

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1908)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE 5me LIVRE DE GÉOMÉTRIE  
**Autor:** Hioux, V.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10985>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Il suit de là que : Si deux angles ont leurs côtés parallèles 2 à 2 leurs plans sont parallèles.

Nous nous bornons à l'énoncé de ces propositions ainsi que des suivantes.

14. — 1°. Deux plans parallèles P et Q sont partout également distants.

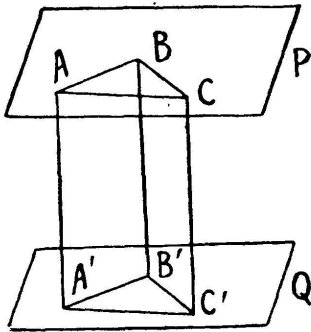


Fig. 6

Cela résulte des théorèmes I et III de ce paragraphe.

2°. Les portions de deux droites parallèles comprises entre deux plans parallèles P et Q sont égales.

3°. Enfin nous terminerons par le théorème suivant.

**THÉORÈME V.** Si deux plans P et Q sont parallèles, on peut, par une translation rectiligne, amener l'un d'eux en coïncidence avec l'autre.

*Démonstration.* Entre les deux plans donnés (fig. 6), plaçons 3 droites parallèles  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  non situées dans le même plan ; ces trois droites ont la même longueur  $l$ .

Si on fait subir au triangle ABC et par suite au plan P une translation rectiligne égale et parallèle à  $AA'$ , chacune des 3 droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  glissera sur elle-même ; et comme elles sont égales, les 3 points A, B et C viendront simultanément se placer sur les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  du plan Q.

Dès lors le plan P coïncidera avec le plan Q.

C. Q. F. D.

V. HIOUX (Paris).

de la forme  $3\mu \pm 1$ , on aura, pour l'une des valeurs de  $x$

$$x \equiv \frac{y_{\mu+1}}{y_{\mu}}, \quad \text{ou} \quad x \equiv ab \frac{y_{\mu-1}}{y_{\mu}} \equiv \frac{y_{2\mu}}{y_{2\mu-1}}.$$

Toutes ces propriétés peuvent être facilement contrôlées au moyen des formules de triPLICATION (6) et (7) et des théorèmes de divisibilité énoncés §§ 3.

Soit, comme exemple, à résoudre la congruence

$$x^3 + 3x - 1 \equiv 0 \pmod{47}.$$

La récurrence auxiliaire est toujours  $[1, 1]$ , et son discriminant 5 est non-résidu de 47. De plus  $y_{16} = 987 = 21 \times 47$ . La congruence proposée a donc trois racines ; l'une d'elles sera

$$x \equiv \frac{y_6}{y_5} \equiv \frac{8}{5} \equiv 11;$$

les autres sont 41 et 42.

C. CAILLER (Genève).

## SUR LE 5<sup>me</sup> LIVRE DE GÉOMÉTRIE

### PREMIÈRE PARTIE.

1. — L'article intitulé « Parallélisme et translation rectiligne », publié dans le numéro du 15 septembre 1907 de la Revue *L'Enseignement mathématique* (pp. 367-381), impose de nouvelles définitions pour le parallélisme de droites et de plans et par suite un nouveau procédé de démonstration des propriétés qui les concernent. Nous nous bornerons à énoncer simplement les propositions dont la démonstration est devenue classique et surtout celles qui sont relatives à la perpendicularité d'une droite et d'un plan.

On est convenu d'appeler *surface plane* ou *plan* une sur-

face telle que si on y marque deux points à volonté, la droite qui les joint est toute entière sur la surface.

On démontre qu'un plan est déterminé de position :

- 1° par deux droites qui se coupent ;
- 2° par trois points qui ne sont pas en ligne droite ;
- 3° par une droite et un point extérieur à cette droite ;
- 4° par deux droites parallèles.

Nous rappelons également les deux propositions suivantes :

1° L'intersection de deux plans qui se coupent est une ligne droite ;

2° Par un point pris hors d'une droite on peut lui mener une parallèle et une seule.

Ces préliminaires posés nous continuerons comme il suit.

### I. Droites parallèles. Angle de deux droites.

2. — THÉORÈME I. Si par deux droites parallèles  $AX$  et  $BY$  on fait passer deux plans  $P$  et  $Q$  se coupant suivant une droite  $CZ$ , cette droite est parallèle à chacune des deux autres.

*Démonstration.* Désignons par  $R$  (fig. 1) le plan des deux parallèles  $AX$  et  $BY$  : il forme avec les deux autres une figure invariable. Concevons qu'on lui fasse subir une translation *rectiligne* de directrice  $AX$  ; si on assujettit le plan  $R$  à glisser sur lui-même, chacun des plans  $P$  et  $Q$  glissera également sur lui-même. Quand le point  $A$  de  $AX$  aura décrit sur cette droite un segment

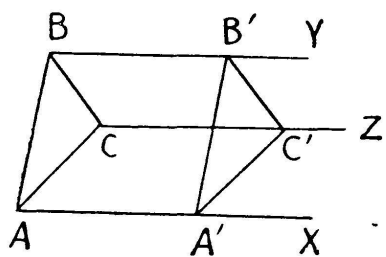


Fig. 1

segment  $AA' = l$ , le point  $B$  de  $BY$ , parallèle à  $AX$ , aura décrit sur cette droite un segment  $BB' = AA' = l$ . Le point  $C$  de  $CZ$  aura décrit dans le plan  $P$  un segment de droite égal et parallèle à  $AA'$  et dans le plan  $Q$  un segment de droite égal et parallèle à  $BB'$  ; or le point  $C$  a effectué un trajet *unique* qui appartient à chacun des plans  $P$  et  $Q$  ; il a donc décrit sur leur intersection  $CZ$  un segment  $CC' = l$  parallèle à la fois à  $AX$  et à  $BY$ . Donc l'intersection  $CZ$  des deux plans  $P$  et  $Q$  est parallèle à chacune de ces droites.

C. Q. F. D.

*Corollaire.* Si, dans l'espace, deux droites  $BY$  et  $CZ$  sont respectivement parallèles à une 3<sup>e</sup> droite  $AX$ , ces droites sont parallèles entre elles.

*Démonstration.* Un point  $C$  de la droite  $CZ$  (fig. 1) détermine avec  $AX$  un plan  $P$  et avec  $BY$  un plan  $Q$  lesquels se coupent suivant une droite  $\Delta$  passant par le point  $C$ ; or cette droite est parallèle à  $AX$  et à  $BY$ ; mais par le point  $C$  on ne peut mener qu'une seule parallèle à  $AX$ ; donc la droite  $\Delta$  se confond avec  $CZ$  et par conséquent les droites  $BY$  et  $CZ$  sont parallèles. C. Q. F. D.

*Remarque.* Ce théorème fournit la démonstration classique bien connue du théorème suivant :

**THÉORÈME II.** Si deux angles ont leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens, ces angles sont égaux.

Supposons que les deux angles  $ACB$ ,  $A'C'B'$  (fig. 1) répondent à la question, on peut aussi démontrer le théorème comme il suit :

Les deux côtés parallèles  $CA$  et  $C'A'$  déterminent un plan  $P$ ; de même les côtés parallèles  $CB$  et  $C'B'$  déterminent un plan  $Q$ , ces deux plans se coupent suivant une droite  $CC'$ . Cela posé, concevons que l'on fasse subir à l'angle  $ACB$  une translation rectiligne égale et parallèle à  $CC'$ ; si on assujettit le plan  $P$  à glisser sur lui-même, le plan  $Q$  glissera également sur lui-même et les droites  $CA$  et  $CB$  viendront simultanément coïncider avec leurs parallèles respectives  $C'A'$  et  $C'B'$ ; dès lors l'angle  $ACB$  coïncidera avec l'angle  $A'C'B'$ , donc ces angles sont égaux. C. Q. F. D.

*Angle de deux droites non situées dans le même plan.*

3. — DÉFINITION. Si deux droites orientées  $D$  et  $D'$  ne sont pas dans le même plan, on appelle angle de ces droites *l'angle plan* que l'on obtient en menant par un point  $O$  de l'espace deux demi-droites  $D_1$  et  $D'_1$  (fig. 2) respectivement parallèles aux deux premières et de même sens. Si on recommence la même construction pour un autre point  $O'$  les nouvelles demi-droites, respectivement parallèles à  $D$  et à  $D'$  le seront également

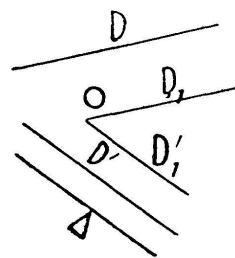


Fig. 2

à  $D_1$  et à  $D'_1$ . On aura donc deux angles plans ayant leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens et par conséquent ces angles seront égaux. Le point  $O$  peut donc être choisi arbitrairement et au besoin sur l'une des droites données. La définition qui précède est donc ainsi complètement justifiée.

Si l'angle plan ainsi formé est droit, on dit que les deux droites  $D$  et  $D'$  sont *perpendiculaires* ou bien *orthogonales*.

Il est bon d'observer que si une droite  $D$  est orthogonale à une droite  $D'$ , elle l'est également à toute parallèle  $\Delta$  à la droite  $D'$ , car la parallèle à  $\Delta$  par le point  $O$  est parallèle à  $D'$  et se confond par conséquent avec  $D'_1$ .

## II. Perpendicularité d'une droite et d'un plan.

4. — Les propositions qui font l'objet de ce paragraphe, le plus important du 5<sup>me</sup> livre, sont établies d'une façon très simple et en même temps très générale grâce à l'emploi de l'angle de deux droites, dans les *Eléments de Géométrie* de H. Bos et A. Rebière, publiés en 1881 par la Librairie Hachette et C<sup>ie</sup>.

Nous utiliserons dans ce qui va suivre les propositions suivantes :

1° Si une droite  $D$  est perpendiculaire à un plan  $P$ , toute parallèle  $D'$  à  $D$  est aussi perpendiculaire au même plan.

En effet puisque la droite  $D$  est orthogonale à une droite quelconque du plan  $P$ , il en est de même de sa parallèle  $D'$ , donc la droite  $D'$  est perpendiculaire au plan  $P$ .

2° Si deux droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles, tout plan  $P$  perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre. Cette proposition est une conséquence de la précédente.

3° Réciproquement : Si deux droites  $D$  et  $D'$  sont perpendiculaires à un même plan  $P$ , ces droites sont parallèles.

Si par un point  $M$  de  $D'$  on mène la parallèle à  $D$ , elle sera perpendiculaire au plan  $P$  ; donc elle se confondra avec  $D'$  et par conséquent  $D'$  est parallèle à  $D$ . — C. Q. F. D.

4° Enfin nous utiliserons également le *théorème des 3 perpendiculaires*.

## DEUXIÈME PARTIE.

## III. Parallélisme d'une droite et d'un plan.

5. — DÉFINITION. On dit qu'une *droite* et un *plan* sont parallèles lorsque la droite a tous ses points à la *même* distance du plan.

THÉORÈME I. Si une droite  $AB$  a deux points  $A$  et  $B$  à la même distance  $l$  d'un plan  $P$ , elle est parallèle au plan.

*Démonstration.* Des points  $A$  et  $B$  (fig. 3) menons les perpendiculaires  $AA'$  et  $BB'$  sur le plan  $P$ . Ces droites sont parallèles et déterminent un plan  $R$  qui coupe le plan  $P$  suivant la droite  $A'B'$ ; d'ailleurs, par hypothèse,  $AA' = BB'$ , donc, puisque ces droites sont en outre l'une et l'autre perpendiculaires sur  $A'B'$  le quadrilatère  $AA'B'B$  est un rectangle. D'un point  $M$  quelconque de  $AB$  menons dans le plan  $R$  la parallèle  $MM'$  à  $BB'$  par exemple. Cette droite est perpendiculaire au plan  $P$  et par suite perpendiculaire sur  $A'B'$ ; le quadrilatère  $BB'M'M$  a ses côtés parallèles 2 à 2, c'est donc un parallélogramme et, de plus, c'est un rectangle dans lequel on a  $MM' = BB'$ . Donc la distance au plan  $P$  des divers points de  $AB$  est partout la même; cette droite est donc parallèle au plan  $P$ . C. Q. F. D.

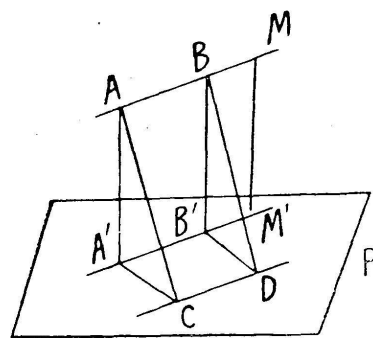


Fig. 3

6. — THÉORÈME II. Si une droite  $AB$  est parallèle à une droite  $CD$  du plan  $P$ , elle est parallèle à ce plan.

*Démonstration.* De deux points  $A$  et  $B$  de la droite  $AB$  (fig. 3) menons les perpendiculaires  $AA'$  et  $BB'$  sur le plan  $P$ . Menons ensuite dans le plan  $P$  les perpendiculaires  $A'C$  et  $B'D$  sur la droite  $CD$  et traçons enfin les droites  $AC$  et  $BD$ .

D'après le théorème des 3 perpendiculaires ces droites sont l'une et l'autre perpendiculaires sur  $CD$ ; elles sont par conséquent parallèles et en outre égales puisque les droites  $AB$  et  $CD$  sont parallèles par hypothèse. Dès lors les deux triangles rectangles  $AA'C$  et  $BB'D$  ont leurs hypoténuses

égales; en outre leurs angles aigus en A et en B sont égaux parce qu'ils ont leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens. Donc les deux triangles sont égaux et l'on a  $AA' = BB'$ . La droite AB a donc deux points à la même distance du plan P; elle est par conséquent parallèle au plan. C. Q. F. D.

7. — THÉORÈME III. Si par une droite AB parallèle à un plan P, on fait passer un plan Q qui le coupe suivant une droite CD, cette droite est parallèle à la droite AB.

*Démonstration.* De deux points A et B de la droite AB (fig. 3) menons d'abord les perpendiculaires  $AA'$  et  $BB'$  sur le plan P; menons ensuite dans le plan Q les perpendiculaires AC et BD à la droite CD. Ces deux couples de droites sont parallèles 2 à 2 et de même sens et par conséquent les angles aigus  $A'AC$  et  $B'BD$  sont égaux; dès lors si on trace les droites  $A'C$  et  $B'D$  on forme deux triangles rectangles,  $AA'C$  et  $BB'D$  qui ont un côté égal  $AA' = BB'$  adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ces triangles sont égaux; il en résulte  $AC = BD$ ; mais ces droites sont parallèles, et par conséquent le quadrilatère ACDB est un parallélogramme dans lequel CD est parallèle à AB. C. Q. F. D.

8. — THÉORÈME IV. Si une droite AB est parallèle à un plan P et que par un point C du plan on lui mène une parallèle, cette droite est contenue toute entière dans le plan P.

*Démonstration.* En effet (fig. 3) le point C et la droite AB déterminent un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD parallèle à la droite AB; mais par le point C on ne peut mener qu'une parallèle à la droite AB; donc la parallèle en question est la droite CD située toute entière dans le plan P.

*Remarque particulière.* Si par deux droites parallèles AX et BY d'un plan R (fig. 1) on fait passer deux plans P et Q qui se coupent suivant une droite CZ, cette droite est parallèle au plan R.

En effet, la droite CZ est parallèle à une droite AX du plan R, donc elle est parallèle à ce plan.

9. Pour terminer ce paragraphe nous nous bornerons à énoncer les propositions suivantes :

1° Si une droite AB est parallèle à un plan P toute per-

pendiculaire au plan P est perpendiculaire ou orthogonale à la droite AB.

*Corollaire.* — Une droite et un plan parallèles sont partout également distants: de sorte que si la droite a un de ses points dans le plan, elle y est contenue toute entière.

2° Les portions de deux droites parallèles comprises entre une droite AB et un plan P qui lui est parallèle sont égales.

3° Si une droite AB est parallèle à un plan P on peut, par une translation rectiligne, placer cette droite dans le plan.

*Démonstration.* — En effet, par la droite AB (fig. 3) menons un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD. Puisque ces deux droites sont parallèles on sait que par une translation rectiligne on peut amener AB à coïncider avec CD. La droite AB sera ainsi placée dans le plan P.

C. Q. F. D.

#### IV. — Parallélisme de deux plans.

10. — DÉFINITION. On dit que deux plans P et Q sont *parallèles* lorsque l'un des deux a tous ses points à la même distance de l'autre.

THÉORÈME I. — Si deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite LL', en deux points différents A et B, ces plans sont parallèles.

*Démonstration.* — Nous allons prouver que le plan P a tous ses points à la même distance AB du plan Q (fig. 4).

Dans le plan P prenons arbitrairement un point C et de ce point menons la droite CD perpendiculaire sur le plan Q. Les droites AB et CD perpendiculaires au plan Q sont parallèles; mais la droite BA est aussi perpendiculaire au plan P, donc il en est de même de sa parallèle DC. Le quadrilatère ABCD a donc ses quatre angles droits; c'est un rectangle dans lequel les côtés opposés AB et CD sont égaux. Le plan P a donc

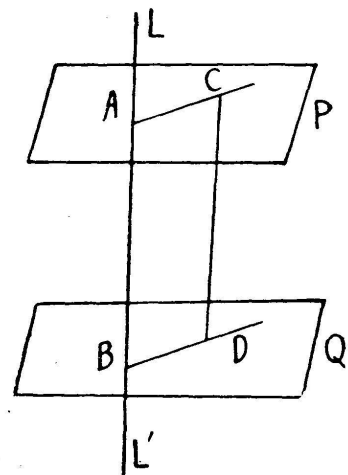


Fig. 4 .

tous ses points à la même distance  $AB = l$  du plan  $P$ ; donc ces deux plans sont parallèles. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Puisque  $DC = BA = l$  et que  $DC$  est perpendiculaire au plan  $P$  on constate que le plan  $Q$  a tous ses points à la même distance  $l$  du plan  $P$ . Si donc on envisage les deux plans  $P$  et  $Q$  au point de vue de la distance à l'un d'eux de tous les points de l'autre il y a *réciprocité* entre ces deux plans.

*Corollaire.* — Si deux plans  $P$  et  $Q$  sont parallèles, toute droite située dans l'un d'eux est parallèle à l'autre.

En effet, si cette droite est dans le plan  $P$  par exemple, elle a tous ses points à la même distance du plan  $Q$ ; donc elle est parallèle à ce plan. C. Q. F. D.

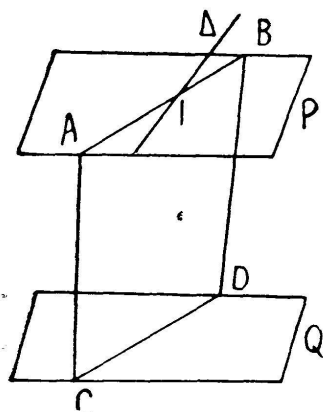


Fig. 5

11. — THÉORÈME II. Les intersections de deux plans parallèles  $P$  et  $Q$  par un 3<sup>e</sup> plan  $R$  sont parallèles.

*Démonstration.* Par une droite  $AB$  du plan  $P$  et un point  $C$  du plan  $Q$  (fig. 5) faisons passer un plan  $R$  qui coupe le plan  $Q$  suivant une droite  $CD$ . Puisque la droite  $AB$  du plan  $P$  est parallèle au plan  $Q$ , l'intersection  $CD$  des plans  $R$  et  $Q$  est parallèle à la droite  $AB$ . C. Q. F. D.

*Corollaire.* Si deux plans  $P$  et  $Q$  sont parallèles, toute droite  $\Delta$  qui rencontre l'un, rencontre l'autre.

*Démonstration.* Supposons que la droite  $\Delta$  (fig. 5) rencontre le plan  $P$  au point  $I$ . Par cette droite et un point  $C$  du plan  $Q$  faisons passer un plan  $R$ .

Il coupe les plans  $P$  et  $Q$  suivant deux droites parallèles  $AB$  et  $CD$ ; or, la droite  $\Delta$  rencontre  $AB$  au point  $I$ , donc elle ira rencontrer sa parallèle  $CD$  dans le plan  $R$ ; donc la droite  $\Delta$  rencontre le plan  $Q$ . C. Q. F. D.

12. — THÉORÈME III. Si deux plans  $P$  et  $Q$  sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

*Démonstration.* Supposons (fig. 4) que les plans  $P$  et  $Q$  soient parallèles. Si, en un point  $A$  du plan  $P$ , on mène la perpendiculaire à ce plan elle ira rencontrer le plan  $Q$  en un cer-

tain point B. Par la droite AB faisons passer un plan R ; il coupera les deux plans P et Q suivant deux droites parallèles AC et BD. Or, la droite AB, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire sur AC ; elle est par conséquent perpendiculaire à sa parallèle BD dans le plan. On voit ainsi que la perpendiculaire AB au plan P est perpendiculaire à une droite quelconque BD passant par son pied dans le plan Q ; donc, toute perpendiculaire au plan P est perpendiculaire au plan Q. C. Q. F. D.

*Corollaire.* Si deux plans P et Q sont parallèles à un même plan R, ces plans sont parallèles.

*Démonstration.* En effet, une perpendiculaire quelconque au plan R sera perpendiculaire à chacun des plans P et Q. Donc (th. I) ces plans sont parallèles. C. Q. F. D.

*Remarque.* Si deux plans parallèles P et Q ont un point commun M ces plans coïncident.

*Démonstration.* La perpendiculaire en M au plan P, par exemple, est également perpendiculaire au plan Q qui lui est parallèle ; il suit de là que les deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite, au même point M ; donc ces plans coïncident. C. Q. F. D.

13. — THÉORÈME IV. Par un point A, extérieur à un plan Q, on peut mener un plan P parallèle au plan Q, et on n'en peut mener qu'un seul.

*Démonstration.* Du point A (fig. 4) on peut mener la perpendiculaire AB sur le plan Q ; on peut ensuite mener au point A un plan P perpendiculaire sur AB. Ce plan sera parallèle au plan Q puisqu'ils seront l'un et l'autre perpendiculaires à la même droite AB.

Si on imagine par le point A un autre plan P' parallèle au plan Q, les deux plans P et P' parallèles au même plan Q seront parallèles entre eux, et à cause de leur point commun A ces plans coïncideront. Donc par le point A on peut mener un plan et un seul parallèle au plan Q. C. Q. F. D.

*Corollaire.* Si par un point A, extérieur à un plan Q, on mène des parallèles en nombre quelconque à ce plan, elles sont toutes situées dans le plan P parallèle au plan Q et passant par le point A.