

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1908)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA SPHÉRIQUE NON-EUCLIDIENNE  
**Autor:** Halsted, George-Bruce  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10964>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## LA SPHÉRIQUE NON-EUCLIDIENNE

---

Chacun sait aujourd'hui, comme faisant partie des connaissances générales issues de la création de la Géométrie non-euclidienne, que la Trigonométrie sphérique est entièrement indépendante du postulat des parallèles. Nous nous étonnons qu'on se soit attardé à donner une preuve de ce qui nous est maintenant si évident.

Néanmoins, le paragraphe le plus difficile dans toutes les *Recherches géométriques sur la Théorie des Parallèles*, de Lobatchefski, est-il peut-être le n° 35 qui conclut ainsi : Donc la Trigonométrie sphérique est indépendante de ce que, dans un triangle rectiligne, la somme des trois angles est ou n'est pas égale à deux angles droits. »

C'est ainsi que se termine de même le chapitre XI de ses *Nouveaux Eléments* : « Par conséquent, les équations des triangles sphériques demeurent les mêmes, que l'angle de parallélisme soit supposé constant ou variable. » Dans le paragraphe 26 de la *Science absolue de l'Espace* de Bolyai, la Trigonométrie sphérique est établie indépendamment du postulat des parallèles.

Dans son espace non-euclidien, Bolyai a trouvé une surface uniforme  $F$  dont la Géométrie propre est euclidienne ; sa droite, (ou géodésique) est le cercle limite  $L$ . Lobatchefski a trouvé la même surface, et donné à  $F$  le nom d'horisphère, à  $L$  celui d'horicycle.

Mais, pour si profond que fût leur génie, ils n'ont jamais mis en doute cette assertion, que trois points collinéaires étant donnés, un et un seul est toujours compris entre les deux autres. Comme conséquence, la droite était pour eux d'essence non fermée, et de longueur infinie. Ainsi, ils ne placèrent pas la Géométrie caractéristique de la sphère au

même rang que celle de l'horisphère, et la Géométrie non-euclidienne de l'espace fini demeura insoupçonnée d'eux.

Ni l'un ni l'autre n'eut la conception que l'espace entier pouvait être fini; le cercle limite, de longueur infinie, était bien considéré par eux comme la droite de l'horisphère, mais le grand cercle fini ne leur apparaissait pas comme la droite de la sphère.

Il était réservé à Riemann d'émettre cette idée que la ligne droite, quoique illimitée, pouvait bien n'être pas nécessairement infinie, et il en est résulté une nouvelle Géométrie non-euclidienne, à laquelle nous donnons aujourd'hui son nom.

Beltrami a montré que dans l'espace euclidien il peut exister une surface dont une partie est capable de représenter une partie du plan de Bolyai : c'est la surface à courbure négative constante, la *pseudosphère*. A la vérité, il est impossible de représenter le plan entier de Bolyai au moyen d'une surface de Beltrami privée de points singuliers; néanmoins, en désignant sous le nom de pseudosphères les surfaces de révolution qui ont pour méridienne une tractrice, ou courbe des tangentes égales, nous pouvons dire que leur Géométrie caractéristique est bolyaienne.

Récemment, cette manière de voir a été confirmée et complétée par le beau *Théorème de Barbarin* : *Chacun des trois espaces euclidien, bolyaien, riemannien renferme des surfaces à courbure-constante dont les lignes géodésiques ont les propriétés métriques des droites des trois espaces.* Ces surfaces sont :

1° Les canaux ou surfaces équidistantes d'une droite; quand l'équidistance devient infinie, ils se transforment en horisphères : (Géométrie caractéristique, euclidienne).

2° les pseudosphères, (Géométrie caractéristique, bolyaienne.)

3° les sphères (Géométrie caractéristique, riemannienne).

En 1879, Killing a rendu claire la distinction entre l'espace riemannien et ce qu'il a appelé alors sa forme polaire, aussi désignée pas Klein sous le nom d'*espace simplement elliptique*. Cette forme, pense Killing, a entièrement échappé

à Riemann, comme elle avait aussi échappé à Helmholtz, on le sait, lorsque, aux environs de 1876, il reproduisait encore ce vieux mais inexact théorème que, dans un espace à courbure positive constante, deux lignes géodésiques qui se rencontrent généralement doivent nécessairement avoir deux points communs. Klein appelle *sphérique* un espace à courbure positive qui jouit de cette propriété pour le distinguer, par opposition, de l'espace simplement elliptique, dans lequel le postulat de détermination de la droite par deux points ne souffre aucune exception.

Killing est aussi le premier qui a montré que, en outre des espaces euclidien, bolyaien et simplement elliptique, l'espace sphérique ou anciennement riemannien est le seul qui puisse dans son entier se mouvoir librement sur lui-même. Il y a en abondance des exemples où la libre mobilité des figures n'a lieu qu'autant que les dimensions de ces figures ne dépassent pas un certain degré; il y a des séries d'espaces topologiquement discernables et qui en des parties limitées ou simplement connexes sont euclidiens, bolyaiens, simplement elliptiques. D'ailleurs il est prouvé aujourd'hui, en ce qui concerne les surfaces à courbure positive constante, auxquelles la Géométrie riemannienne s'applique, qu'à part la sphère, il n'existe pas d'autre surface fermée de cette sorte. La sphère est la seule surface fermée, à courbure positive constante, et exempte de singularités<sup>1</sup>.

Tout cela accuse avec une grande intensité l'importance de l'étude de la surface sphérique : Sphérique à deux dimensions, Sphérique pure, Sphérique intrinsèque, Sphérique riemannienne, Sphérique doublement elliptique, Sphérique non-euclidienne. Heureusement, même dans l'éducation générale, une place a été réservée à ce nouveau personnage. Tous les théorèmes de ce qu'on nomme la « Géométrie solide » des Ecoles ayant trait seulement à la surface de la sphère, tous ceux que l'on obtient par l'usage du postulat des parallèles en tirant des lignes à travers le globe qui,

<sup>1</sup> Voir par exemple HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, p. 172-175; LIEBMANN, *Eine neue Eigenschaft der Kugel*, (Gött. Nachrichten) 1899, p. 44-54; LÜTKEMEYER, *Ueber den analytischen Charakter der Integrale*, Gött., 1902; HOLMGREN, *Sur les surfaces à courbure constante*. Comptes rendus, 1902, p. 840-843.



dans la Géométrie euclidienne, est à l'intérieur de la sphère, considérée en fait comme la couverture de ce globe, et par conséquent comme entité géométrique à trois dimensions, étendue d'une infinité de manières dans trois directions, tous ces théorèmes, dis-je, ne sont en réalité que des propositions se rapportant à cet être plus simple et diversement fini qu'est la sphère, n'ayant aucune relation de dépendance avec la droite, le plan, l'espace euclidiens. Il est donc parfaitement évident que ces théorèmes doivent être entièrement développés au moyen des seuls axiomes qui caractérisent la sphère.

D'ailleurs, il n'est pas tout à fait inutile d'avoir recours à cette conception ordinaire qui consiste à faire de la sphère une enveloppe; en effet, pour employer la terminologie de notre intuition euclidienne, si nous détachons d'un globe la surface qui le recouvre, tout autre surface sur laquelle nous pouvons appliquer la première par flexion simple sans extension est une surface doublement elliptique, une surface à courbure positive constante, avec la même Géométrie propre, et la notion vulgaire du libre mouvement des figures peut y subsister; toutefois, cette surface n'est plus exempte de singularités, car il lui en est née une quelque part.

Pour éclaircir en langage plus ordinaire le sens des propriétés intrinsèques de la sphère, prenons le cercle, c'est-à-dire la courbe fermée qui peut glisser et se mouvoir entièrement le long d'elle-même. Elle apparaît sur le plan euclidien, bolyaïen ou riemannien avec des propriétés intrinsèques identiques; mais, à considérer son rayon, elle se différencie sur chacun des trois plans. La circonférence du cercle est égale, sur le plan euclidien, au produit du rayon par  $2\pi$ , ou  $2\pi R$ ; sur la sphère elle est moindre que ce produit, et sur la pseudosphère elle est plus grande. Or, ce sont précisément les propriétés intrinsèques de la sphère que nous avons besoin d'étudier. Puisqu'elles sont entièrement indépendantes du postulat des parallèles, la Sphérique la plus simple doit être non-euclidienne.

La notion familière que les étudiants ont de la sphère comme enveloppe d'un globe, sous son vieil aspect eucli-

dien, est aussi un avantage qui, d'accord avec tous les besoins que nous avons d'introduire dans l'étude de la Géométrie de nouvelles voies, décide en faveur de la Sphérique intrinsèque à l'encontre d'une planimétrie simplement elliptique, avec son plan unilatère sur lequel nous pouvons si étrangement passer d'une face sur l'autre sans le traverser. Dans la Sphérique, nous avons des matériaux familiers à présenter sous un nouveau jour, avec de nouvelles méthodes grâce auxquelles il sera acquis qu'on peut les obtenir aussi comme conquêtes analogues faites dans des domaines moins connus.

Quand, au lieu d'établir les théorèmes sur les angles polyèdres et de les transporter par section dans la Géométrie sphérique, nous cherchons à réaliser les théorèmes des angloïdes, en les considérant comme découlant déjà des propriétés les plus simples de la sphère, nous mettons cette théorie en pratique. Combien est-il important, combien est-il instructif de mettre en lumière les axiomes fondamentaux qui donnent par la logique pure toutes les relations des figures sphériques, et d'en voir surgir dans son entier développement le système familier des théorèmes qui constituent depuis si longtemps la Géométrie sphérique !

La vieille ligne droite, l'ancien grand cercle se dissipent, s'évanouissent, et à leur place nous trouvons la *recte*<sup>1</sup>, à laquelle s'applique maintenant l'ancienne définition de la ligne droite, « une ligne traversant l'espace entier de sorte qu'une partie quelconque de cet espace située le long d'une portion de cette ligne puisse venir coïncider avec chacun des côtés d'une autre partie quelconque. » En termes vulgaires, la recte ne dévie ni à droite ni à gauche tant que l'on ne quitte pas la sphère.

Mais le mouvement ne peut jamais être regardé comme notion fondamentale, et ce sont en réalité les axiomes qui

---

<sup>1</sup> *Note du traducteur.* M. Bruce Halsted a employé ici le terme de *Straightest* qui est le superlatif grammatical de l'adjectif anglais *Straight* signifiant *droit* ou *droite*. Dans l'impossibilité de trouver en français un mot équivalent à ce néologisme, nous avons pris la liberté de le créer, ce dont nous nous excusons, en francisant le mot latin qui a la même signification.

Voir l'ouvrage de M. E. HALSTED, *RATIONAL GEOMETRY*, chap. XV, *Pure Spherics*, p. 212 et suiv.

créent l'espace. Il y a une entité géométrique au-dessus même de la recte, le point; c'est la relation entre la recte et le point qui différencie la Sphérique de la Géométrie simplement elliptique. « La droite, » dit Mansion, « est la ligne déterminée par deux quelconques de ses points suffisamment rapprochés. » Mais que signifient ces mots : « suffisamment rapprochés ? »

Ce n'est que vers 1877 que j'ai pu résoudre ces difficultés en établissant le système de la Géométrie sphérique sur la base d'axiomes qui n'expriment que les relations fondamentales entre points et rectes. L'emploi du terme recte pour désigner la droite sphérique est une garantie de clarté. Le mot ligne a toujours été employé pour désigner le genre dans lequel la courbe représente l'espèce, et depuis quelque temps nous avons vu apparaître des courbes si déconcertantes et des lignes si étonnamment compliquées que la notion générale de ligne ne pourrait plus désormais trouver sa place dans les Eléments. Points et rectes sont sciemment acceptés comme éléments auxquels des postulats spécifiques donnent la précision requise. Pour éviter d'avance toute controverse, on ne doit réserver le mot définition que pour exprimer une possibilité de substituer un terme ou un symbole simple à des termes ou à des symboles plus compliqués.

Au lieu de la définition de Mansion, nous aurons alors ce que je préfère appeler un *axiome d'association* :

*I<sub>1</sub> A chaque point de la sphère en correspond toujours un et un seul qui avec le premier ne détermine pas une recte.*

Nous appellerons ce second point *l'opposé* du premier.

Après trois nouveaux axiomes ajoutés au précédent<sup>1</sup>, nous arrivons à une question vraiment fondamentale et très complexe, c'est-à-dire à l'arrangement d'une sorte d'éléments avec l'autre.

Le mot « ordre » est si commun que nous n'avons pas cons-

<sup>1</sup> Ces trois axiomes sont développés dans l'ouvrage de M. HALSTED, *Rational Geometry* p. 212-213 sous les énoncés suivants :

*I<sub>2</sub> Toute recte qui passe par un point passe par son opposé.*

*I<sub>3</sub> Deux points non opposés d'une recte la déterminent complètement, et sur toute recte il y a au moins deux points non opposés.*

*I<sub>4</sub> Il y a au moins trois points non situés sur une même recte.*

cience de sa complexité. Quelle différence y a-t-il entre AB et BA ? Cette notion ne renferme-t-elle pas un troisième, peut-être même un quatrième sens ? De deux instants dans la durée, l'un peut-il venir d'abord et l'autre ensuite sans que nous concevions également l'idée d'un passé ? Peut-il y avoir un présent et un futur sans la conception d'un passé ? Pour atteindre le futur, ne faut-il pas traiter le présent comme un passé ? En mettant de côté leur relation avec un segment ou un vecteur, qui n'est en vérité que le temps même, existe-t-il quelque différence entre le couple de points A, B et le couple de points B, A ? Etant donnés non des éléments, mais des points, et trois points seulement, peut-il y avoir entre ces trois points une relation nommée « ordre » ?

Lorsque les trois points A, B et C appartiennent seuls à un certain parcours, on peut dire qu'ils ont un ordre ou n'en ont pas selon que le parcours est ouvert ou fermé. Quand ils ont un ordre, on peut avoir

ABC avec CBA ,

ou

ACB avec BCA ,

ou

BAC avec CAB ,

suivant la nature du parcours.

Or, il existe une Géométrie particulière, purement qualitative, qui ne fait usage ni de la notion de droite ni de celle de plan, mais seulement des notions de ligne et surface. On l'a appelée *Analysis situs*. L'ordre y subsiste pourtant.

N'est-il donc pas possible que, sans rien perdre de sa généralité, l'ordre soit subjectif à l'idée de droite ? En ce cas, il sera plus simple et plus certain, plus exact et plus commode de nous dégager de l'idée générale d'ordre pour arriver à une idée plus spécifique que nous entendons appliquer uniquement aux points d'une droite ou d'une recte. Nous exprimons avantageusement cette idée par le terme nouveau de *situation entre* (betweenness).

En 1899, Hilbert a mis en lumière l'importance du mot *entre* pour désigner l'arrangement des points d'une même

droite<sup>1</sup>. Son argumentation a été extrêmement simplifiée par mon élève R.-L. Moore qui a prouvé d'une façon élégante que le dernier de ses axiomes était inutile et surabondant<sup>2</sup>. Mais le problème des points d'une recte est beaucoup plus difficile. Trois termes ne peuvent pas avoir un ordre circulaire, et dire que de trois points d'un cercle chacun est entre les deux autres, c'est dénaturer le sens du mot « entre. »

De là cette remarque inusitée, qu'un point quoique ne partageant pas une recte en deux segments, en fait pourtant un seul morceau sur lequel les points sont rangés dans un ordre naturel, c'est-à-dire que les mots « suit, » « précède, » « se trouve entre » leur sont applicables.

La grande valeur pratique de la « situation entre » est que, dès qu'on sait qu'un point est entre deux points, il est par cela même situé sur une recte particulière donnée. Mais si nous acceptons le terme « entre » dans le sens dénaturé dont il a été question plus haut, dire que B est entre A et C ne signifiera absolument rien, puisque quand A et C sont opposés, tout autre point de la sphère est avec eux sur une même recte, et, dans le sens dénaturé, entre eux.

Il en résulte donc que les tout premiers de nos axiomes de situation sur la sphère, pour spécifier comment on doit appliquer le terme « entre » aux points d'une recte tracée sur cette surface, doivent être les suivants :

II<sub>1</sub> *Aucun point n'est entre deux opposés.*

Ceci est complété par :

II<sub>2</sub> *Aucun point n'est entre son opposé et un troisième point quelconque.*

II<sub>3</sub> *Entre deux points quelconques non opposés il y a toujours un troisième point.*

En poussant ce système jusqu'au bout, nous avons une « situation entre » dont on peut faire emploi, par exemple, dans la définition suivante :

Deux points A et B non opposés sur une recte  $a$  forment ce que nous appellerons un *segment*, désigné par AB ou BA. Les points situés entre A et B sont dits points du segment

<sup>1</sup> *Fondements de la Géométrie*, axiomes de l'ordre.

<sup>2</sup> Voir : *Rational Geometry*, appendix I, p. 253-256.

AB ou situés à l'intérieur du segment AB. Les autres points de la recte  $a$  sont dits situés *hors* du segment. Les points A et B sont les extrémités du segment.

Les axiomes du groupe suivant concernent la congruence.

Les géomètres inexpérimentés croient que l'on peut épuiser brièvement ce sujet de la manière que voici :

Définition : Les figures géométriques qui peuvent être transportées l'une sur l'autre par mouvement sans déformation sont dites congruentes ( $\equiv$ ) . .

Théorème. *Un segment est congruent à lui-même retourné.*

Démonstration. Le point A peut-être appliqué sur le point B, et la direction AB appliquée sur la direction BA; alors le point B tombe sur le point A, car s'il en était autrement, la partie serait congruente au tout.

Mais ce raisonnement est entièrement inadmissible. Définir la congruence par le mouvement rigide est faux et trompeur, car la notion de mouvement rigide enveloppe, renferme et emploie l'idée de congruence. Nous devons, au contraire baser le concept de mouvement sur l'idée de congruence, asseoir la notion du mouvement sur les axiomes de congruence.

Un homme dont on a dit : « Ce fut de beaucoup le plus éminent Américain de la période coloniale, soit que nous considérions l'influence de ses travaux et de ses opinions sur ses contemporains dans son propre pays, et leur lointaine diffusion dans les autres, soit que nous ayons égard à la survivance de prestige et d'autorité qui perpétue encore son nom et sa mémoire, » Jonathan Edwards, qui mourut président de Princeton, s'exprime ainsi :

« Le mouvement est l'ensemble des positions successives d'un corps dans toutes les parties immédiatement contigues d'une distance quelconque, sans que ce corps continue à demeurer pendant un temps quelconque dans aucune d'entre elles. »

Le substratum géométrique du mouvement est ainsi la préexistence d'une série de figures congruentes. Donc, le mouvement d'un corps rigide suppose préalablement la congruence.



De plus nous ne devons pas employer l'idée importune de « direction. » Sur le plan, cette idée même suppose la théorie entière des parallèles. Sur la sphère, deux rectes n'ont jamais la même direction puisqu'elles ne sont point parallèles, et pourtant elles ont toutes deux la même direction puisqu'elles joignent un même point à un même point. On ne gagne rien en convenant d'appeler direction un rayon. De telle sorte que la congruence, dont l'idée va être précisée par des axiomes, doit précéder le mouvement. Mais justement ici l'on peut faire une simplification inattendue et encore insoupçonnée.

Dans son premier axiome de congruence, (III<sub>1</sub>), Hilbert énonce explicitement ceci : *Tout segment est congruent à lui-même, c'est-à-dire que l'on a  $AB \equiv AB$ .* Cet axiome est aujourd'hui superflu, ainsi que l'était l'axiome III<sub>4</sub> de Hilbert. C'est une proposition démontrable. La démonstration suivante est due à R.-L. Moore.

#### AXIOMES DE CONGRUENCE.

III 1. *Si A diffère de B et A' diffère de C', il y a sur le rayon A' C' un point et un seul B' tel que  $AB \equiv A' B'$ .*

III 2. *Si  $AB \equiv A' B'$  et  $A' B' \equiv A'' B''$ , on a  $AB \equiv A'' B''$ .*

III 3. *Si B est entre A et C, et B' entre A' et C'. et que  $AB \equiv A' B'$ ,  $BC \equiv B' C'$ , on a  $AC \equiv A' C'$ .*

LEMME. — *Si B et C sont sur le rayon AD, B' et C' sur le rayon A' D', et que  $AB \equiv A' B'$  et  $AC \equiv A' C'$ , B étant différent de C, B' est différent de C'.*

*Démonstration.* D'après l'axiome de situation, l'un des points B ou C doit être entre A et l'autre point ; admettons que ce soit B. Alors il y a en vertu de III 1 un point C'' tel que B' se trouve entre A' et C'', et que l'on a  $BC \equiv B' C''$ . Mais, de III 3 on tire également  $AC \equiv A' C''$ , et comme par hypothèse  $AC \equiv A' C'$  il en résulte d'après III 1 que C' est confondu avec C''. Puisque B' est entre A' et C'', C'' diffère de B' ; donc C' diffère de B'.

THÉORÈME. — *AB est congruent à AB.*

*Démonstration.* Si AB est un segment quelconque, il y a d'après III 1 un point B' du rayon AB tel que  $AB \equiv AB'$ , et un point B'' du même rayon tel que  $AB' \equiv AB''$ . De



$AB \equiv AB'$  et de  $AB' \equiv AB''$  nous déduisons donc, en vertu de III 2,  $AB \equiv AB''$ . Il en résulte, d'après III 1, que  $B''$  est confondu avec  $B'$ .

Puisque  $AB' \equiv AB''$ , nous avons alors  $AB' \equiv AB'$ , en même temps que  $AB \equiv AB'$ , et comme d'après le lemme, si  $B'$  différait de  $B$ ,  $B'$  différencierait de  $B'$  ce qui est impossible,  $B'$  coïncide avec  $B$ . Donc enfin  $AB$  est congruent à  $AB$ .

Cette démonstration est extrêmement instructive; elle fait voir jusqu'à quel point est justifié le bannissement du mot *axiome* de la Géométrie rationnelle. Ce n'est qu'en raisonnant de la sorte que l'on parvient à établir entièrement ce qu'est en réalité une preuve géométrique, et que l'on arrive à une compréhension parfaitement précise de ce que les axiomes contiennent actuellement. Il vaudrait toutefois mieux, dans un Traité didactique élémentaire, écarter quelques-unes de ces très délicates et laborieuses démonstrations, et en exprimer les résultats sous forme de postulats non nécessaires, mais commodes.

Nous définissons maintenant l'angle comme l'ensemble de deux rayons issus d'un point commun; nous posons alors l'axiome :

III<sub>4</sub> *D'un côté donné d'un rayon donné il y a un et un seul angle congruent à un angle donné.*

Ensuite, au lieu de formuler comme axiomes de congruence les deux propositions que voici,

III<sub>a</sub>. *Deux angles congruents à un même angle le sont l'un à l'autre, et,*

III<sub>b</sub>. (Euclide I, 4),

Nous prouvons ces axiomes comme des théorèmes en définissant la congruence des angles dans les mêmes termes que celle des segments et admettant :

III<sub>5</sub>. (Euclide, I, 8) *Si A, B et C ne sont pas sur une même droite, ainsi que A', B' et C', si C est entre B et D, et C' entre B' et D', et que l'on ait  $AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C'$ ,  $CA \equiv C'A'$  et  $BD \equiv B'D'$ , on a aussi  $AD \equiv A'D'$ .*

En lui-même, un couple de points est non seulement dénué d'ordre, mais même ne possède aucun sens. Au contraire, un couple de points pris sur une recte, c'est-à-dire un seg-

ment de cette recte a un sens, et la congruence  $AB \equiv BA$  doit être démontrée ou admise comme axiome. On peut l'admettre sans introduire aucune divergence entre le vieux concept de superposition et le concept plus fondamental de congruence.  $AB$  se superpose à  $BA$  par une demi-rotation autour de leur point milieu commun.

Sur la sphère, un angle ou la figure formée par deux rayons issus du même point initial, a un sens; mais au moins maintenant devons-nous faire une distinction entre les mots congruent et superposable.

Le mouvement analogue de la demi-révolution d'un segment autour de son milieu est la demi-révolution d'un angle autour de son rayon bissecteur. Quand deux figures du plan sont symétriques vis-à-vis d'un centre, chacune peut être amenée en coïncidence avec l'autre par une rotation de 180 degrés effectuée dans le plan autour de ce centre. Ceci subsiste lorsqu'au lieu de « plan » on dit « sphère; » un segment de recte  $AB$  et son inverse  $BA$  sont de telles figures, elles sont symétriques par rapport à leur commun milieu.

Quand deux figures sont symétriques par rapport à un axe dans le plan, on peut les faire coïncider en pliant le plan suivant l'axe, mais non plus par un glissement quelconque le long de ce plan. Pour les amener en superposition, il faut faire tourner l'une autour de l'axe de symétrie en effectuant une demi-révolution du plan. C'est dire que pour cette opération, il faut employer la troisième dimension de l'espace; la congruence de ces figures est donc basée sur la propriété qui fait que les deux côtés du plan sont également indiscernables, et qu'un plan est entièrement superposable à lui-même après retournement. Cette opération, qui consiste à plier le long d'une ligne, ne peut trouver de place dans une Géométrie strictement à deux dimensions; et, puisque nous sommes en Sphérique, c'est-à-dire en Géométrie à trois dimensions, nous devons dire que la surface externe de la sphère étant convexe, tandis que la face interne est concave, une partie de cette surface, après avoir été retournée, ne viendra pas se superposer à sa symétrique, mais seulement la toucher en un point unique.

Ainsi, deux figures qui sur la sphère sont symétriques par rapport à un axe ne peuvent pas être amenées à coïncider : appelons-les désormais symétriques tout court, et désignons-les par la notation  $\cdot | \cdot$ .

Un angle sphérique et son inverse  $\sphericalangle (h, k)$  et  $\sphericalangle (k, h)$  ne sont pas symétriques par rapport à un centre et ne peuvent être superposés.

Nous adopterons cette définition : Un angle est dit symétrique d'un autre quand il est congruent à l'inverse de ce dernier ; soit  $\sphericalangle (h, k) \cdot | \cdot \sphericalangle (v, w)$  quand  $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (v, w)$ . Alors, de  $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k)$  il résulte  $\sphericalangle (h, k) \cdot | \cdot \sphericalangle (k, h)$ . Mais ces deux derniers angles ne sont pas superposables et ne peuvent coïncider.

Pour ceux qui ont fait de la superposition idéale la base et le critérium de la congruence, le fait qu'un angle sphérique ne peut d'aucune manière être superposé à son inverse crée une différence radicale entre leur conception de la Géométrie sphérique et la conception familière de la Géométrie plane.

Un axiome de continuité pourrait nous aider à prouver la proposition suivante : *A l'intérieur de l'angle  $\sphericalangle (h, k)$  il y a un rayon  $l$  et un seul tel que  $\sphericalangle (h, l) \equiv \sphericalangle (l, k)$  ; mais il resterait à identifier ce rayon avec le rayon  $l'$  tel que  $\sphericalangle (k, l') \equiv \sphericalangle (l', h)$ . On pourrait décomposer quelques théorèmes, par exemple celui-ci :*

*Théorème. Deux angles droits sont à la fois congruents et symétriques.*

Mais, puisque la congruence ne dépend en aucune façon du concept subséquent de mouvement, rien de plus simple que d'admettre  $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (k, h)$ .

Les trois points qui déterminent un triangle n'ont ni ordre ni situation entre, dans le sens spécifique, car il pourrait se faire que deux d'entre eux eussent un caractère propre et le troisième un caractère différent ; mais, en tant que triade de segments, un triangle possède un *Umlaufssinn*, ou un sens de permutation individuel.

Si la congruence des segments est liée à celle des angles par un axiome des triangles, c'est-à-dire si elle est restreinte aux triangles qui ont le même sens de permutation, cela ne

nous donne pas la congruence des angles à la base dans le triangle isocèle; pour y parvenir, il est nécessaire, en ce cas, d'y ajointre un ou deux axiomes de continuité.

Nous voyons ainsi qu'en outre de la symétrie d'espace à une dimension impliquée par la congruence des segments et des angles avec leurs inverses, il y a une symétrie totalement différente d'espace à deux dimensions. Ceci n'est pas généralement admis dans l'étude ordinaire de la Géométrie plane, puisqu'un triangle peut avoir son tour de permutation changé quand on le retourne sur lui-même dans l'espace à trois dimensions. En Sphérique, ce retournement est impossible, si bien que, quoique cette symétrie d'espace à deux dimensions soit implicitement renfermée dans la non-indication d'un sens de circulation pour les triangles, il est pourtant d'usage de la signaler expressément en distinguant entre les triangles congruents et les triangles symétriques.

Si cette distinction avait été faite plus haut nommément pour les angles, nous aurions pu l'employer dans la définition que voici : *Deux triangles sont appelés symétriques quand leurs côtés correspondants sont congruents et leurs angles correspondants sont symétriques*. Mais on obtient une définition peut-être plus désirable en faisant prévaloir la différence entre le côté droit et le côté gauche d'un angle.

Après les axiomes de congruence, nous n'avons plus besoin des axiomes métriques, et, en fait de définition ou d'axiome, nous voici bien débarrassés de cette phrase ambiguë : « *La ligne droite est le plus court chemin entre deux points* ». A ce sujet, voyez George Hamel : *Ueber die Geometrien in deren die Geraden die kürzesten sind*. (Math. Annalen, Bd. 57, 1903).

Maintenant, pour ce qui est de la continuité, il semble plus nécessaire de faire appel à cet axiome en Sphérique qu'en Planimétrie; en effet, par exemple, on peut facilement dans le plan partager un segment en un nombre quelconque demandé de parties; sur la sphère, au contraire, nous ne pouvons nous passer d'un axiome de continuité même pour démontrer qu'un segment donné admet un tiers, c'est-à-dire que le tiers d'un segment donné existe.

La question de la continuité demeure néanmoins épineuse, et Hilbert lui-même n'a pas réussi à la traiter simplement. Son *Axiom der Vollständigkeit* et son *Axiom der Nachbarschaft* sont des morceaux grossiers dans sa belle et fine mosaïque. Russell dit, (*Principles of mathematics*, p. 440) : « Que l'axiome de continuité soit vrai au point de vue de notre espace actuel, c'est une question que je ne vois aucun moyen de résoudre. Car un tel problème doit être empirique, et il serait tout à fait impossible de distinguer empiriquement ce qui peut être appelé espace rationnel d'un espace continu. »

Dans ma *Rational Geometry* j'ai traité la Sphérique non-euclidienne sans l'aide d'aucun axiome quelconque de continuité.

George-Bruce HALSTED, Ecole Normale  
de Greeley, Colorado.

Traduction de M. P. BARBARIN, (Bordeaux).

---

## CONSTRUCTIONS SYNTHÉTIQUES RELATIVES A CERTAINES COURBES DU 3<sup>e</sup> DEGRÉ ET DE LA 3<sup>e</sup> CLASSE

---

Dans divers articles antérieurs<sup>1</sup> nous avons établi la génération des courbes provenant des formations synthétiques que nous avons désignées sur le nom de :

*Groupes du  $(n + 1)^e$  et du  $(n + p)^e$  degré, et  
Groupes de la  $(n + 1)^e$  et de la  $(n + p)^e$  classe.*

Nous nous proposons actuellement de développer la construction des tangentes, des points de tangence et des points de coupe relatifs à ces courbes. Ces constructions dépendent

---

<sup>1</sup> Ls. CRELIER : *C. R.*, 11 juin et 2 juillet 1906. — *L'Enseign. mathém.*, p. 455-462, 1906 et p. 107-119, 1907.