

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	10 (1908)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 L'IMPORTANCE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DES VECTEURS DANS LE CALCUL VECTORIEL GÉNÉRAL
Autor:	Burali-Forti, C.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-10981

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

marque qui peut intéresser les lecteurs géomètres ; les propriétés de l'étendue vectorielle en géométrie générale, telles que je les ai exposées dans l'article précité, vont être éclairées d'un nouveau jour par le théorème d'Ampère-Stokes.

En effet, le vecteur *tourbillon* d'un vecteur donné, correspond à une distribution continue et même dérivable ; or, les deux caractères de *dérivabilité* et de continuité, dont le premier contient d'ailleurs le second, ne sont pas essentiellement euclidiens. De là l'extension du théorème d'Ampère-Stokes en géométrie générale ; enfin, cette extension nous donne immédiatement et d'une manière intuitive le théorème suivant :

L'espace euclidien est le seul dans lequel puisse exister un réseau triple orthogonal avec conservation de la longueur des arcs correspondants ; en d'autres termes, le théorème d'Ampère-Stokes nous montre de suite que si l'élément linéaire ds d'un espace est réductible à la forme :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

cet espace est nécessairement euclidien.

Ce rapprochement entre la *méthode classique* des $(ds)^2$ et ma *méthode vectorielle* pour l'étude de la géométrie générale me paraît intéressant à signaler.

J. A.

L'IMPORTANCE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DES VECTEURS DANS LE CALCUL VECTORIEL GÉNÉRAL

Une fois établi (et cela nous semble logique) que : « *l'unification des notations vectorielles doit être faite en tenant compte des résultats auxquels conduira l'analyse, complète et rationnelle, des entités géométriques et mécaniques, de leurs opérations et de leurs fonctions,* » nous croyons utile d'indiquer brièvement l'état actuel des recherches relatives à la question, et quelles sont les entités qui doivent encore être étudiées par rapport à leur théorie générale et à leurs applications.

M. R. MARCOLONGO et moi, nous avons étudié¹ sous l'as-

¹ *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* Nota I, tomo XXIII (1^o sem. 1907) : Nota II, t. XXIV ; 2^o sem. 1907) : Nota III, t. XXIV : Nota IV, t. XXV (1^o sem. 1908) : Nota V (ed ultima), t. XXVI (2^o sem. 1908).

pect historique, scientifique, logique et pratique, les systèmes vectoriels qui sont employés actuellement. Avec les entités *nombre réel*, *point*, *vecteur*, et les opérations et fonctions *somme* (+), *différence* (-), *produit par un nombre* (symbole sous-entendu), *produit interne* (\times), *produit vectoriel* (\wedge), *rotation dans un plan* ($e^{i\varphi}$), *gradient* (grad), *divergence* (div), *rotation* (rot), nous avons obtenu le SYSTÈME MINIMUM, qui, les notations exclues, coïncide avec le système de GIBBS. Par ce système nous avons déduit le *calcul barycentrique* de MÖBIUS (Note II), les *quaternions* de HAMILTON (Note III) et les *formations géométriques* de GRASSMANN (Note V); et ces dernières, sous une forme très simple, analogue à celle donnée par M. G. PEANO, et suivie par M. CARVALLO et par d'autres auteurs. Nous avons aussi fait observer (Note V) que le système minimum est *insuffisant*. Il doit être complété par les transformations linéaires des vecteurs, *nécessaires* pour la résolution de plusieurs questions, et par les formations géométriques de GRASSMANN-PEANO, *nécessaires* lorsque les *droites*, les *plans*, les *systèmes de forces appliquées à un corps rigide*, doivent-être considérés comme des entités *autonomes*. Les barycentres et les quaternions sont insuffisants dans ce but.

L'interprétation erronée des concepts et des symboles de HAMILTON a donné naissance à certaines notations vectorielles qui, sans l'usage systématique des quaternions, sont *inexactes*, *impropres* et *inopportunes*. Nous avons tâché de démontrer cela, M. MARCOLONGO et moi, dans la Note III.

J'ai encore examiné la question des quaternions dans ma Note¹ « I Quaternioni di HAMILTON e il calcolo vettoriale » dans le but d'établir exactement quelle est la relation entre les quaternions et les transformations linéaires, et de montrer que le *produit complet* (détaché des *vrais* quaternions) ne possède point la *vertu magique* que quelque auteur lui attribuait. Je rappelle, ici, le principal résultat : *les quaternions forment, il est vrai, un système à quatre dimensions, mais ce système n'est pas linéaire, dans la complète signification du mot « linéaire ».*

¹ Atti dell'Accademia delle scienze di Torino, 1908.

Si nous observons que dans plusieurs questions de Physique et de Mécanique on rencontre des *vraies* transformations linéaires¹ qui ont 6 ou 9 ou 18 dimensions, il est bien aisé d'en déduire que les quaternions sont entièrement insuffisants pour établir un calcul mécanique *complet*.

Les applications du système minimum que nous avons données dans la Note IV, prouvent amplement comment, aussi dans les questions qui ne réclament pas l'usage des entités de GRASSMANN, il est bien plus simple de faire usage des vecteurs que des quaternions. Mais les études que nous venons d'indiquer, ne montrent pas encore comment on peut résoudre la question de la *composition des rotations autour d'axes qui ne sont point parallèles*, avec un calcul formal aussi simple que celui qui résout les autres questions. Il est bien connu que le problème est résolu par les quaternions avec un *symbole à joug*. Il est donc permis de douter que l'on doive toujours dépendre de la théorie des quaternions pour la résolution de ce problème fort important en Géométrie et en Mécanique. Mais ce doute n'est point légitime. Pour les *rotations*, et en général pour tous *mouvements des systèmes rigides*, on peut faire usage des *transformations linéaires des vecteurs en vecteurs*, transformations nécessaires et qui ont un algorithme bien plus simple que celui des quaternions.

J'indique, ici, les principaux résultats en faisant usage des notations que nous avons proposées.

1. — Une *transformation linéaire de vecteurs en vecteurs* ou bien une *homographie vectorielle* σ , est toujours décomposable, et d'une seule manière, dans la somme de deux homographies μ, λ , caractérisée par les conditions

$$\mathbf{x} \times \mu \mathbf{y} - \mathbf{y} \times \mu \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} \times \lambda \mathbf{y} + \mathbf{y} \times \lambda \mathbf{x} = 0$$

vérifiées quels que soient les vecteurs \mathbf{x}, \mathbf{y} .

Nous appellerons *dilatation de σ* , ou $D\sigma$, l'homographie μ ; car μ donne, dans les *déformations des systèmes*, la *dilatation*, ou *vibration*, et l'*ellipsoïde* (de LAMÉ) correspondent.

¹ C. BURALI-FORTI, *Atti Accad. Torino* : Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella Meccanica (1906) : Sulle omografie vettoriali (1907) : Funzioni vettoriali (1907).

L'homographie λ donne la *rotation* de la déformation. Précisément : il existe un vecteur u tel que, quel que soit le vecteur x ,

$$\lambda x = u \wedge x.$$

Le vecteur u sera appelé *vecteur de σ* , ou $V\sigma$.

On a donc, identiquement,

$$\sigma = D\sigma + (V\sigma) \wedge \text{ ou bien } \sigma x = D\sigma x + (V\sigma) \wedge x.$$

Si $D\sigma$ est un nombre réel (la quadrique de dilatation est une *sphère*) alors : l'*homographie σ* , à laquelle on donne comme *champ d'application*¹ le champ formé par les vecteurs normaux au $V\sigma$, est précisément le quaternion dont $D\sigma$ est le scalaire et $V\sigma$ est le vecteur ; mais cette transformation spéciale n'est pas une homographie.

Avec l'homographie σ il est important de considérer la *conjuguée de σ* , ou $K\sigma$, définie par

$$K\sigma = D\sigma - (V\sigma) \wedge.$$

L'*invariant troisième de σ* , ou $\text{inv}_3\sigma$, est le nombre réel

$$\frac{\sigma u \wedge \sigma v \times \sigma w}{u \wedge v \times w},$$

quels que soient les vecteurs, non complanaires, u, v, w .

Les *invariants deuxième et premier de σ* , ou $\text{inv}_2\sigma, \text{inv}_1\sigma$, sont définis par la relation

$$\text{inv}_3(x + \sigma) = x^3 + (\text{inv}_1\sigma) x^2 + (\text{inv}_2\sigma) x + \text{inv}_3\sigma$$

quel que soit le nombre réel x .

L'algorithme général des homographies est fort intéressant ; nous citons seulement les formules suivantes² :

$$x \times \sigma y = y \times K\sigma x$$

$$\sigma(x \wedge y) = (\text{inv}_1\sigma) x \wedge y - x \wedge K\sigma y + y \wedge K\sigma x$$

$$\sigma \{ (K\sigma x) \wedge (K\sigma y) \} = K\sigma \{ (\sigma x) \wedge (\sigma y) \} = (\text{inv}_3\sigma) x \wedge y.$$

¹ Voir note p. 412.

² M. MARCOLONGO et moi, nous espérons publier prochainement une étude complète de la théorie des homographies vectorielles et de leurs applications à la Physique et à la Mécanique.

2. — Nous appellerons *mouvements vectoriels*¹, les homographies σ qui ne changent pas la longueur des vecteurs,

$$(\sigma \mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^2.$$

Elles sont caractérisées par la condition

$$\sigma(K\sigma) = 1$$

et on a toujours

$$\text{inv}_3\sigma = \pm 1.$$

Si σ, λ sont des *mouvem. vect.*, $\lambda\sigma, K\sigma, \sigma^{-1}$, sont aussi des *mouvem. vect.*, et on a

$$\sigma(V\sigma) = \pm V\sigma \text{ selon que } \text{inv}_3\sigma = 1 \text{ ou } \text{inv}_3\sigma = -1.$$

Les propriétés suivantes sont fondamentales.

Si $V\sigma \neq 0$ et $\text{inv}_3\sigma = 1$, alors $\sigma\mathbf{x}$ est le vecteur qu'on obtient en donnant au vecteur \mathbf{x} une rotation autour du vecteur $V\sigma$, d'un angle φ tel que

$$\sin \varphi = \text{mod } V\sigma, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} (\text{inv}_1\sigma - 1);$$

ainsi les « mouvem. vect. » σ tels que $V\sigma \neq 0$ et $\text{inv}_3\sigma = 1$, sont des rotations autour du $V\sigma$.

Si $V\sigma = 0$ alors $\sigma^2 = 1$ et le vecteur $\mathbf{x} + \sigma\mathbf{x}$ a une direction fixe (qui ne dépend pas de \mathbf{x} , mais varie avec σ) ou est parallèle à une orientation fixe : les « mouvem. vect. » σ tels que $V\sigma = 0$, sont des symétries par rapport à une direction ou à une orientation, selon que $\text{inv}_3\sigma = 1$ ou $\text{inv}_3\sigma = -1$.

Cela justifie la dénomination *mouvement vectoriel*.

3. — Voici des *applications*.

Soient : \mathbf{i}, \mathbf{u} des vecteurs unitaires ; $\alpha = \text{ang}(\mathbf{i}, \mathbf{u})$; σ, λ les rotations autour de \mathbf{i} et \mathbf{u} des angles φ, ψ .

Un *calcul direct*, bien plus simple que le calcul correspondant avec les quaternions, prouve que $\lambda\sigma$ est la rotation

¹ J'avais déjà envoyé cet article à *L'Ens. Mathém.* lorsque j'ai reçu l'intéressant mémoire de M. Mario PIERI, *La Geometria elementare istituita sulle nozioni di punto et sfera (Mem. delle Soc. ital. delle Scienze, série 3^a, t. XV)*. Je préfère la nomenclature de M. Pieri à celle dont j'ai fait usage dans cette note. Au lieu de « *mouv. vect.* » il vaudra mieux dire « *isométrie vectorielle* », et tout simplement « *isométrie* » au lieu de « *mouv. géom.* » (n° 4).

autour du vecteur

$$\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \mathbf{i} + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{u} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{i} \wedge \mathbf{u}.$$

de l'angle

$$- 2 \cos^{-1} \left\{ \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \alpha - \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right\}.$$

Si $\varphi = \psi = \pi$, c'est-à-dire, si σ , λ sont les symétries par rapport à \mathbf{i} et \mathbf{u} , alors un calcul direct, fort simple, prouve que $\lambda \sigma$ est la rotation autour de $\mathbf{i} \wedge \mathbf{u}$ de l'angle 2α .

On parvient à ces résultats plus rapidement, comme on sait, par des considérations géométriques¹, mais cela ne diminue l'importance du calcul direct qui, dans certains cas, est nécessaire.

4. — Nous appellons *mouvement géométrique*, toute transformation linéaire qui change une forme géométrique de premier ordre de GRASSMANN en une forme du même ordre, avec la condition de transformer points en points et vecteurs en vecteurs de même module². La forme générale d'un *mouv. géom.*, est

$$\theta = \begin{pmatrix} B, & \sigma u, & \sigma v, & \sigma w \\ A, & u, & v, & w \end{pmatrix}$$

où A , B sont des *points* et σ est un *mouv. vect.*

Supposons par exemple, que $V\sigma \neq 0$ et $\text{inv}_3 \sigma = 1$. On a identiquement, étant P un point quelconque,

$$P = A + (P - A)$$

et par conséquent,

$$(1) \quad \theta P = B + \sigma(P - A), \quad \theta P - P = B - A + \sigma(P - A) - (P - A);$$

mais $\sigma(P - A)$ et $P - A$ ont la même projection sur une droite parallèle à $V\sigma$ et la dernière formule donne

$$(\theta P - P) \times V\sigma = (B - A) \times V\sigma.$$

¹ Voir, par ex., M. Pieri, *loc. cit.*

² Une transformation de points en points ne peut pas être linéaire, car « la somme de deux points » ou le produit d'un point par un nombre n'est pas un point. Les transformations que nous venons de considérer conservent la *masse* des formes du premier ordre, et la *longueur* des vecteurs.

Si, donc, nous posons

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times \mathbf{V}\sigma}{(\mathbf{V}\sigma)^2} \mathbf{V}\sigma,$$

les points $\theta\mathbf{P}$, $\mathbf{P} - \mathbf{v}$, ou bien, $\mathbf{P} + \mathbf{v}$, $\theta\mathbf{P}$, ont la même projection sur une droite parallèle à $\mathbf{V}\sigma$.

Menons par le point A le plan γ normal à $\mathbf{V}\sigma$: le point $\mathbf{B} - \mathbf{v}$ est placé sur ce plan. Sur le plan γ existe un point O, et un seul, tel que

$$\mathbf{O} + \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{O}) = \mathbf{B} - \mathbf{v};$$

mais d'après la première des formules (1), nous avons

$$\begin{aligned} \theta\mathbf{P} - \mathbf{v} &= \mathbf{B} - \mathbf{v} + \sigma(\mathbf{P} - \mathbf{A}) = \\ &= \mathbf{O} + \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{O}) + \sigma(\mathbf{P} - \mathbf{A}) = \mathbf{O} + \sigma(\mathbf{P} - \mathbf{O}), \\ \theta\mathbf{P} &= \mathbf{O} + \sigma(\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \mathbf{v}; \end{aligned}$$

donc : *le mouvement géométrique θ est un mouvement hélicoïdal dont l'axe est parallèle à $\mathbf{V}\sigma$ et la translation est \mathbf{v} .* (Théorème de Mozzi).

Il est bien connu que : *le produit de deux symétries par rapport à deux axes est un mouvement hélicoïdal*, etc. — La démonstration formale est fort simple. Soient : \mathbf{i} , \mathbf{u} vecteurs unitaires parallèles aux axes donnés; A, B les points qui donnent la moindre distance entre les deux axes ($\mathbf{B} - \mathbf{A}$ est parallèle à $\mathbf{i} \wedge \mathbf{u}$); σ , λ les *mouv. vect.*, qui sont les symétries par rapport à \mathbf{i} et \mathbf{u} . Si P est un point, le symétrique de P par rapport à l'axe Ai est

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A} + \sigma(\mathbf{P} - \mathbf{A}),$$

et le symétrique de \mathbf{P}_1 par rapport à l'axe Bu est

$$\theta\mathbf{P} = \mathbf{B} + \lambda(\mathbf{P}_1 - \mathbf{B}) = \mathbf{B} + \lambda(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \lambda\sigma(\mathbf{P} - \mathbf{A});$$

mais

$$\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{A} \quad (\text{hypothèses})$$

et donc

$$\theta\mathbf{P} = \mathbf{A} + 2(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \lambda\sigma(\mathbf{P} - \mathbf{A})$$

par laquelle résulte (n° 3) que : *la droite AB est l'axe du mouvement hélicoïdal, 2(B - A) en est la translation et 2 ang (i, u) la rotation.*

C. BURALI-FORTI (Turin).