Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE1

Autor: Jules Andrade

Kapitel: I. — Triangles sphériques supplémentaires et trièdres associés.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10980

vaut le fuseau A moins le triangle ACB ; le triangle (3) vaut le fuseau C moins le symétrique A′C′B′ du triangle ACB, d'ailleurs équivalent à ce dernier ; chaque fuseau étant mesuré par 2 fois son angle mesuré lui-même avec l'angle droit, nous aurons, par la décomposition de l'hémisphère ci-dessus définie,

$$(2A - \text{aire } ACB) + (2B - \text{aire } ACB) + (2C - \text{aire } ABC) + \text{aire } ACB = 4$$

d'où :

$$\text{aire } ABC = (A + B + C - 2) \text{ droits.}$$

c'est-à-dire :

Théorème. — *L'aire d'un triangle sphérique est mesurée par l'excès sur deux droits de la somme de ses angles ;* c'est ce qu'on nomme *l'excès sphérique du triangle.*

CHAPITRE VI

Géométrie qualitative de la sphère. — Déplacements de pivotement d'un corps solide.

Où s'arrête la géométrie qualitative ? Où commence la géométrie métrique ?

I. — Triangles sphériques supplémentaires et trièdres associés.

En comparant les aires des triangles sphériques situés sur une même surface sphérique, nous avons reconnu que la somme des trois angles d'un triangle sphérique surpasse deux angles droits par un *excès* dont la valeur est proportionnelle à l'aire du triangle ; cet excès est ce qu'on appelle l'excès sphérique du triangle.

On peut se proposer d'établir directement l'existence de cet excès sphérique soit sur le triangle sphérique, mais sans passer par la notion d'aire, soit sur l'angle trièdre dont le triangle est l'image.

C'est cette dernière méthode que nous suivrons.

Nous allons définir d'abord les trièdres *réciproques* ou *associés,* dont les images sphériques seront deux triangles dits *polaires* ou *supplémentaires.*

Envisageons (fig. 69) un trièdre de sommet S et dont les arêtes sont les trois demi-droites SA, SB, SC. Par S élevons une droite perpendiculaire à la face BSC du trièdre, et nous aurons soin de la tirer du même côté de cette face que celui où se trouve l'arête SA, nous obtenons ainsi la demi-droite SA′; en répétant cette construction pour chaque face, nous formons un nouveau trièdre de sommet S et dont les arêtes sont SA′, SB′, SC′.

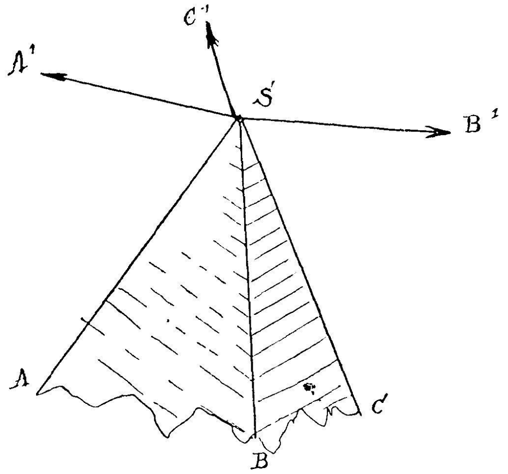

Fig. 69.

Ces deux trièdres sont dans une corrélation telle que *toute face* de l'un orientée par rapport à l'arête opposée, engendre une *arête correspondante* du second trièdre ; on les appelle deux trièdres *associés* ou *réciproques* ou encore : deux trièdres *supplémentaires ;* ces désignations se rattachent à des propriétés aussi simples que remarquables que nous allons maintenant établir.

1° Le mode d'association des deux trièdres est *réciproque.* Faisons d'abord la remarque suivante qui est une vérité de la Palice : considérons un assemblage de deux demi-droites (fig. 70) tirées par un point O d'un plan P, et dont l'une D est perpendiculaire à ce plan ; ces demi-droites seront d'un même côté du plan P ou bien de part et d'autre de ce plan suivant que l'angle de ces demi-droites sera *aigu* ou *obtus ;* la remarque se justifie immédiatement en considérant l'intersection OU du plan P avec le plan passant par les droites données.

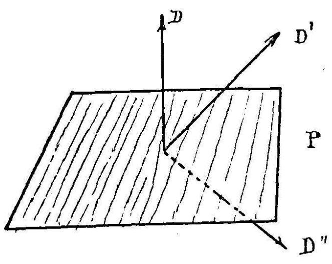

Fig. 70.

Dès lors, revenons à nos deux trièdres associés (fig. 69). L'arête SB′ a été conduite perpendiculaire au plan ASC ; l'arête SC′ a été menée perpendiculaire au plan ASB ; en particulier SB′ et SC′ sont l'une et l'autre, perpendiculaires à SA ; SA est donc une droite perpendiculaire à la face B′SC′

et comme l'angle A'SA *est aigu*, SA sera perpendiculaire à la face B'SC' et du même côté de cette face que SA'.

Ainsi le premier trièdre dérive du second trièdre, comme le second dérivait du premier.

2° Dans le trièdre d'arêtes SA, SB, SC, considérons le *dièdre* d'arête SC ; et (fig. 71) soient tracées : la droite SA' perpendiculaire orientée à la face CSB et la droite SB' perpendiculaire orientée à la face CSA de ce dièdre. Soit XSY l'angle rectiligne de ce dièdre ayant S pour sommet. Pour fixer les idées supposons XSY aigu, en ce cas :

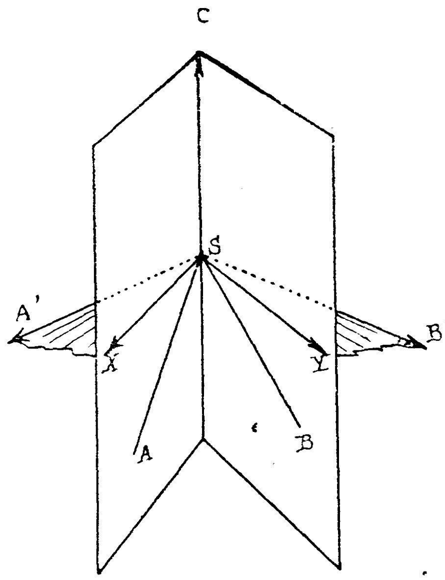

Fig. 71.

$$1^{dr} = \widehat{A'SY} = \widehat{XSY} + \widehat{A'SX} ;$$

et de même :

$$1^{dr} = \widehat{B'SX} = \widehat{XSY} + \widehat{YSB'} ;$$

ces égalités se lisent dans le plan du rectiligne du dièdre; ajoutons ces égalités membre à membre, on aura :

$$\begin{aligned} 2^{dr} &= \widehat{XSY} + (\widehat{A'SX} + \widehat{XSY} + \widehat{YSB'}) \\ &= \widehat{XSY} + \widehat{A'SB'} . \end{aligned}$$

Ainsi *une face* du trièdre associé est le *supplément* de l'angle dièdre *correspondant* qui a pour arête l'arête du trièdre primitif *associée à cette face du second trièdre.*

Nouvelles propriétés des trièdres déduites de la notion des trièdres associés. — Soient : a, b, c, les faces et A, B, C, les dièdres d'un trièdre T, opposés à ces faces ; soient : a', b', c', les faces et A', B', C', les dièdres du trièdre T' associés à T ; d'après la propriété déjà établie, et d'après la réciprocité de l'association des deux trièdres on a :

$$\begin{array}{l||l} a = 2^{\delta} - A', & A = 2^{\delta} - a', \\ b = 2^{\delta} - B', & B = 2^{\delta} - b', \\ c = 2^{\delta} - C', & C = 2^{\delta} - c'. \end{array}$$

Or dans le trièdre T' on a :

$$a' + b' + c' < 4^{dr} ;$$

Or des égalités précédentes on déduit :

$$A + B + C = 6^{dr} - (a' + b' + c') ,$$

c'est-à-dire :

$$A + B + C > 6^{dr} - 4^{dr} \text{ ou } 2^{dr} .$$

Nous retrouvons ainsi l'existence de l'excès sphérique, comme propriété corrélative du *théorème du parapluie.* (Chap. III.)

Cherchons de même un théorème corrélatif du théorème qui montre toute face d'un trièdre plus petite que la somme des deux autres ; soit a' la *plus grande face* du trièdre T' on a :

$$a' < b' + c'$$

ou en vertu des égalités précédentes :

$$2 - A < 2 - B + 2 - C \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C \ .$$

Ainsi : *dans un angle trièdre le plus petit dièdre augmenté de deux droits dépasse la somme des deux autres dièdres.*

Remarque. — Le théorème sur l'excès sphérique peut encore s'énoncer ainsi :

Dans un triangle sphérique, un angle extérieur est plus petit que la somme des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.

II. — Le problème du dallage de la sphère.

Nous appelons *polygone sphérique convexe* une portion de la sphère, limitée par des arcs de grand cercle, mais située tout entière dans une même hémisphère bornée par chaque côté du polygone prolongé en circonférence entière de grand cercle.

On voit sans peine que si on considère un polygone convexe *régulier*, c'est-à-dire ayant ses angles égaux entre eux et ses côtés égaux entre eux, les sommets de ce polygone seront tous situés sur un même petit cercle dont le pôle sera dit un pôle du polygone.

Problème. — Quels sont les polygones réguliers sphériques convexes que l'on peut reproduire et réunir, contigus par côtés et par sommets, de manière à recouvrir toute la sur-