Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE1
Autor: Jules Andrade
Kapitel: II. — Le problème du dallage de la sphère
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10980

Or des égalités précédentes on déduit :

$$A + B + C = 6^{dr} - (a' + b' + c') ,$$

c'est-à-dire :

$$A + B + C > 6^{dr} - 4^{dr} \text{ ou } 2^{dr} .$$

Nous retrouvons ainsi l'existence de l'excès sphérique, comme propriété corrélative du *théorème du parapluie.* (Chap. III.)

Cherchons de même un théorème corrélatif du théorème qui montre toute face d'un trièdre plus petite que la somme des deux autres ; soit a' la *plus grande face* du trièdre T' on a :

$$a' < b' + c'$$

ou en vertu des égalités précédentes :

$$2 - A < 2 - B + 2 - C \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C \ .$$

Ainsi : *dans un angle trièdre le plus petit dièdre augmenté de deux droits dépasse la somme des deux autres dièdres.*

Remarque. — Le théorème sur l'excès sphérique peut encore s'énoncer ainsi :

Dans un triangle sphérique, un angle extérieur est plus petit que la somme des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.

II. — Le problème du dallage de la sphère.

Nous appelons *polygone sphérique convexe* une portion de la sphère, limitée par des arcs de grand cercle, mais située tout entière dans une même hémisphère bornée par chaque côté du polygone prolongé en circonférence entière de grand cercle.

On voit sans peine que si on considère un polygone convexe *régulier*, c'est-à-dire ayant ses angles égaux entre eux et ses côtés égaux entre eux, les sommets de ce polygone seront tous situés sur un même petit cercle dont le pôle sera dit un pôle du polygone.

Problème. — Quels sont les polygones réguliers sphériques convexes que l'on peut reproduire et réunir, contigus par côtés et par sommets, de manière à recouvrir toute la surface de la sphère, *sans répétition ni lacune?* en d'autres termes quels sont les polygones réguliers convexes aptes à *daller* la surface de la sphère? Désignons par x le *nombre* des polygones réunis autour d'un même sommet ou *nœud* du réseau de dallage, x angles contigus formant 4 angles droits, chaque angle du polygone vaut $\frac{4}{x}$ droits. D'autre part, soit y le nombre des côtés de chaque polygone, ou *dalle*. Du pôle de chaque dalle, on verra chaque côté de la dalle sous un angle sphérique égal à $\frac{4}{y}$ droits; le triangle isocèle qui a pour sommet ce pôle et pour base un côté de la dalle a un *excès sphérique* égal à $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2$ droits.

Ce nombre mesure la surface sphérique de la y^{me} partie de la dalle quand on prend comme unité le triangle trirectangle qui vaut le $\frac{1}{8}$ de la sphère; avec cette unité l'aire d'une dalle est donc $\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2\right) y$; dès lors, si nous nommons z le nombre des *dalles* dont l'ensemble recouvre la sphère, on aura *entre les trois nombres* ENTIERS x, y et z la relation :

$$\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2\right) z \,.\, y = 8$$

que nous pourrons écrire ainsi :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} = \frac{2}{zy}\ ; \tag{1}$$

le problème du dallage sphérique revient donc à trouver tous les nombres entiers x, y, z unis par cette relation, ou comme on dit encore à résoudre l'équation (1) en nombres entiers.

Ce problème d'arithmétique est d'ailleurs très facile; nous nous contenterons ici d'en énoncer les solutions, qui sont au nombre de cinq, savoir :

1^re^ solution : $x = 3$, $y = 3$, $z = 4$;
2^me^ solution : $x = 3$, $y = 4$, $z = 6$;
3^me^ solution : $x = 3$, $y = 5$, $z = 12$;
4^me^ solution : $x = 4$, $y = 3$, $z = 8$;
5^me^ solution : $x = 5$, $y = 3$, $z = 20$.

Ces cinq modes de dallages sphériques font évidemment connaître aussi cinq solides, limités par des polygones réguliers qui sont réunis par leurs côtés et assemblés par angles polyèdres réguliers ; ces solides, nommés *polyèdres réguliers convexes,* ont tous leurs sommets situés sur la surface sphérique que l'on a envisagée.

III. — Triangles sphériques et rotations successives d'un solide.

Glissement sphérique. — Quand un corps solide reste cloué par un point fixe O et qu'il se meut, ce mouvement se nomme un mouvement de *pivotement;* une portion du solide qui est à un instant sur une surface sphérique ayant le point O comme centre demeurera sans cesse sur la surface de cette même sphère. Comme trois points définissent un solide, on peut dire que le mouvement de pivotement équivaut au glissement d'une figure sphérique sur sa sphère.

1° *Effet de deux rotations successives.* Soient marqués sur la sphère considérée les pôles de deux rotations successives; sans doute, pour chaque rotation on pourrait hésiter entre deux pôles, mais nous adopterons le pôle sur lequel un observateur marchant sur la sphère, étant posé tête hors la sphère, verrait s'accomplir la rotation considérée dans un sens déterminé par rapport à sa gauche et à sa droite; A (fig. 72) est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *première* rotation; B est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *deuxième* rotation.

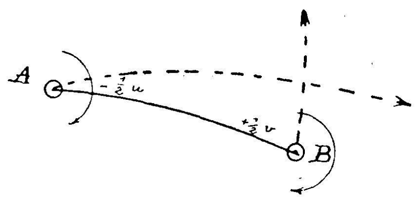

Fig. 72.

On peut même supposer que ces rotations soient chacune moindre qu'un demi-tour, soit alors u la rotation sur A vue par l'observateur posé sur le pôle A dans le sens des aiguilles d'une montre, soit de même v la rotation également orientée sur le pôle B.

Nous nous proposons de construire un point de la figure sphérique entraînée qui finalement n'aura pas bougé; à cet effet joignons le premier pôle A au second par un arc de grand cercle AB moindre qu'une demi-circonférence.