Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE1

Autor: Jules Andrade

Kapitel: IV. — Quelques propriétés spéciales aux triangles sphériques, leurs aires comparées.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10980

sphère, nous aurons alors pour les positions mutuelles de deux petits cercles de la surface sphérique les mêmes critères que pour les cercles du plan (voir chapitre IV).

IV. — Quelques propriétés spéciales aux triangles sphériques, leurs aires comparées.

1° *Le fuseau sphérique et la notion d'aire sphérique.* — Les fuseaux sphériques de même angle sont, au moins d'une manière, superposables; ils représentent des *étendues* ou *aires* sphériques mesurables et comparables entre elles comme les angles des fuseaux considérés.

D'autre part si on partage un fuseau en deux portions par un plan perpendiculaire à l'arête du fuseau on obtient deux triangles sphériques bi-rectangles symétriques et isocèles admettant un mode de superposition indiqué par la figure 66.

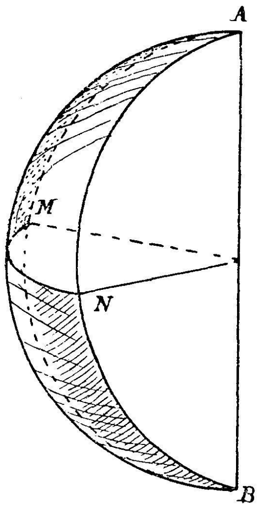

Fig. 66.

L'aire du fuseau est alors *double* de l'aire de l'un ou l'autre de ces triangles.

Nous appellerons *aires sphériques équivalentes :* des aires qui sont composées *de portions superposables en correspondance dans les deux figures.*

Si on prend comme unité d'aire *l'aire du triangle sphérique trirectangle* qui est la huitième portion de la sphère, l'aire d'un fuseau sera évidemment mesurée par deux fois le nombre qui mesure son angle comparé à l'angle droit.

2° Théorème. — *Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents.* — Si on élève sur deux côtés d'un triangle sphérique, et en leurs milieux, des arcs de grand cercle perpendiculaires respectivement à ces côtés, le point I (sans figure) où ces arcs se coupent est à des distances sphériques égales des trois sommets, il appartient donc à l'arc de grand cercle perpendiculaire au troisième côté en son milieu.

Soient (fig. 67, en haut) ABC et A′B′C′ deux triangles sphériques symétriques, le point I′ symétrique du point I de l'un sera évidemment à distances sphériques égales des trois sommets, puisque les éléments plans correspondants des figures symétriques sont égaux.

Pour la même raison les distances sphériques AI, AH, BH, HC sont respectivement égales à leurs symétriques, arcs A′I′, arc A′H′, arc B′H′, arc H′C′; d'où résulte que si le point I est intérieur à ABC, I′ sera intérieur à A′B′C′, et que si le point I est dans l'angle $\widehat{ABC}$ et de l'autre côté de AC que B, la position de I′ à l'égard des éléments symétriques A′B′C′ sera la même que la disposition précédente, quoiqu'avec une orientation différente.

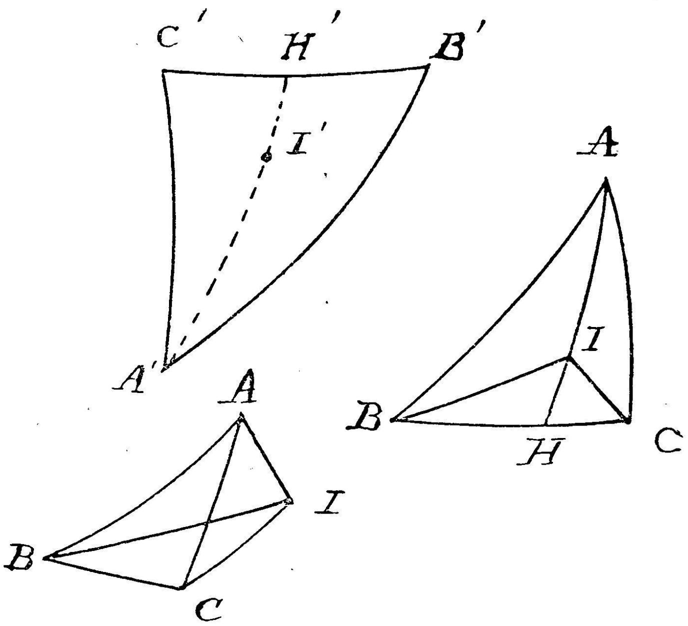

Fig. 67.

Le triangle sphérique considéré est alors la somme de trois portions additives ou la somme de deux portions positives diminuée d'une portion soustractive; ces portions sont *isocèles*, et par conséquent admettent un mode de superposition avec leurs symétriques, d'où résulte enfin que les deux triangles sphériques ABC et A′B′C′ *sont bien équivalents.*

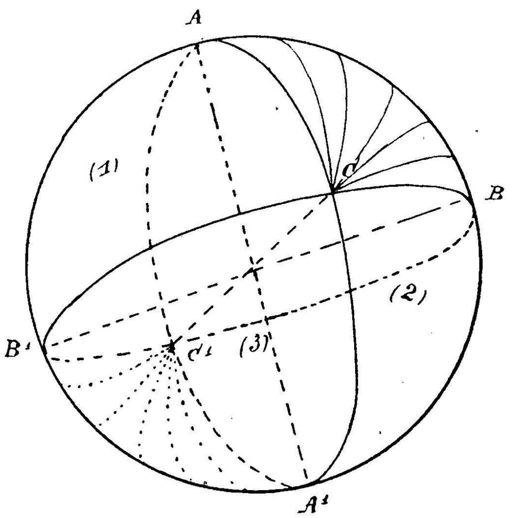

Fig. 68.

3° *Mesure de l'aire d'un triangle sphérique.* — En prolongeant (fig. 68) les côtés AC et CB jusqu'aux points A′ et B′ où ils recoupent respectivement le côté AB prolongé, on partage toute une moitié de la sphère en quatre triangles : ACB, et les trois triangles (1), (2), (3). Avec l'unité d'aire adoptée la demi-sphère vaut 4 unités; soient $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles du triangle sphérique considéré, le triangle (1) vaut le fuseau B moins le triangle ACB; le triangle (2) vaut le fuseau A moins le triangle ACB ; le triangle (3) vaut le fuseau C moins le symétrique A′C′B′ du triangle ACB, d'ailleurs équivalent à ce dernier ; chaque fuseau étant mesuré par 2 fois son angle mesuré lui-même avec l'angle droit, nous aurons, par la décomposition de l'hémisphère ci-dessus définie,

$$(2A - \text{aire } ACB) + (2B - \text{aire } ACB) + (2C - \text{aire } ABC) + \text{aire } ACB = 4$$

d'où :

$$\text{aire } ABC = (A + B + C - 2) \text{ droits.}$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME. — *L'aire d'un triangle sphérique est mesurée par l'excès sur deux droits de la somme de ses angles ;* c'est ce qu'on nomme *l'excès sphérique du triangle.*

CHAPITRE VI

Géométrie qualitative de la sphère. — Déplacements de pivotement d'un corps solide.

Où s'arrête la géométrie qualitative ? Où commence la géométrie métrique ?

I. — Triangles sphériques supplémentaires et trièdres associés.

En comparant les aires des triangles sphériques situés sur une même surface sphérique, nous avons reconnu que la somme des trois angles d'un triangle sphérique surpasse deux angles droits par un *excès* dont la valeur est proportionnelle à l'aire du triangle ; cet excès est ce qu'on appelle l'excès sphérique du triangle.

On peut se proposer d'établir directement l'existence de cet excès sphérique soit sur le triangle sphérique, mais sans passer par la notion d'aire, soit sur l'angle trièdre dont le triangle est l'image.

C'est cette dernière méthode que nous suivrons.

Nous allons définir d'abord les trièdres *réciproques* ou