

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	10 (1908)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE1
Autor:	Jules Andrade
Kapitel:	CHAPITRE VI Géométrie qualitative de la sphère. — Déplacements de pivotement d'un corps solide. Ou s'arrête la géométrie qualitative ? Ou commence la géométrie métrique ?
Autor:	Andrade, J.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-10980

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

marque qui peut intéresser les lecteurs géomètres ; les propriétés de l'étendue vectorielle en géométrie générale, telles que je les ai exposées dans l'article précité, vont être éclairées d'un nouveau jour par le théorème d'Ampère-Stokes.

En effet, le vecteur *tourbillon* d'un vecteur donné, correspond à une distribution continue et même dérivable ; or, les deux caractères de *dérivabilité* et de *continuité*, dont le premier contient d'ailleurs le second, ne sont pas essentiellement euclidiens. De là l'extension du théorème d'Ampère-Stokes en géométrie générale ; enfin, cette extension nous donne immédiatement et d'une manière intuitive le théorème suivant :

L'espace euclidien est le seul dans lequel puisse exister un réseau triple orthogonal avec conservation de la longueur des arcs correspondants ; en d'autres termes, le théorème d'Ampère-Stokes nous montre de suite que si l'élément linéaire ds d'un espace est réductible à la forme :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

cet espace est nécessairement euclidien.

Ce rapprochement entre la *méthode classique* des $(ds)^2$ et ma *méthode vectorielle* pour l'étude de la géométrie générale me paraît intéressant à signaler.

J. A.

L'IMPORTANCE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DES VECTEURS DANS LE CALCUL VECTORIEL GÉNÉRAL

Une fois établi (et cela nous semble logique) que : « *l'unification des notations vectorielles doit être faite en tenant compte des résultats auxquels conduira l'analyse, complète et rationnelle, des entités géométriques et mécaniques, de leurs opérations et de leurs fonctions* », nous croyons utile d'indiquer brièvement l'état actuel des recherches relatives à la question, et quelles sont les entités qui doivent encore être étudiées par rapport à leur théorie générale et à leurs applications.

M. R. MARCOLONGO et moi, nous avons étudié¹ sous l'as-

¹ *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* Nota I, tomo XXIII (1^o sem. 1907) : Nota II, t. XXIV ; 2^o sem. 1907) : Nota III, t. XXIV : Nota IV, t. XXV (1^o sem. 1908) : Nota V (éd ultima), t. XXVI (2^o sem. 1908).

vaut le fuseau A moins le triangle ACB ; le triangle (3) vaut le fuseau C moins le symétrique A'C'B' du triangle ACB, d'ailleurs équivalent à ce dernier ; chaque fuseau étant mesuré par 2 fois son angle mesuré lui-même avec l'angle droit, nous aurons, par la décomposition de l'hémisphère ci-dessus définie,

$$(2A - \text{aire } ACB) + (2B - \text{aire } ACB) + (2C - \text{aire } ABC) + \text{aire } ACB = 4$$

d'où :

$$\text{aire } ABC = (A + B + C - 2) \text{ droits.}$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME. — *L'aire d'un triangle sphérique est mesurée par l'excès sur deux droits de la somme de ses angles ; c'est ce qu'on nomme l'excès sphérique du triangle.*

CHAPITRE VI

Géométrie qualitative de la sphère. — Déplacements de pivotement d'un corps solide.

Où s'arrête la géométrie qualitative ? Où commence la géométrie métrique ?

I. — Triangles sphériques supplémentaires et trièdres associés.

En comparant les aires des triangles sphériques situés sur une même surface sphérique, nous avons reconnu que la somme des trois angles d'un triangle sphérique surpassait deux angles droits par un *excès* dont la valeur est proportionnelle à l'aire du triangle ; cet excès est ce qu'on appelle l'excès sphérique du triangle.

On peut se proposer d'établir directement l'existence de cet excès sphérique soit sur le triangle sphérique, mais sans passer par la notion d'aire, soit sur l'angle trièdre dont le triangle est l'image.

C'est cette dernière méthode que nous suivrons.

Nous allons définir d'abord les trièdres *réciproques* ou

associés, dont les images sphériques seront deux triangles dits *polaires* ou *supplémentaires*.

Envisageons (fig. 69) un trièdre de sommet S et dont les arêtes sont les trois demi-droites SA, SB, SC. Par S élevons une droite perpendiculaire à la face BSC du trièdre, et nous aurons soin de la tirer du même côté de cette face que celui où se trouve l'arête SA, nous obtenons ainsi la demi-droite SA'; en répétant cette construction pour chaque face, nous formons un nouveau trièdre de sommet S et dont les arêtes sont SA', SB', SC'.

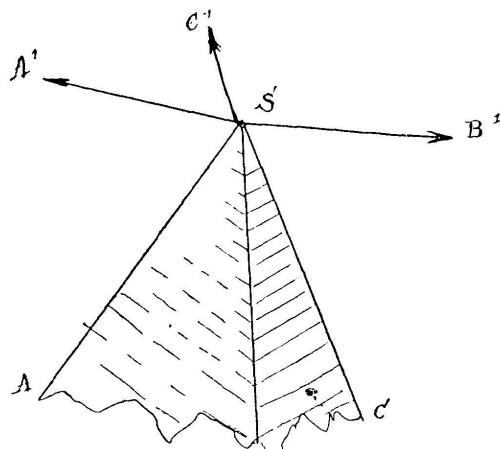


Fig. 69.

Ces deux trièdres sont dans une corrélation telle que *toute face* de l'un orientée par rapport à l'arête opposée, engendre une *arête correspondante* du second trièdre ; on les appelle deux trièdres *associés* ou *réciproques* ou encore : deux trièdres *supplémentaires* ; ces désignations se rattachent à des propriétés aussi simples que remarquables que nous allons maintenant établir.

1^o Le mode d'association des deux trièdres est *réciproque*. Faisons d'abord la remarque suivante qui est une vérité de la Palice : considérons un assemblage de deux demi-droites

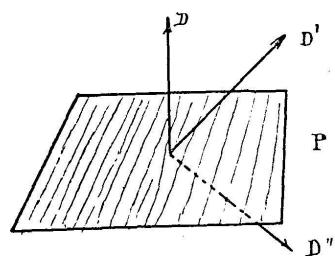


Fig. 70.

(fig. 70) tirées par un point O d'un plan P, et dont l'une D est perpendiculaire à ce plan ; ces demi-droites seront d'un même côté du plan P ou bien de part et d'autre de ce plan suivant que l'angle de ces demi-droites sera *aigu* ou *obtus* ; la remarque se justifie immédiatement en considérant l'intersection OU du plan P avec le plan passant par les droites données.

Dès lors, revenons à nos deux trièdres associés (fig. 69). L'arête SB' a été conduite perpendiculaire au plan ASC ; l'arête SC' a été menée perpendiculaire au plan ASB ; en particulier SB' et SC' sont l'une et l'autre, perpendiculaires à SA ; SA est donc une droite perpendiculaire à la face B'SC'.

et comme l'angle $A'SA$ est aigu, SA sera perpendiculaire à la face $B'SC'$ et du même côté de cette face que SA' .

Ainsi le premier trièdre dérive du second trièdre, comme le second dérivait du premier.

2° Dans le trièdre d'arêtes SA, SB, SC, considérons le dièdre d'arête SC ; et (fig. 71) soient tracées : la droite SA' perpendiculaire orientée à la face CSB et la droite SB' perpendiculaire orientée à la face CSA de ce dièdre. Soit XSY l'angle rectiligne de ce dièdre ayant S pour sommet. Pour fixer les idées supposons XSY aigu, en ce cas :

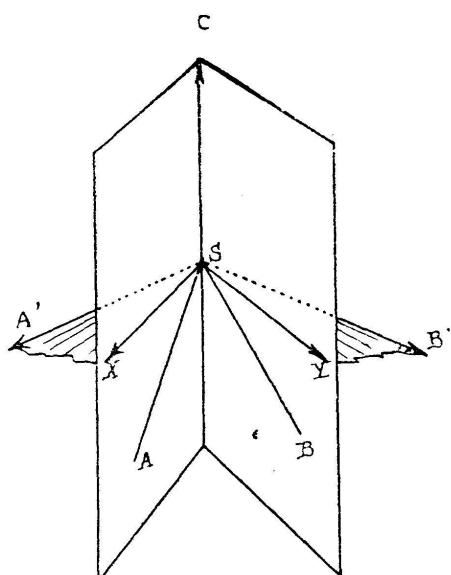


Fig. 71.

$$1^{\text{dr}} = \widehat{A'SY} = \widehat{XSY} + \widehat{A'SX} ;$$

et de même :

$$1^{\text{dr}} = \widehat{B'SX} = \widehat{XSY} + \widehat{YSB'} ;$$

ces égalités se lisent dans le plan du rectiligne du dièdre; ajoutons ces égalités membre à membre, on aura :

$$2^{dr} = \widehat{XSY} + (A'\widehat{SX} + \widehat{XSY} + \widehat{YSB'}) \\ \equiv \widehat{XSY} + A'\widehat{SB'}.$$

Ainsi une face du trièdre associé est le supplément de l'angle dièdre correspondant qui a pour arête l'arête du trièdre primitif associée à cette face du second trièdre.

Nouvelles propriétés des trièdres déduites de la notion des trièdres associés. — Soient : a, b, c , les faces et A, B, C , les dièdres d'un trièdre T , opposés à ces faces ; soient : a', b', c' , les faces et A', B', C' , les dièdres du trièdre T' associés à T ; d'après la propriété déjà établie, et d'après la réciprocité de l'association des deux trièdres on a :

$$\begin{array}{l||l} a = 2^{\delta} - A', & A = 2^{\delta} - a', \\ b = 2^{\delta} - B', & B = 2^{\delta} - b', \\ c = 2^{\delta} - C', & C = 2^{\delta} - c'. \end{array}$$

Or dans le trièdre T' on a :

$$a' + b' + c' < 4^{\text{dr}};$$

Or des égalités précédentes on déduit :

$$A + B + C = 6^{\text{dr}} - (a' + b' + c') ,$$

c'est-à-dire :

$$A + B + C > 6^{\text{dr}} - 4^{\text{dr}} \text{ ou } 2^{\text{dr}} .$$

Nous retrouvons ainsi l'existence de l'excès sphérique, comme propriété corrélative du *théorème du parapluie*. (Chap. III.)

Cherchons de même un théorème corrélatif du théorème qui montre toute face d'un trièdre plus petite que la somme des deux autres ; soit a' la *plus grande face* du trièdre T' on a :

$$a' < b' + c'$$

ou en vertu des égalités précédentes :

$$2 - A < 2 - B + 2 - C \text{ ou } A + 2 > B + C .$$

Ainsi : *dans un angle trièdre le plus petit dièdre augmenté de deux droits dépasse la somme des deux autres dièdres*.

Remarque. — Le théorème sur l'excès sphérique peut encore s'énoncer ainsi :

Dans un triangle sphérique, un angle extérieur est plus petit que la somme des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.

II. — Le problème du dallage de la sphère.

Nous appelons *polygone sphérique convexe* une portion de la sphère, limitée par des arcs de grand cercle, mais située tout entière dans une même hémisphère bornée par chaque côté du polygone prolongé en circonférence entière de grand cercle.

On voit sans peine que si on considère un polygone convexe *régulier*, c'est-à-dire ayant ses angles égaux entre eux et ses côtés égaux entre eux, les sommets de ce polygone seront tous situés sur un même petit cercle dont le pôle sera dit un pôle du polygone.

Problème. — Quels sont les polygones réguliers sphériques convexes que l'on peut reproduire et réunir, contigus par côtés et par sommets, de manière à recouvrir toute la sur-

face de la sphère, *sans répétition ni lacune*? en d'autres termes quels sont les polygones réguliers convexes aptes à *daller* la surface de la sphère? Désignons par x le *nombre* des polygones réunis autour d'un même sommet ou *nœud* du réseau de dallage, x angles contigus formant 4 angles droits, chaque angle du polygone vaut $\frac{4}{x}$ droits. D'autre part, soit y le nombre des côtés de chaque polygone, ou *dalle*. Du pôle de chaque dalle, on verra chaque côté de la dalle sous un angle sphérique égal à $\frac{4}{y}$ droits; le triangle isocèle qui a pour sommet ce pôle et pour base un côté de la dalle a un *excès sphérique* égal à $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2$ droits.

Ce nombre mesure la surface sphérique de la y^{me} partie de la dalle quand on prend comme unité le triangle trirectangle qui vaut le $\frac{1}{8}$ de la sphère; avec cette unité l'aire d'une dalle est donc $\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2\right)y$; dès lors, si nous nommons z le nombre des *dalles* dont l'ensemble recouvre la sphère, on aura *entre les trois nombres entiers* x , y et z la relation :

$$\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2\right)z \cdot y = 8$$

que nous pourrons écrire ainsi :

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} = \frac{2}{zy} ;$$

le problème du dallage sphérique revient donc à trouver tous les nombres entiers x , y , z unis par cette relation, ou comme on dit encore à résoudre l'équation (1) en nombres entiers.

Ce problème d'arithmétique est d'ailleurs très facile; nous nous contenterons ici d'en énoncer les solutions, qui sont au nombre de cinq, savoir :

- 1^{re} solution : $x = 3$, $y = 3$, $z = 4$;
- 2^{me} solution : $x = 3$, $y = 4$, $z = 6$;
- 3^{me} solution : $x = 3$, $y = 5$, $z = 12$;
- 4^{me} solution : $x = 4$, $y = 3$, $z = 8$;
- 5^{me} solution : $x = 5$, $y = 3$, $z = 20$.

Ces cinq modes de dallages sphériques font évidemment connaître aussi cinq solides, limités par des polygones réguliers qui sont réunis par leurs côtés et assemblés par angles polyèdres réguliers ; ces solides, nommés *polyèdres réguliers convexes*, ont tous leurs sommets situés sur la surface sphérique que l'on a envisagée.

III.— Triangles sphériques et rotations successives d'un solide.

Glissement sphérique. — Quand un corps solide reste cloué par un point fixe O et qu'il se meut, ce mouvement se nomme un mouvement de *pivotement* ; une portion du solide qui est à un instant sur une surface sphérique ayant le point O comme centre demeurera sans cesse sur la surface de cette même sphère. Comme trois points définissent un solide, on peut dire que le mouvement de pivotement équivaut au glissement d'une figure sphérique sur sa sphère.

1^o *Effet de deux rotations successives.* Soient marqués sur la sphère considérée les pôles de deux rotations successives ; sans doute, pour chaque rotation on pourrait hésiter entre deux pôles, mais nous adopterons le pôle sur lequel un observateur marchant sur la sphère, étant posé tête hors la sphère, verrait s'accomplir la rotation considérée dans un sens déterminé par rapport à sa gauche et à sa droite ; A (fig. 72) est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *première* rotation ; B est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *deuxième* rotation.

On peut même supposer que ces rotations soient chacune moindre qu'un demi-tour, soit alors u la rotation sur A vue par l'observateur posé sur le pôle A dans le sens des aiguilles d'une montre, soit de même v la rotation également orientée sur le pôle B.

Nous nous proposons de construire un point de la figure sphérique entraînée qui finalement n'aura pas bougé ; à cet effet joignons le premier pôle A au second par un arc de grand cercle AB moindre qu'une demi-circonférence.

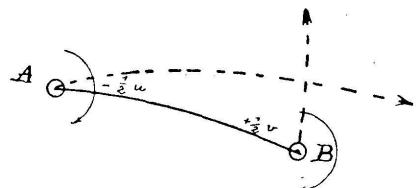


Fig. 72.

Faisons tourner (fig. 73) l'arc \overrightarrow{AB} autour de A d'un angle $\frac{1}{2}u$, mais en sens contraire du sens de la rotation donnée, nous obtenons sur l'hémisphère (1) un arc AX; faisons de même tourner l'arc \overrightarrow{BA} autour du second pôle d'un angle $\frac{1}{2}v$,

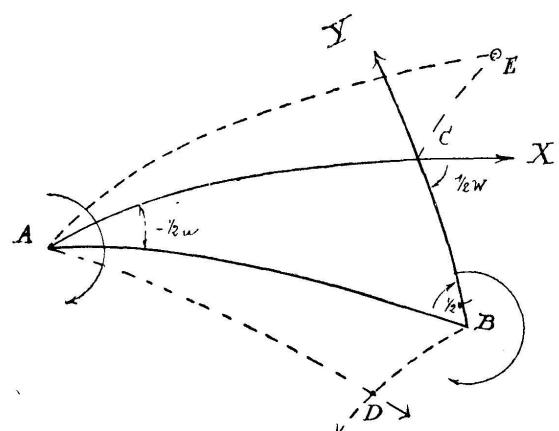


Fig. 73.

mais dans le sens même de la seconde rotation; nous obtenons ainsi un arc BY allant encore sur l'hémisphère (1); les deux arcs AX et BY se croisent sur l'hémisphère (1) en un point C.

Le point de la figure sphérique qui était en C avant la première rotation va par cette rotation venir en D, position symétrique de C par rapport au

plan de l'arc AB; la seconde rotation ramène le point D en C. C n'a donc, en définitive, point bougé.

Donc, le déplacement final du solide résulte d'une rotation autour de C qui représente sur la sphère *l'axe* qui joint à C le centre O de la sphère.

Ainsi deux rotations dont les axes se croisent en un point O sont remplaçables par une rotation unique dont l'axe passe aussi par le même point O.

Remarque. — Si l'ordre des rotations avait été changé, mais si leurs grandeurs et si leurs pôles sur la sphère fixe avaient été maintenus, le pôle C de la rotation unique remplaçant les deux autres eût été au point D.

Grandeur de la rotation remplaçante. — Soit (fig. 73) E le point symétrique de B par rapport au plan de l'arc AX, le point E de la figure sphérique vient en B par la première rotation, de plus il y demeure pendant la seconde rotation.

De là résulte que l'angle \widehat{XCB} extérieur au triangle ACB représente la moitié $\frac{1}{2}w$ de la rotation *remplaçante* w.

2^o THÉORÈME. — *Tout déplacement défini de pivotement sur un point O peut toujours être réalisé par une rotation exécutée autour d'un certain axe passant par O.*

En effet, une figure sphérique a toujours sa situation définie par les situations de deux de ses points; or le changement des positions de ceux-ci peut toujours être produit par un premier changement amenant le point P (fig. 74) en sa position finale P' , suivi d'une rotation *convenable* autour du pôle P' , qui laisse la droite OP' invariable.

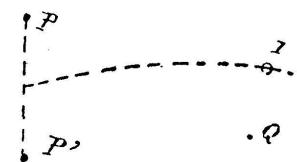


Fig. 74.

Le premier changement peut être réalisé par une rotation convenable exécutée autour d'un pôle I appartenant à l'arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc PP' en son milieu, *et ceci, même d'une infinité de manières*. Le déplacement final de la figure est donc produit par une première rotation autour de I suivie d'une seconde rotation autour de P' ; or nous venons de voir que ces deux déplacements successifs peuvent être remplacés par une rotation unique, et le théorème est démontré.

Remarques. — Il est d'ailleurs bien évident, d'après la définition de la ligne droite, et les propriétés des trames, que deux rotations autour de deux axes concourants ne s'équivalent que si elles sont exécutées autour d'un même axe. D'où la conséquence suivante :

Autre remarque. — Si le pôle A est donné, le lieu des axes des secondes rotations qui produisent après une rotation de pôle A un pivotement *total donné* est un plan, c'est le plan du grand cercle qui fait en C avec l'arc \overrightarrow{CX} (fig. 73) l'angle déterminé $\frac{1}{2} w$.

IV.— Fin de la Géométrie qualitative. Prévision de la Géométrie métrique.

Un triangle plan ou un triangle sphérique, image d'un trièdre, renferment 6 éléments : 3 côtés et 3 angles; notons seulement que dans un triangle sphérique les mots côtés, appliqués aux arcs de cercle qui forment les côtés, désignent en réalité : les angles au centre de la sphère dont ces arcs sont les images, ou encore les faces du trièdre correspondant au triangle sphérique.

Aux trois cas généraux d'égalité des triangles plans correspondent, on le vérifie bien aisément, trois cas d'*égalité ou symétrie* des triangles sphériques. Exemple : si deux triangles sphériques ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, l'un des triangles est ou bien égal à l'autre ou égal à un symétrique de l'autre.

Or, ces divers cas d'égalité nous montrent que, aussi bien dans les triangles sphériques que dans les triangles plans, les six éléments d'un triangle solide dépendent de trois d'entre eux, puisque trois d'entre eux permettent de construire le triangle ou son symétrique. Il doit donc exister un moyen de *calculer* ou de *construire* les grandeurs de trois des éléments du triangle, *connaissant les trois autres*.

Ces constructions ou ces calculs seront l'objet du second livre de la géométrie naturelle, elles formeront la géométrie *quantitative ou métrique*.

Nous terminons ici le *premier livre*, et nous pourrons le résumer en disant qu'il comprend essentiellement :

1^o La notion des deux mouvements fondamentaux d'un solide : rotation autour d'une droite; translation avec guidage plan autour d'une droite qui est l'axe de la translation.

2^o L'ajustage ou la correspondance des figures égales.

3^o La symétrie.

C'est ce qu'on peut encore appeler la *Géométrie qualitative*. Elle doit être enseignée avec des *modèles* de solides et de mouvements.

J. ANDRADE (Besançon).

P.-S. — *Remarques.* — 1. Bien que l'exposé didactique du premier livre de la géométrie nouvelle soit achevé, je rappellerai aux lecteurs de cette *Revue* que le second livre ou la géométrie métrique a été approfondi ici même dans mon article intitulé « Les fonctions angulaires dans la géométrie de l'ajustage » (8^e année, p. 257-281). Cet article pourra être aisément et considérablement allégé en vue d'un enseignement élémentaire qui, à mon avis, doit rester euclidien (en ce sens qu'on adoptera avec Euclide le phénomène de la similitude), mais qui néanmoins doit faire *sentir*, même au débutant, que le solide euclidien pour être le plus simple n'est pourtant pas le seul, logiquement possible, et cela suffira pour une première étude élémentaire.

II. Quittons maintenant le domaine pédagogique. Voici une re-