceux-ci à S et on a les rayons cherchés.

Quand il s'agit de points doubles du 2e degré pris sur deux divisions de même base, on prolonge les rayons doubles des faisceaux concentriques correspondants menés par S jusqu'à cette base.

2. *Rayons doubles du 3e degré.*

Nous appellerons rayons doubles du 3e degré deux rayons homologues confondus tels de Sp et Sp_1.

2. *Points doubles du 3e degré.*

Les points doubles du 3e degré sont les points formés par deux homologues P et P′ confondus.

Pour obtenir ces rayons, considérons dans la fig. 1, un des points de coupe de la conique avec le cercle et désignons le par π_1. La transversale $a_1\pi_1$ donne également deux rayons

par a soit $a\pi_1$ et $a\pi_2$. Sur le cercle $a_1\pi_1$ donne p, $a\pi_1$ donne p_1 et $a\pi_2$ donne p_2. Comme π_1 est déjà sur le cercle p et p_1 seront donc confondus avec π_1. Les rayons passant par S seront Sp, Sp_1 et Sp_2, les deux derniers étant les homologues du premier. Les rayons homologues Sp et Sp_1 seront donc confondus tandis que Sp_2 ne donne rien de particulier.

Le nombre des rayons doubles du 3e degré dépend ainsi du nombre des points de coupe des deux courbes en dehors du point a qui est le sommet du faisceau multiple auxiliaire.

Nous avons donc trois points de coupe possibles différents de a dont deux peuvent être imaginaires. Il en résulte ainsi : *Les faisceaux concentriques formant un groupe du* $(2 + 1)^e$ *degré ont trois rayons doubles du 3e degré dont deux peuvent être réels, imaginaires ou confondus.*

La conique auxiliaire utilisée dans la première figure dépend de deux faisceaux de sommets a et a_1. Il est aisé de voir qu'elle est tangente au rayon aa_2 en a. Si l'on avait pris les sommets des faisceaux auxiliaires en a et a_2, la nouvelle conique eût été tangente au rayon aa_1 en a. D'un autre côté les points doubles du 3e degré sur le cercle sont des points fixes de celui-ci. *Ils appartiendront ainsi à toutes les coniques auxiliaires.* Les deux coniques correspondant aux faisceaux de sommets a et a_1 ou a et a_2 passeront par ces trois points et par le point a.

Les sommets des faisceaux auxiliaires peuvent être deux points homologues quelconques x et x_1. D'après ce qui précède la conique correspondante passera par les trois points doubles et par le point x.

On passe des rayons doubles du 3e degré, aux points doubles de même nature des divisions situées sur une même base, en prolongeant les rayons en question jusqu'à cette base.

Dans la figure 3, toute transversale Pμ passant par un point de coupe de la conique et du cercle donne sur le cercle les points m_1 et m_2 tels que m_2 est confondu avec μ. D'autre part Sμ donne également m sur le cercle confondu avec μ ou m_2. Donc les rayons homologues Sm et Sm_2 sont confondus et constituent une paire de rayons doubles du 3e degré. En dehors du point S, les deux courbes ont encore trois points

communs. Donc cette construction nous montre également que les faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré ont trois rayons doubles du $(2+1)^e$ degré, dont deux peuvent être imaginaires.

Dans la fig. 3 nous avons considéré la conique auxiliaire comme provenant de deux faisceaux simples, un de sommet P et l'autre de sommet S. Nous aurions pu prendre ce deuxième sommet en un point quelconque du cercle a_1 a_2, etc. appartenant à la division circulaire multiple. La conique auxiliaire eût passé par les trois points doubles du 3e degré des divisions circulaires par P et par a_1. Toutes les coniques ainsi formées auraient constitué un faisceau de coniques dont les quatre points fixes auraient été les trois points doubles en question et le point P.

3. *Rayons triples.*

Les rayons triples de deux faisceaux homographiques concentriques, du $(2+1)^e$ degré sont formés par un rayon du faisceau simple confondus avec ses deux homologues du faisceau multiple.

Exemple : Sk confondu avec Sk_1 et Sk_2.

3. *Points triples.*

Les points triples de deux divisions homographiques de même base de la $(2+1)^e$ classe sont formés par un point de la division simple confondu avec ses deux homologues de la division multiple.

Exemple : K confondu avec K_1 et K_2.

Ce cas sera réalisé dans la première construction (fig. 1) quand la transversale issue de a_1 et passant par un des points de coupe de la conique avec le cercle sera en même temps une tangente de la conique. Les points conjugués kk_1 et kk_2 des divisions circulaires seront tous confondus au point de coupe $\varkappa$ des deux courbes. La droite $S\varkappa$ donnera ainsi le rayon triple. On peut avoir 0, 1 ou 2 rayons triples suivant que les tangentes de la conique issues du point a_1, ne passent pas, passent par un point de coupe des deux courbes ou passent par deux points de coupe de ces courbes.

Dans la fig. 3. le rayon triple sera donné par une transversale issue de P passant par un des points de coupe des deux courbes et en même temps tangente au cercle.

4. *Rayons rectangulaires conjugués.*

Etant donné deux faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré, nous appellerons rayons rectangulaires conjugués des rayons tels que Sm et Sm_1 qui sont homologues tout en étant perpendiculaires l'un à l'autre. Le deuxième rayon conjugué de Sm soit Sm_2 dépend des deux autres sans présenter de propriétés spéciales.

Pour obtenir ces rayons par la première méthode de construction nous observons que les solutions cherchées Sm et Sm_1 dépendent de rayons a_1m et am_1 passant par les extrémités d'un diamètre mm_1. Leur recherche dépend maintenant du problème suivant:

Problème: Etant donné deux points fixes d'un cercle a et a_1 et un diamètre mobile de celui-ci, déterminer le lieu géométrique des points de coupe des rayons joignant les extrémités du diamètre aux points fixes donnés.

Solution: Dans la fig. 4 considérons le diamètre xy; il donne les droites xa_1 et ya; après une demi-révolution y vient en x et vice-versa; le rayon ya donne xa et xa_1 donne ya_1. Dans ce cas les rayons ya_1 et ax ne sont pas à considérer sur le diamètre xy mais bien sur un nouveau diamètre obtenu après une demi-révolution.

Dans ces conditions à tout diamètre xy ne correspondent que deux droites conjuguées xa_1 et ya. Si xy tourne autour du *centre de* manière à ce que x décrive toute la circonférence xa_1 et ya engendreront deux faisceaux homographiques simples de sommet aa_1 et les points de coupe de ces rayons se trouveront sur une conique passant par a et a_1. Nous déterminons la nature de cette conique en observant que deux rayons du faisceau a comme ax et am_1 correspondent dans le faisceau a_1 à a_1y et a_1m et donnent:

$$\sphericalangle xa\,m_1 = \frac{1}{2} \text{ arc } xm_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle xom_1$$

$$\sphericalangle ya_1\,m = \frac{1}{2} \text{ arc } ym = \frac{1}{2} \sphericalangle yom$$

Ces angles sont égaux ; donc les angles compris entre les rayons homologues correspondants des deux faisceaux sont égaux. Nous avons des faisceaux homographiques égaux ; donc la conique qu'ils engendrent est un cercle passant par a et a_1. D'un autre côté il est aisé de voir que ce cercle est tangent aux rayons oa_1 et oa. Il en résulte maintenant que, ce cercle est complètement déterminé.

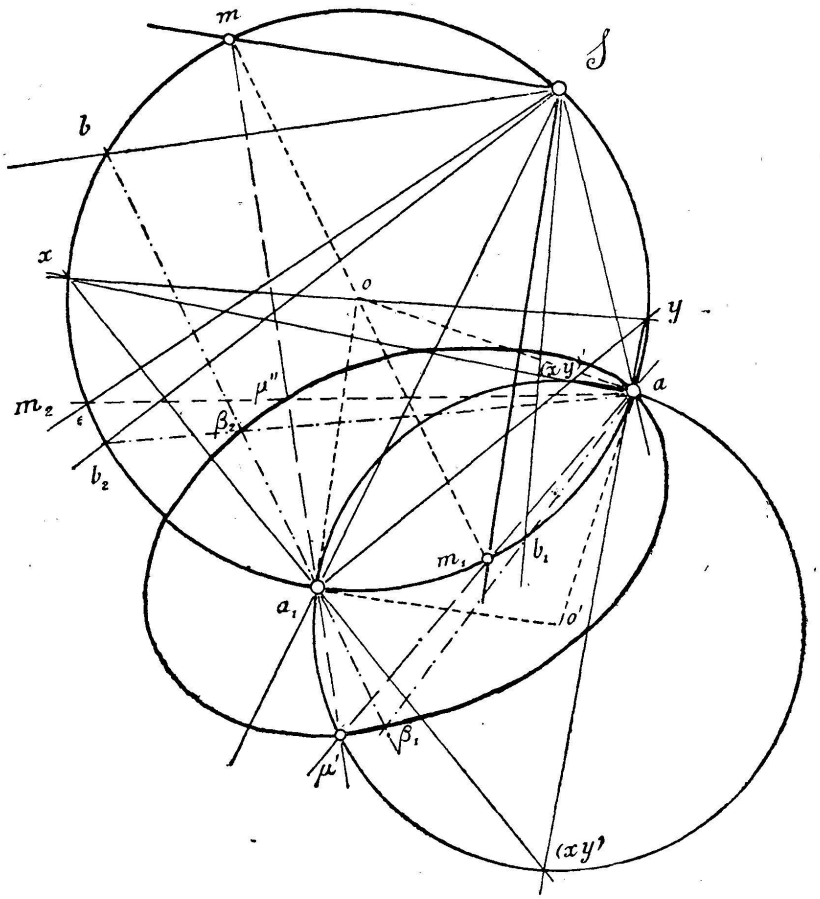

Fig. 4.

Si nous considérons de nouveau les faisceaux du $(2+1)^e$ degré en a et a_1 ils donneront des rayons homologues passant par les extrémités d'un même diamètre quand les points de coupe de ceux-ci seront à la fois sur le cercle nouveau et sur la conique auxiliaire.

Les rayons $a_1 m$ et am_1 correspondant aux rayons cherchés Sm et Sm_1, sont à la fois des rayons homologues des faisceaux homolographiques égaux qui engendrent le deuxième cercle, et des rayons homologues des faisceaux du $(2+1)^e$ degré engendrant la conique. Il faut donc que leur point

d'intersection soit un point de coupe de ces deux courbes. En dehors de a ces courbes ont trois points de coupe dont deux peuvent être imaginaires. A ces trois points correspondent donc trois paires de points conjugués des divisions circulaires tels que les deux points d'une même paire sont sur un même diamètre. Ces points donnent à leur tour avec S les paires de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S.

Les faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ *degré ont donc trois paires de rayons rectangulaires conjugués dont deux peuvent être imaginaires.*

Constructivement on joint le point de coupe μ_1 des courbes avec a et a_1. On a $a_1\mu_1$ et $a\mu_1$. La première droite donne μ'' sur la conique et m sur le premier cercle. La seconde droite donne m_1 sur le même cercle ; m et m_1 sont conjugués dans les divisions circulaires et appartiennent à un même diamètre. Ils donnent évidemment Sm perpendiculaire à Sm_1. Le deuxième rayon conjugué de Sm soit de Sm_2 se déduit de μ'' avec $a\mu''$ (fig. 4).

Avec la deuxième méthode de construction, les paires de rayons rectangulaires conjugués étant liées à un diamètre du cercle primitif, nous pouvons voir que les extrémités d'un diamètre, jointes à S et P engendrent deux faisceaux homographiques de sommets S et P et forment un groupe du $(2+1)^e$ degré. Le faisceau multiple a comme sommet S et le faisceau simple P. La courbe correspondante est une courbe du 3e degré avec S comme point double et P comme point simple. Cette courbe aura encore trois points de coupe différents de S et de P avec la conique. De chacun de ces points on pourra donc en déduire une paire de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S. On arrive donc à la même conclusion qu'avec la méthode précédente.

5. *Points limites.*

Nous appellerons points limites de deux divisions homographiques de même base et de la $(2+1)^e$ classe les points conjugués du point à l'infini de la division simple ou le

point conjugué et le point lié du point de la division multiple situé à l'$_\infty$.

Pour obtenir ces points, considérons les divisions déterminées suivant la méthode de la figure 1. (Voir fig. 5).

Nous prenons Sl parallèle à la base. Le rayon $a_1 l$ donne λ' et λ'', sur la conique, auxquels correspondent $a_1 l_1$ et $a_1 l_2$.

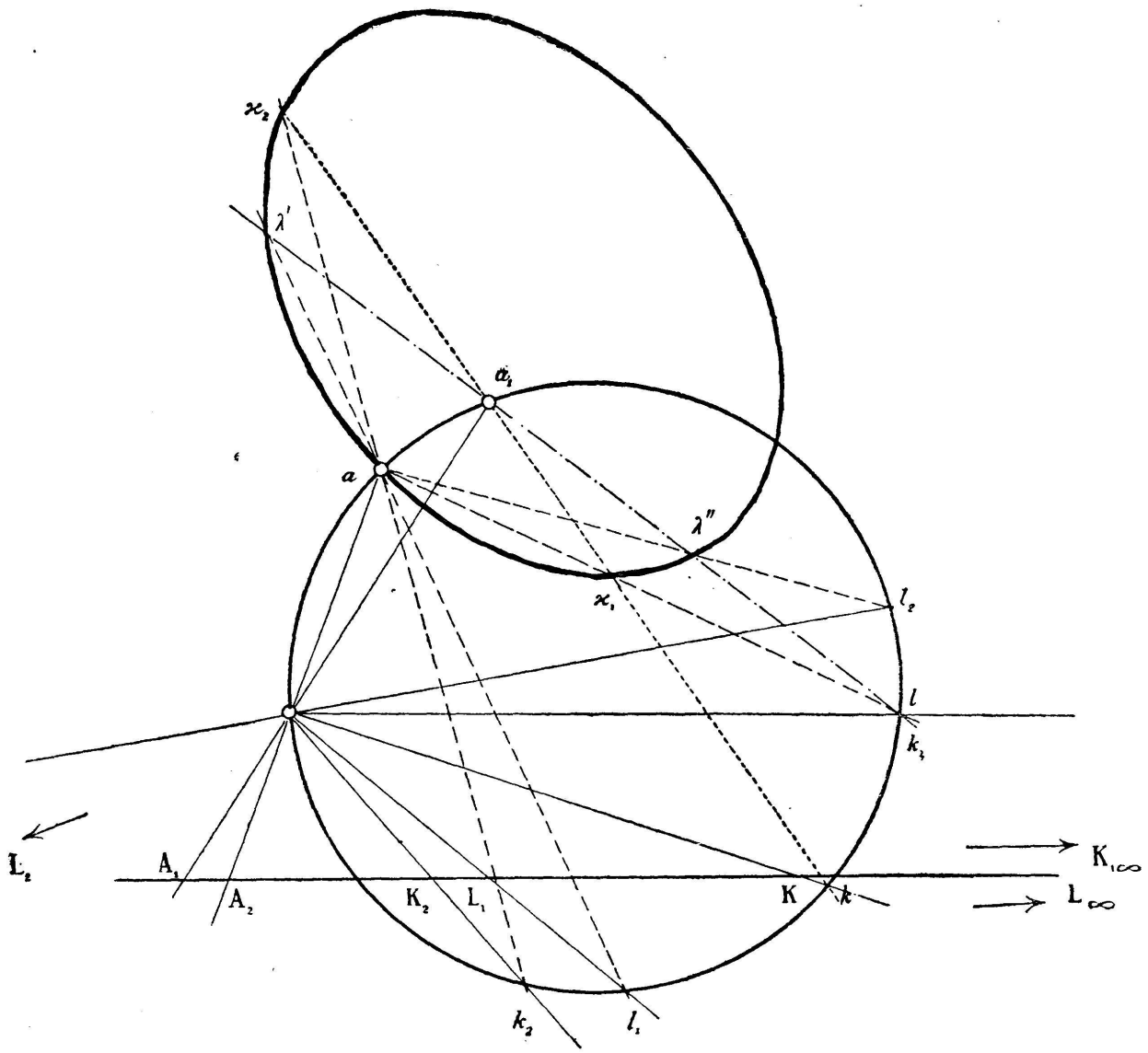

FIG. 5.

Les rayons Sl_1 et Sl_2 donnent L_1 et L_2 sur la base comme points conjugués de L_∞.

L_1 et L_2 forment un premier groupe de points limites. La parallèle précédente peut s'appeler Sk_1 ; le rayon ak_1 donne x_1 sur la conique, puis $a_1 x_1$ donne x_2, sur la conique également et k sur le cercle ; la droite ax_2, donne k_2 sur le cercle.

Les rayon Sk et Sk_1 puis Sk et k_2 sont conjugués. Ils donnent sur la base :

K conjugué de $K_{1\infty}$

K_2 » de K et lié à $K_{1\infty}$

K et K_2 forment le 2e groupe de points limites.

C. Remarque sur les divisions du $(2 + 1)^e$ degré, de même base.

On peut cependant développer les divisions homographiques du $(2 + 1)^e$ degré situées sur une même base, sans avoir besoin des faisceaux de même nature. Ce développement constitue la dualité du précédent et nous le résumons ici pour éviter d'allonger ce travail tout en voulant être aussi complet que possible. Chaque construction suppose évidemment une dualité.

Première construction. Nous donnerons les divisions au moyen des cinq paires d'éléments conjugués, aa_1 ; aa_2 ; bb_1 ; cc_1 et dd_1 . Nous construirons ensuite un cercle quelconque tangent à la base xy , et par chaque point donné nous tracerons les tangentes de cercle. Toutes ces tangentes couperont d'abord la tangente b suivant une division double, puis la tangente conjuguée b_1 suivant une division simple, homographique avec la première. Les tangentes issues de $a_1 a_2 b_1 c_1$ ... coupent b et celles issues de $abcd$ ... coupent b_1 . Ces deux nouvelles divisions ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... et $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1$ ... forment un groupe de $(2 + 1)^e$ classe avec un point homologue commun $\beta\beta_1$. Elles engendrent donc une conique que nous pouvons construire et qui est déterminée par cinq tangentes. Par tout point μ de b_1 on a deux tangentes de la conique donnant les points homologues μ_1 et μ_2 sur b. Par ces trois points, les tangentes du cercle donneront les trois points homologues des deux divisions sur xy , soient m, m_1 et m_2.

Les points doubles du deuxième degré seront évidemment donnés par les points de coupe de la base simple b_1 avec la conique auxiliaire. Ils peuvent être imaginaires.

Les points doubles du troisième degré proviendront des tangentes communes des deux courbes. Il y en a trois en en dehors de b . Deux peuvent être imaginaires. *Toutes les coniques auxiliaires admettent ces trois tangentes du premier cercle comme tangentes communes.*

On obtiendra un point triple quand une tangente commune des courbes sera tangente à la conique par son point de coupe avec la base b_1 .

Les points limites conjugués du point de l'infini de la division simple proviendront de la tangente du cercle parallèle

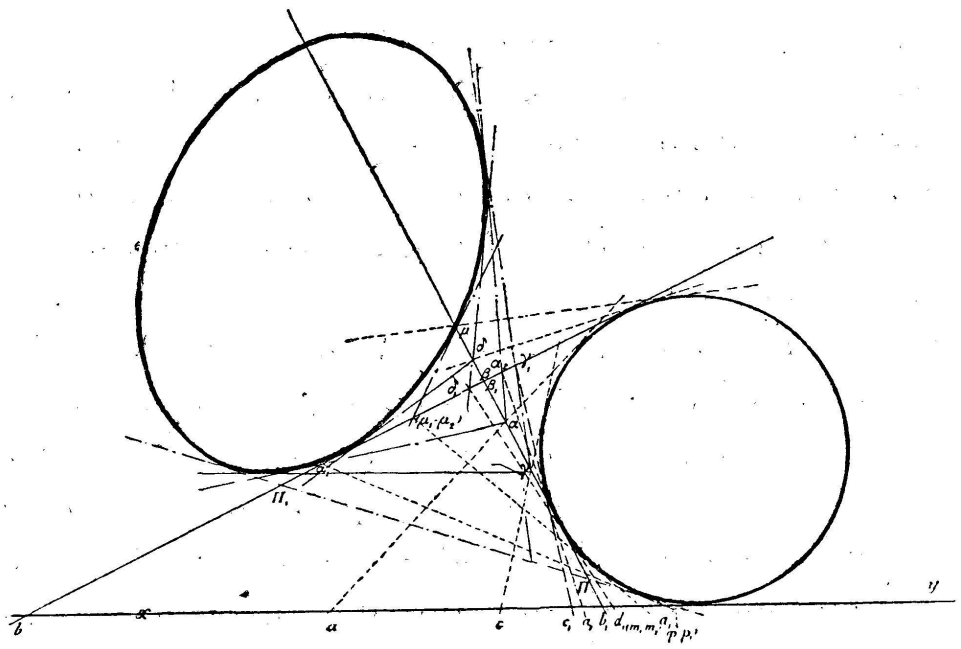

FIG. 6.

à xy et de son point de coupe avec b_1 . Le point de coupe de cette même tangente avec b entraînera les points conjugués du point de l'infini sur la base double. (Voir fig. 6).

Deuxième construction. Celle-ci correspond au cas spécial où les éléments donnés peuvent se représenter par aa_1 ; aa_2 ; bb_1 ; bb_2 ; cc_1 . On prend un cercle tangent à la base xy . Les tangentes issues par les paires $a_1 a_2$; $b_1 b_2$ se coupent en α et β sur une droite qui contiendra les points de coupe des paires de tangentes analogues. La ponctuelle $\alpha\beta\gamma$ sur cette droite est homographique avec abc et elle détermine une conique également tangente à xy . On peut

déduire les points des divisions sur xy au moyen des tangentes de cette conique. (Voir fig. 7).

Les points doubles du deuxième degré proviennent ici des points de coupe de $\alpha\beta$ avec le cercle. Ceux du troisième degré sont donnés par les tangentes communes en dehors de

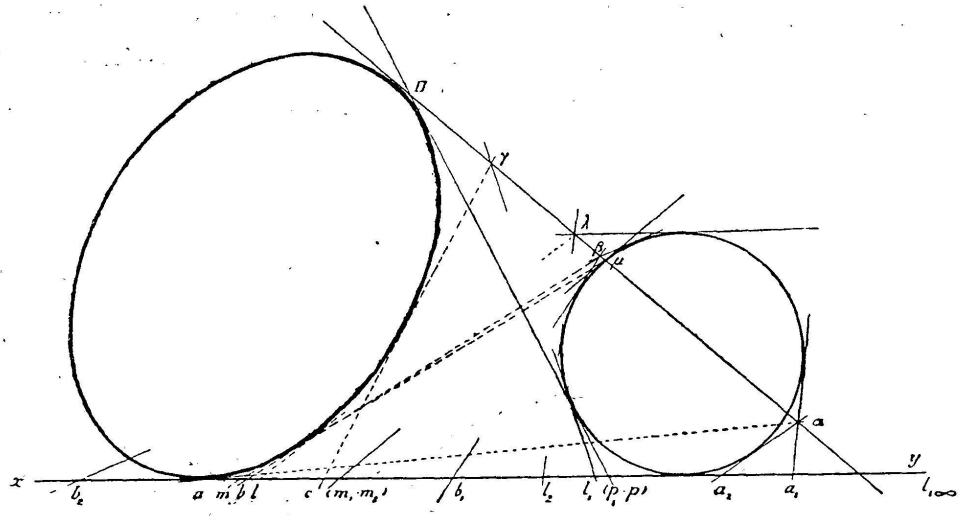

FIG. 7.

xy. *Toutes les coniques auxiliaires admettent quatre tangentes communes.* Ce sont les trois sus-indiquées et la ligne $\alpha\beta$.

Les points triples et les points limites se trouvent d'une manière analogue à celle de la construction précédente.

II

TANGENTES ET SÉCANTES

Nous considérons une courbe du 3e degré donnée par un faisceau multiple S_2 et un faisceau simple S_1 constituant un groupe du $(2 + 1)^e$ degré.

Pour construire la courbe nous nous reportons à ce que nous avons écrit précédemment (*Ens. math.*, 15 nov. 06). Les faisceaux sont donnés par cinq

Nous prenons également une courbe de la 3e classe formée par une division double et une division simple constituant ensemble un groupe de la $(2 + 1)^e$ classe.

Pour construire cette courbe suivant la méthode que nous avons déjà exposée, nous considérerons les cinq paires de

paires de rayons homologues quelconques aa_1 ; aa_2 ; bb_1 cc_1 ; dd_1 ; ceux-ci déterminent sur les rayons homologues d et d_1 les ponctuelles :

$$d \; ; \quad \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$$

$$d_1 \; ; \quad \alpha \; \beta \; \gamma \; \delta$$

les points d_1 et d sont confondus avec le point de coupe des bases d et d_1. Ces ponctuelles engendrent une conique donnée par cinq tangentes. Celles-ci sont :

$$d \; , \; \alpha_1 \alpha \; ; \; \alpha_2 \alpha \; ; \; \beta_1 \beta \; ; \; \gamma_1 \gamma \; .$$

Toute tangente de la conique donne une paire de points homologues sur les bases. D'un autre côté, par tout point de d_1 nous pouvons mener deux tangentes et par chaque point de d une tangente à cette courbe ; donc points homologues quelconques :

AA_1 ; AA_2 ; BB_1 ; CC_1 ; DD_1 qui déterminent la courbe et nous joindrons les points de la division simple ABCD avec le point D_1 de l'autre division, puis ceux de cette division $A_1 A_2 B_1 C_1$ et D_1 avec D l'homologue de D_1. Nous formerons ainsi deux faisceaux homologues déterminant un groupe du $(2+1)^e$ degré. Le rayon DD_1 ou $D_1 D$ sera un rayon homologue commun des deux faisceaux. Ils engendreront une conique déterminée par cinq points : D ; α_1 ; α_2 ; β_1 ; γ_1. Ces derniers sont les points de coupe des rayons comme $D_1 A$ et DA_1 ou $D_1 A$ et DA_2, etc.

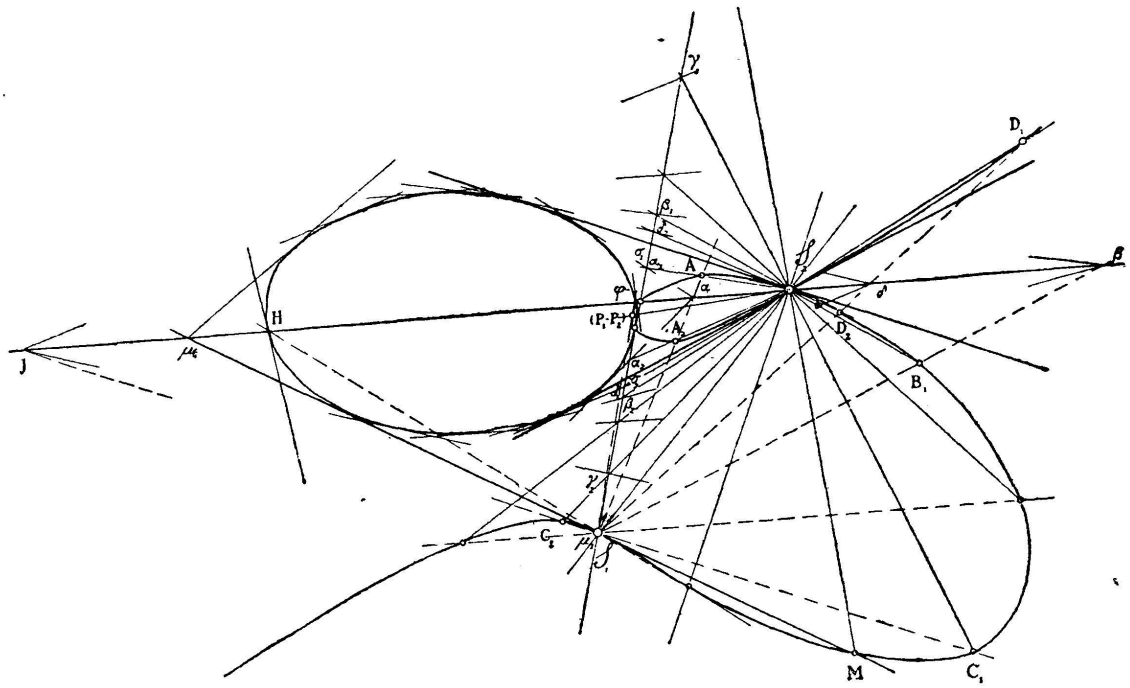

Fig 8.

Toute transversale de cette courbe menée par D_1 donne deux rayons homologues passant par

tout point de d_1 correspond à deux points de d. En joignant ces points respectivement à S_1 et S_2 on obtient trois rayons appartenant au même groupement et formant deux paires de rayons homologues des divisions. Ils donnent deux points de la courbe du 3e degré. (Voir fig. 8).

Tangentes par le point double.

Considérons S_2 sur d_1 et menons les deux tangentes de la conique auxiliaire par ce point; elles donnent $\sigma_1 \sigma_2$ sur d, comme conjuguées de S_2 sur d_1. Ces tangentes sont les rayons conjugués du faisceau double correspondant au rayon $S_1 S_2$ du faisceau simple. Le point de coupe de chaque rayon du faisceau double avec son homologue $S_1 S_2$ est en S_2; donc chaque rayon est une tangente D et par les points de coupe. Ces rayons déterminent, les derniers deux points sur la base double et le premier un point sur la base simple. Ces trois points forment deux paires de points homologues et donnent ainsi deux tangentes de la courbe de 3e classe (Voir fig. 9).

Points de tangence sur la tangente double.

Pour obtenir les points de tangence de la tangente double considérons-là, comme une transversale de la conique auxiliaire; issue de D_1 elle donne M sur la tangente base de la division simple; les rayons homologues par D sont DM_1 et DM_2 menée par les points de coupe et donnant ces points de coupe comme conjugués de M. Nous aurons les tangentes MM_1 et MM_2 infiniment voisines de la base double, cou-

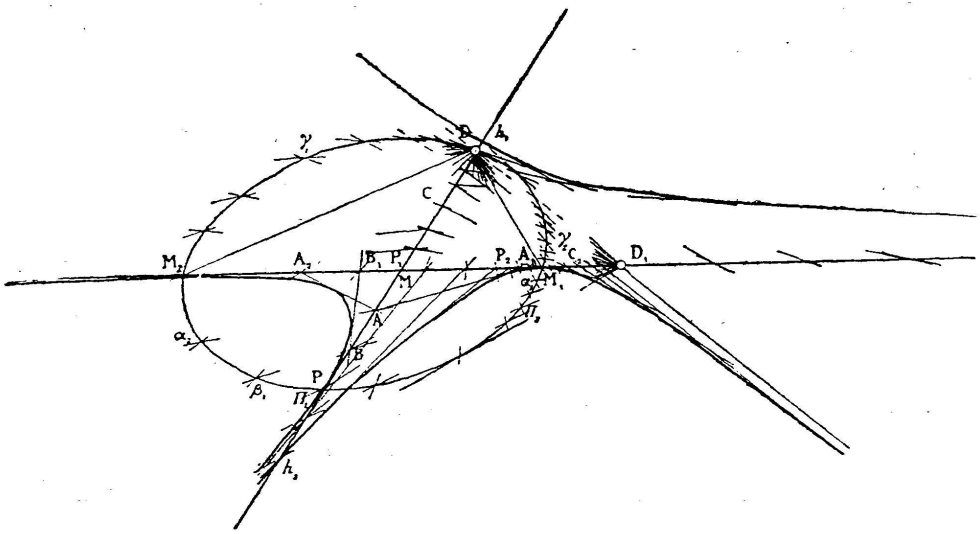

FIG. 9.

à la courbe en S_2. On en conclut :

Les tangentes de la conique auxiliaire menées par le sommet du faisceau double sont donc les tangentes de la courbe du 3e degré menée par le point double (fig. 8).

pant celles-ci en M_1 et M_2 donc ces points sont les points de tangence de la base double. On en conclut :

Les points de tangence de la tangente double d'une courbe de 3e classe sont les points de coupe de cette tangente avec la conique auxiliaire (voir fig. 9).

Tangentes par le sommet du faisceau simple.

La tangente à la conique auxiliaire menée par S_1 en dehors de d, soit $S_1\mu$ donne μ sur d_1. Par μ on mène encore une tangente $\mu\mu_2$. Le point correspondant de $S_1\mu$ sur d est μ_1 confondu avec S_1.

Les rayons S_2S_1 et $S_2\mu_2$ sont donc comme homologues $S_1\mu$.

Ils donnent les points S_1 et M de la courbe. Dans ces conditions S_1M a deux points confondus avec la courbe S_1 et un point de coupe en M.

D'autre part les points de coupe J et H de d_1 avec la conique ne donnent plus qu'une tangente par chacun de ces points. Ces tangentes donnent les points doubles de la division sur d; en menant ainsi les rayons doubles du faisceau S_2 on voit de suite que leurs points de coupe avec S_1J et S_1H donnent deux points confondus de la courbe du 3e degré sur ces droites. D'où il en résulte que S_1J et S_1H sont encore deux tangentes de la courbe du 3e degré passant par S_1 mais dont les points de

Point de tangence et points de coupe de la base de la division simple.

Le point de coupe P de la base de la division simple avec la conique auxiliaire donne la transversale $\pi_1\pi_2D_1$. Il en résulte les points P_1 et P_2 sur la base double comme conjugués de P. Le point P_1 est l'intersection des deux bases et le point π_1 est confondu avec P. La tangente P_1P infiniment voisine de la base simple, coupe celle-ci en P donc ce point P est le point de tangence de la base de la division simple avec la courbe du 3e degré. La tangente PP_2 est l'autre tangente de cette courbe que l'on peut mener par P.

Par le point D_1 on peut mener également deux tangentes à la conique auxiliaire. Celles-ci déterminent avec D les points doubles de la division multiple. En joignant ces points doubles avec le point de coupe de la tangente respective de la conique issue de D_1 on trouve une nouvelle tangente de la courbe de 3e classe représentant deux tangen-

tangence sont en dehors de S_1.

De ce qui précède, il en résulte donc :

La tangente de la conique auxiliaire menée par S_1 *est en même temps tangente de la courbe du 3e degré. Son dernier point de coupe avec cette courbe est différent de* S_1.

Les rayons du faisceau simple conjugués respectivement aux rayons doubles du faisceau multiple S_2 *sont encore deux tangentes de la courbe du 3e degré passant par* S_1 *et dont les points de tangence sont leurs points de coupe avec les rayons doubles correspondants.* (Voir fig. 8).

D'après ce qui précède, si nous connaissons dans une courbe du 3e degré à point double, six points de cette courbe et le point double, cette courbe est complètement déterminée, car nous pouvons prendre un des points simples comme sommet d'un faisceau simple et le point double comme sommet d'un faisceau double et former avec ces deux faisceaux un groupe du $(2 + 1)^e$ degré avec lequel nous pouvons construire toute la courbe. Ces observations jointes aux lois importantes des tangentes peuvent se résumer comme suit :

tes confondues dont le point de coupe est en h_1 ou h_2 ou les tangentes de la conique par D_1 coupent la base simple ; h_1 et h_2 sont donc les autres points de coupe de la base simple avec la courbe de 3e classe et les tangentes à la courbe menée par ces points sont ces tangentes confondues.

On en conclut donc :

Le point de coupe de la base de la division simple avec la conique auxiliaire est le point de tangence de cette base avec la courbe de 3e classe. Ses deux autres points de coupe avec elle sont les points conjugués des points doubles de la base multiple.

Les tangentes par ces points de coupe sont les droites qui joignent les points doubles avec leurs homologues respectifs. (Voir fig. 9).

Dualistiquement nous pouvons dire qu'une courbe de la 3e classe à tangente double est complètement déterminée avec la tangente double et six tangentes simples, car nous pouvons prendre une des tangentes simples comme base d'une division simple et la tangente multiple comme base d'une division double, puis former un groupe de la $(2 + 1)^e$ classe avec ces deux ponctuelles. Le groupe permet de déterminer toutes les autres tangentes de la courbe. De ceci, et des lois importantes des points de tangence nous pouvons dire :

Tangentes par un point quelconque d'une courbe du 3e degré à point double :

Par un point quelconque d'une courbe du 3e degré à point double on peut mener trois tangentes à cette courbe.

1° La tangente dont le point de tangence est le point donné. On l'obtient en considérant le point donné comme sommet d'un faisceau simple homographique avec le faisceau double du point double et en menant de ce point la tangente encore possible à la conique auxiliaire. Cette tangente est toujours réelle et son dernier point de coupe avec la courbe facilement déterminable.

2° Les deux tangentes passant par le point considéré mais dont les points de tangence sont différents de lui. On les obtient en joignant ce point aux points de coupe de la conique auxiliaire avec la seconde base qui a servi à l'établir. Le point de tangence de ces droites est sur les rayons doubles du deuxième faisceau. Il est à remarquer que ces deux tangentes peuvent être réelles ou imaginaires ou confondues.

Nous pouvons donc ajouter, puisque par chaque point de la courbe on peut lui mener trois tangentes :

Points de coupe d'une tangente quelconque d'une courbe de 3e classe à tangente double avec cette courbe :

Une tangente simple quelconque d'une courbe de 3e classe à tangente double possède trois points de coupe avec celle-ci. Ce sont :

1° Son point de tangence avec la courbe. On l'obtient en considérant la tangente donnée comme base d'une ponctuelle simple homographique avec celle de la tangente double et qui est une ponctuelle double. Le point de coupe de cette droite avec la conique auxiliaire, diffèrent du point de départ donne ce point de tangence.

Ce point est toujours réel, et par ce même point il existe une seconde tangente que l'on sait déterminer.

2° Les autres points communs à la courbe de 3e classe et à la tangente considérée sont les points de coupe de cette tangente avec les deux tangentes de la conique auxiliaire menée par le sommet du faisceau double relatif à celle-ci.

Les tangentes en ces points sont les droites qui les joignent aux points doubles de la ponctuelle sur la tangente double. Il est à remarquer que ces deux derniers points de coupe de la tangente simple avec la courbe peuvent être réels ou imaginaires et dans un cas limite confondus.

Nous pouvons donc dire que

La courbe du troisième degré à point double est une courbe de la quatrième classe.

Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire dépend comme on l'a vu des deux rayons homologues sur lesquels on prend les bases.

Toutes les coniques auxiliaires ont donc trois tangentes communes avec la courbe du troisième degré. Ce sont les deux tangentes par le point double et la tangente avec son point de tangence au sommet du faisceau simple.

Le rayon du faisceau simple sur lequel on prend la division double auxiliaire est également une tangente de cette conique. Son point de tangence est aussi son point de coupe avec son second rayon conjugué. C'est donc un point de la courbe du troisième degré. La conique auxiliaire correspondant à ce même rayon et à son autre rayon conjugué aura comme point de tangence sur le rayon dont nous causons, le point de coupe avec le premier rayon conjugué. Il est à remarquer que cette conique et la précédente auraient alors quatre tangentes communes.

chaque tangente simple a quatre points communs déterminés avec la courbe :

Une courbe de la troisième classe à tangente double est une courbe du quatrième degré.

Coniques auxiliaires.

La conique auxiliaire relative aux courbes de classe dépend des faisceaux construits par les points homologues D_1 et D.

Toutes les coniques auxiliaires auront donc trois points communs avec la courbe de la troisième classe. Ce sont les deux points de tangence de la tangente double et le point de tangence de la tangente utilisée comme base simple.

Le sommet D du faisceau double auxiliaire est également sur la conique. La tangente menée par ce point donne son deuxième conjugué D_2 sur la base double. C'est donc une tangente de la courbe de troisième classe.

La conique auxiliaire correspondant aux faisceaux de sommets D et D_2 passera également par D, mais cette conique aurait comme tangente en D la droite DD_2 tangente de la courbe de troisième classe. Comme précédemment nous pouvons dire que ces deux coniques auxiliaires ont alors quatre points communs.

Intersection d'une droite quelconque avec une courbe du 3e degré à point double.

Toute droite coupant les deux faisceaux d'un groupe du $(2+1)^e$ degré dont dépend la courbe considérée du troisième degré à point double, rencontre ces faisceaux suivant deux divisions du $(2+1)^e$ degré situées sur la même base et homographiques l'une à l'autre.

Les points de coupe avec les cinq paires de rayons homologues donne cinq paires de points, également homologues et suffisants pour déterminer les ponctuelles.

Chaque point de coupe de la transversale avec la courbe correspond évidemment à deux points homologues confondus des divisions de même base. Ces points homologues sont les points doubles du troisième degré des ponctuelles à base commune. Comme elles ont trois de ces points possibles, nous en concluons que toute droite à trois points de coupe avec la courbe du troisième degré à point double, et ceux-ci peuvent être déduits des cinq paires de points homologues fondamentaux d'après les méthodes que nous avons indiquées.

Autres constructions.

La courbe du troisième degré

Tangentes d'une courbe de 3e classe à tangente double menées par un point quelconque.

En joignant tous les points des deux ponctuelles formant un groupe de la $(2+1)^e$ classe dont dépend la courbe considérée, de la 3e classe à tangente double, avec un point quelconque, on forme évidemment deux faisceaux concentriques du $(2+1)^e$ degré, homographiques l'un à l'autre.

Les cinq paires de points homologues donnés entraînent cinq paires de rayons homologues des faisceaux, au moyen desquelles on peut complètement déterminer ceux-ci.

Toute tangente de la courbe passant par le point considéré correspond évidemment à deux rayons homologues confondus des faisceaux concentriques. Ces rayons sont les rayons doubles du troisième degré des faisceaux. Ceux-ci ont trois de ces rayons possibles, d'où nous en concluons que par un point quelconque on peut mener trois tangentes à une courbe de la 3e classe à tangente double et ces tangentes peuvent être déduites des cinq paires de rayons fondamentaux des faisceaux concentriques. Il est bon de remarquer que deux tangentes peuvent être imaginaires et dualistiquement deux points de coupe dans l'autre courbe aussi.

Autres constructions.

Les ponctuelles qui engen-

et les tangentes dont nous causons peuvent être construites encore d'une autre manière.

Si les éléments donnés sont : S_1a — S_2a_1 ; S_1a — S_2a_2 ; S_1b — S_2b_1 ; S_1b — S_2b_2 ; et S_1c — S_2c_1 le faisceau double en S_2 contient deux paires de rayons et comme il forme une involution, on peut le couper par une circonférence arbitraire passant par S_2. Les points de coupe des rayons, soient $a_1 a_2$; $b_1 b_2$; ... donnent un faisceau de sommet P, dont chaque rayon correspond à une paire de l'involution en S_2. Le faisceau simple de sommet S_1 devient ainsi homographique avec le faisceau simple de sommet P et ils engendrent une conique. Cette courbe est donnée par cinq points.

On peut construire toutes les autres paires d'éléments homologues des faisceaux primitifs drent la courbe de 3e classe que nous considérons, peuvent être données par les points :

$$aA_1aA_2 \; ; \quad bB_1bB_2 \quad \text{et} \quad cC_1 \, .$$

La ponctuelle $A_1A_2B_1B_2$ dont chaque paire est homologue des points *abc* ..... forme comme nous le savons une involution. Cette involution peut être construite avec un cercle auxiliaire tangent de la base double. Les tangentes de ce cercle par les points correspondants de l'involution donnent d'autres points de coupe $\alpha\beta\gamma$ ... situés sur une même droite et forment une ponctuelle sur celle-ci. Cette ponctuelle est homographique avec la ponctuelle simple *abc* ... Elles engendrent donc ensemble une conique dont elles donnent les cinq tangentes fondamentales.

Toute tangente à la conique

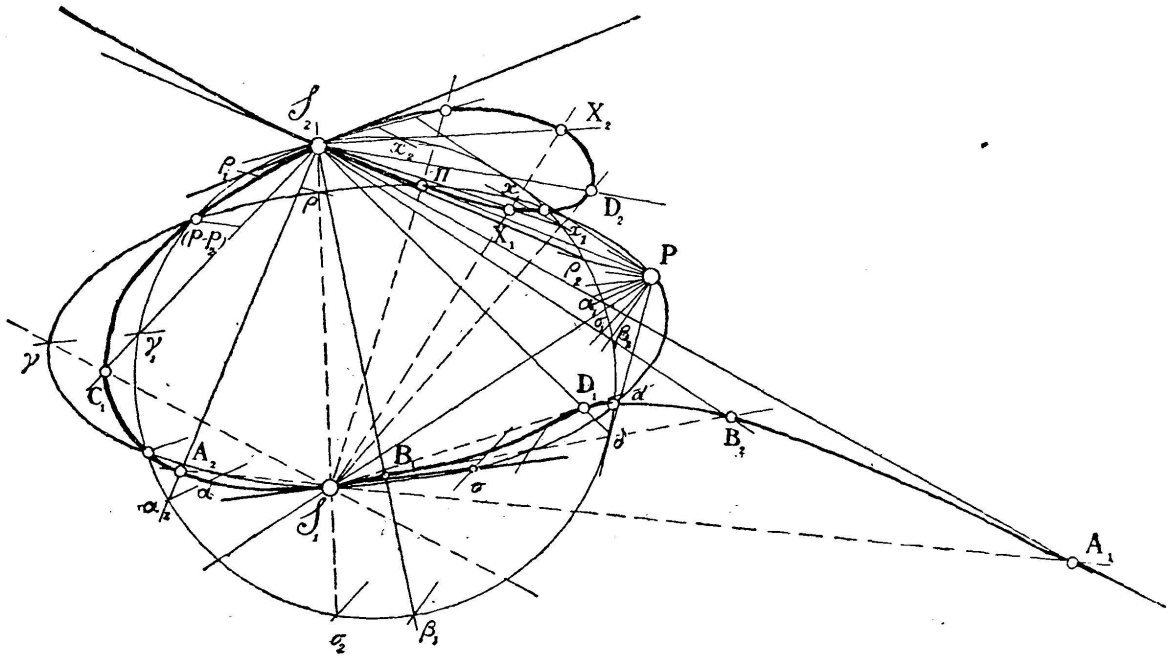

FIG. 10.

au moyen de transversales menées par P. Chaque transversale donne trois points dont deux x_1 et x_2 sur le cercle et un sur la conique x. Les premiers joints à S_2 et le dernier à S_1 forment les rayons S_2x_1 et S_2x_2 homologues de S_1x. (Voir fig. 10.)

auxiliaire menée par un point ξ de $\alpha\beta$ donne x sur la base simple. Les tangentes au cercle menées par ξ donnent X_1 et X_2 sur la base double comme points conjugués de x. Les droites xX_1 et xX_2 sont ainsi de nouvelles tangentes de notre courbe de la troisième classe à tangente double. (Voir fig. 11.)

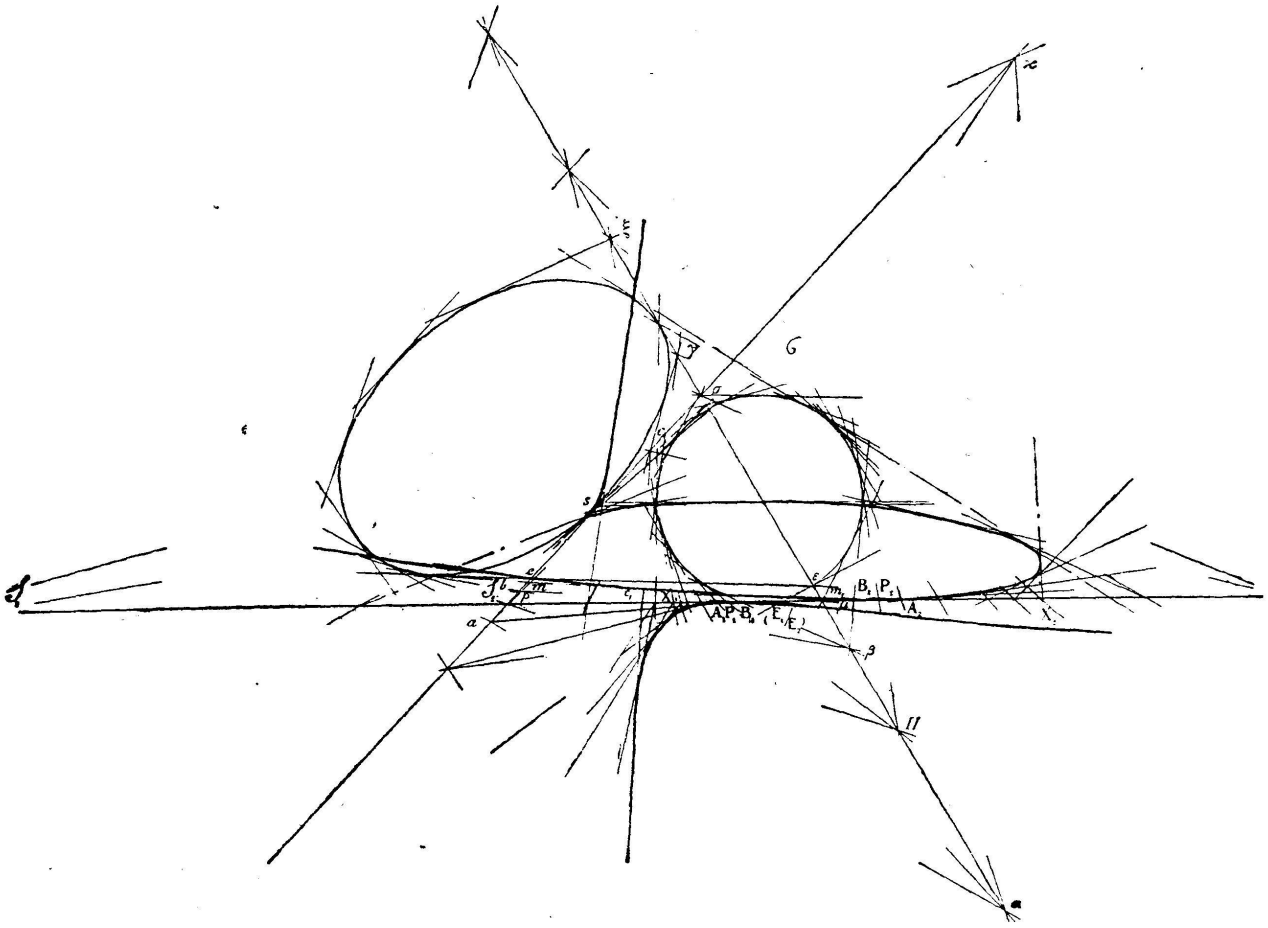

Fig. 11.

Pour obtenir les tangentes par le point double, considérons S_1S_2 du faisceau simple donnant ϱ sur la conique, $P\varrho$ sera l'homologue dans le faisceau P. Celui-ci donnera ϱ_1 et ϱ_2 sur le cercle; donc $S_2\varrho_1$ et $S_2\varrho_2$ seront les rayons homologues de S_1S_2 dans le faisceau S_2.

Ce seront les tangentes de la

Les points de tangence de la tangente double seront ses points de coupe avec les tangentes infiniment voisines ou autrement dit les points conjugués sur la base double du point de coupe p des deux bases. Ce seront P_1 et P_2. C'est la tangente $p\pi$ de la conique qui donne π sur $\alpha\beta$, duquel on mène deux

courbe du troisième degré par le point double.

On obtient la tangente en S_1 au moyen du rayon S_2S_1 donnant σ_2 sur le cercle ; $P\sigma_2$ donne encore σ_1 et σ. Le rayon $S_1\sigma$ est ainsi l'homologue des rayons S_2S_1 et $S_2\sigma_1$. C'est la tangente de la courbe en S_1.

Les rayons doubles de l'involution en S_2 résultent des tangentes du cercle par P ; — $P\delta$ est une de ces tangentes. Elle donne d sur la conique ; S_1d est son rayon conjugué en S_1 ou le rayon homologue des rayons doubles du faisceau S_2. Le point de coupe de ces rayons, soit D_1 montre que S_1d ou S_1D_1 a deux points de coupe avec la courbe confondus en D_1. C'est donc une tangente de cette courbe en D_1 et passant par S_1. L'autre tangente par S_1 correspond au point de tangence D_2.

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre points de coupe pouvant être imaginaires deux à deux. Ces points sont aussi les points de coupe de deux rayons homologues comme S_1p et S_2p_2. Ils sont donc des points de la courbe du troisième degré. Cette courbe peut avoir six points communs avec la conique. Le cinquième est S_1 puis le sixième qui doit toujours être réel est donné par le point de coupe du rayon S_2P avec son homologue $S_1\pi$. Le rayon $S_1\pi$ a encore un point sur la courbe, c'est son intersection avec la tangentes au cercle : πP_1 et πP_2.

Le point de tangence de la base simple est un point s conjugué des points S_1 et S_2 de la base double. S_1 étant le point de coupe des deux bases. La tangente du cercle par S_1 soit $S_1\sigma$ donne σ sur $\alpha\beta$. De ce point on mène une tangente au cercle pour avoir S_2 et une à la conique pour obtenir s.

Les points doubles de l'involution $A_1A_2B_1B_2$ ... proviennent des points de coupe de $\alpha\beta$ avec le cercle. Leurs homologues sur la base simple sont les points de coupe de celle-ci avec la courbe de la troisième classe. En outre la tangente menée par un point double et son homologue représente deux tangentes confondues se coupant dans le point de la base simple. Il en résulte donc que ce point de la base simple est le point de contact de cette tangente.

Le cercle et la conique auxiliaire ont quatre tangentes communes pouvant être imaginaires deux à deux. Ces tangentes sont également des tangentes de la courbe de 3e classe. Celle-ci peut en avoir six qui lui sont communes avec la conique auxiliaire. La base simple abc ... est une cinquième tangente commune. La sixième sera donc toujours réelle. Si nous considérons la droite $\alpha\beta$, elle coupe la base double en m_1 ou μ le conjugué sur cette base est m_2 le point de tangence du cercle auxiliaire et le conjugué sur la

gente du cercle en S_2. (Voir fig. 10).

La conique auxiliaire dépend du cercle primitivement tracé. Si on laisse le sommet S_1 du faisceau simple se déplacer sur la courbe du 3e degré la conique auxiliaire change, mais passe toujours par les quatre points de coupe du cercle avec la courbe, autres que S_2.

base simple est m. La tangente mm_1 de la conique est en même temps tangente de la courbe de 3e classe. C'est la sixième tangente considérée. (Voir fig. 11.)

La conique auxiliaire dépend du cercle. Si on choisit une autre tangente simple que celle qu'on a prise la conique change aussi mais conserve toujours les quatre mêmes tangentes communes avec le cercle et la courbe de 3e classe.

III

ASYMPTOTES ET TANGENTES PARALLÈLES

Asymptotes des courbes du 3e degré à point double.

Le problème des asymptotes de ces courbes comprendra deux parties. D'abord on établira la direction des points à l'infini, et en second lieu on déterminera les tangentes par ces points.

Les points à l'infini proviendront de rayons homologues parallèles. Pour avoir leur direction, menons en S_2 des rayons parallèles à ceux de S_1. Nous formerons ainsi deux faisceaux concentriques homographiques du $(2 + 1)^e$ degré. Les rayons doubles du 3e degré de ces faisceaux correspondront aux rayons homologues parallèles.

Tangentes et points de tangence des courbes de 3e classe parallèlement à une direction donnée.

Ce problème se compose également de deux parties. Il faut en premier lieu trouver les tangentes en direction puis en second lieu déterminer les points de tangence.

La courbe sera donnée dans la fig. 12, par les cinq paires de tangentes A_1a — B_1b — C_1c — D_1d — E_1e.

La direction de la ou des tangentes parallèles est donnée par xx'. Nous en sommes ramenés à chercher les tangentes de la courbe pour le point à l'infini sur cette direction. On joint les points des deux ponctuelles avec ce point. On forme ainsi des

Dans la fig. 12 la courbe est donnée par les faisceaux en S_2 et S_1 correspondant aux cinq points ABCDE.

Les parallèles en S_2 aux rayons de S_1 sont désignées par 1, 2, 3, 4 et 5. Les faisceaux concentriques en S_2 ont donné un rayon double du 3e degré *kk*. Celui-ci donne donc une direction asymptotique de la courbe.

Nous obtiendrons maintenant l'asymptote correspondante en formant un nouveau faisceau simple dont le sommet est à l'infini sur la direction *kk* et dont les rayons passent par les points de la courbe ABCDE.

Le rayon V par E de ce faisceau coupera les rayons du faisceau S_2 en cinq points. Le rayon e_1 du faisceau S_2 coupera les parallèles en cinq autres points homologues des premiers. La ponctuelle sur V. E sera une ponctuelle double ; celle sur e_1 une ponctuelle simple homographique avec la première. Ensemble elles engendrent une conique qui peut servir de conique auxiliaire pour la courbe du 3e degré.

La tangente de cette conique menée par le sommet M_∞ *du faisceau simple sera comme nous l'avons vu antérieurement la tangente de la courbe du 3e degré par* M_∞. *Ce sera donc une* faisceaux homographiques concentriques du $(2 + 1)^e$ degré ou sur la base double, des divisions homographiques formant un groupe de la $(2 + 1)^e$ classe. Les points doubles du 3e degré de ces divisions correspondent aux rayons de même nature des faisceaux de rayons parallèles et donnent ainsi les tangentes parallèles à la direction considérée.

Par M dans la fig. 12, nous avons une de ces tangentes. Sa construction étant développée par des méthodes connues.

Nous considérons ensuite la division simple déterminée sur la nouvelle tangente par les tangentes de la courbe de 3e classe issues des points de la ponctuelle double. Ce sont I, II, III, IV et V. En prenant deux points homologues C_1 et III comme sommets de deux faisceaux auxiliaires

$$\mathrm{III}\,(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1\ ;\ \ldots)$$

et

$$C_1(\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV},\ \mathrm{V}\ \ldots)$$

formés avec les ponctuelles, nous obtenons une conique donnée par cinq points 1, 2, 3, 4 et 5. Cette conique auxiliaire peut servir à la construction de la courbe de 3e classe.

Le point de cette conique avec la tangente simple (Tg) *menée parallèlement à la direction* xx' *sera comme nous le savons le point de tangence de la droite avec la courbe de 3e classe.*

asymptote. Elle est marquée (As).

Comme on connaît cinq tangentes de la conique auxiliaire considérée et la direction de la sixième, on peut construire celle-ci par le théorème de Brianchon sans tracer la conique.

Il ressort de ce qui précède que *la courbe du 3e degré à point double a trois asymptotes dont deux peuvent être imaginaires.*

Ce point est marqué P. Nous avions donc cinq points de la conique et la direction passant par le sixième. Nous avons cherché celui-ci par le théorème de Pascal sans construire la conique.

Il est donc évident d'après ces observations qu'*il y a trois tangentes de la courbe de la troisième classe parallèles à la direction donnée. Deux d'entre elles peuvent être imaginaires.*

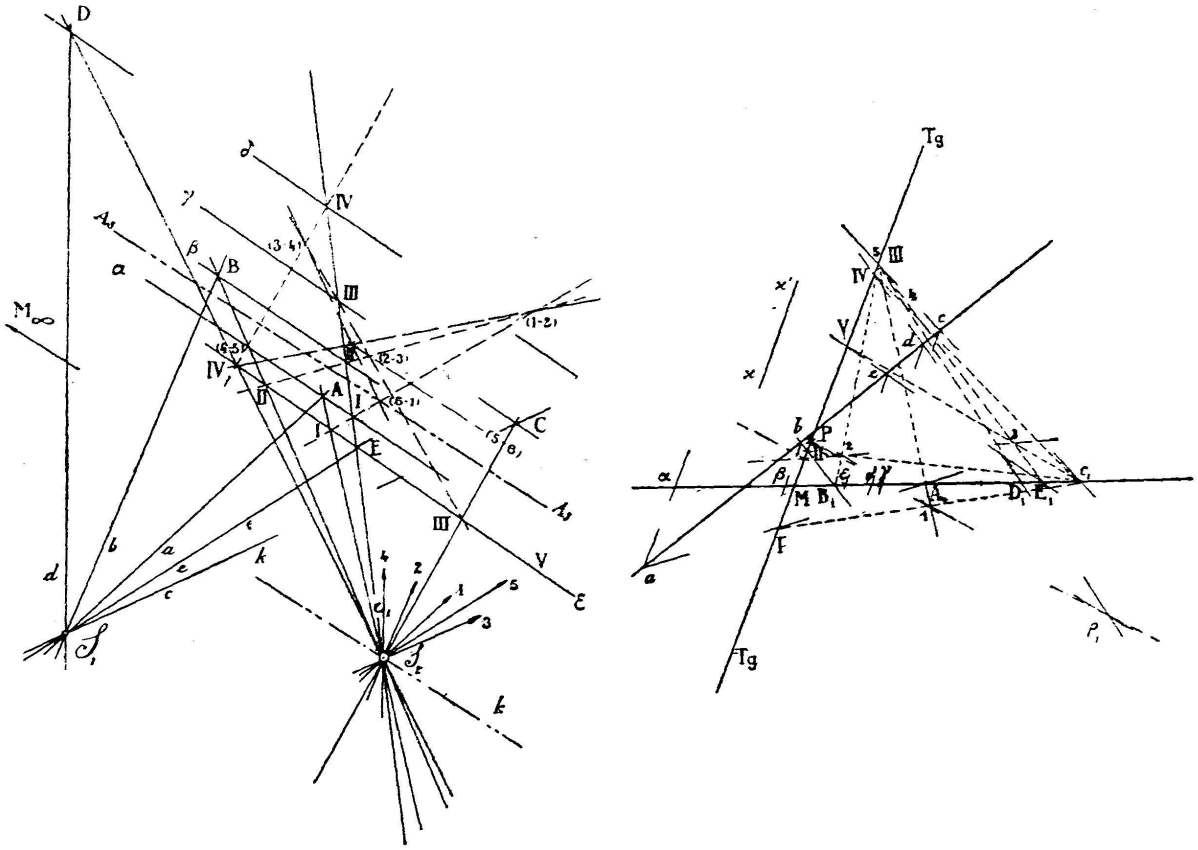

FIG. 12.

L. CRELIER (Bienne).