Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE1

**Autor:** Jules Andrade

**Kapitel:** I.— Définitions et propriétés des figures symétriques.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-10980

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 30.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE¹

### CHAPITRE V

La symétrie.

Sphère et Plan comparés; analogies et dissemblances.

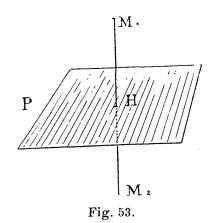
Avant d'étudier les analogies et les dissemblances des triangles sphériques comparés aux triangles plans, nous devons, pour cet objet même, étudier un mode remarquable de correspondance entre deux figures : le mode de correspondance par symétrie.

## 1. — Définitions et propriétés des figures symétriques.

Définitions. — 1° Si deux figures F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> se correspondent, point par point, de manière que (fig. 53) toute droite qui réu-

nit un point  $M_4$  de la première à un point correspondant  $M_2$  de la seconde soit traversée en son milieu H par un plan P fixe, mais perpendiculaire à la droite de jonction, on dira que les figures  $F_4$  et  $F_2$  sont symétriques par rapport au plan P.

Remarques. — a) Le plan P est le lieu des points de l'une des deux figures qui coïncident avec leurs correspondants respectifs de l'autre figure. C'est le plan



de symétrie. — b) Une droite juxtaposée sur sa symétrique est ou bien perpendiculaire au plan de symétrie, ou bien située dans ce plan.

2º Si deux figures G<sub>1</sub> et G<sub>2</sub> (fig. 54) se correspondent point par point de manière que le milieu de la droite qui réunit

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Voir L'Enseign. Math., année 1903, nº du 15 mai, p. 185-207; nº du 15 juillet, p. 296-318.

les deux points correspondants M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> soit un point fixe O de l'espace, on dit que les deux figures sont symétriques

l'une de l'autre par rapport au point O. Le point O s'appelle le centre de symétrie.

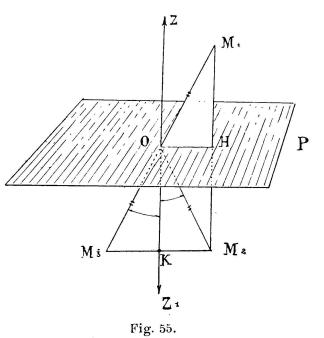
Remarque. — Une droite juxtaposée sur sa symétrique doit nécessairement passer par le centre de symétrie.

PROBLÈME FONDAMENTAL. — On construit (fig. 55) la Fig. figure  $F_2$  symétrique de  $F_4$  par rapport au plan P et la figure  $F_3$  symétrique de  $F_4$  par rapport au point O pris

dans le plan P. Cherchons quelle relation existe entre les deux figures F<sub>2</sub> et F<sub>3</sub>.

Pour répondre à cette question menons par le point O la droite ZOZ' perpendiculaire au plan P; soit M<sub>1</sub> un point quelconque de la figure F<sub>1</sub>, soient M<sub>2</sub> son correspondant dans F<sub>2</sub> et M<sub>3</sub> son correspondant dans F<sub>3</sub>.

Le milieu H de M<sub>1</sub>M<sub>2</sub> est la projection commune des points M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> sur le plan P;



nous avons vu (chapitre II, théorie du dièdre) que la droite ZOZ' est dans le plan des trois droites  $M_1OM_3$ , OH,  $OM_2$ , et si l'on fait le rabattement de ce plan sur lui-même par un demi-tour exécuté autour de OH,  $M_1$  venant en  $M_2$  l'angle  $M_1OH$  recouvre l'angle  $M_2OH$ : il résulte de là que les suppléments de ces angles ou  $ZOM_1$  et  $Z'OM_2$  sont égaux; en considérant alors l'angle opposé par le sommet à  $ZOM_1$  c'està-dire l'angle  $Z'OM_3$  on voit enfin que la droite OZ' est la bissectrice de l'angle au sommet O du triangle  $M_3OM_2$ , et comme ce triangle est isocèle puisque  $OM_2$  et  $OM_3$  tous deux égaux à  $OM_1$  sont égaux, la droite OZ' doit passer par le milieu de  $M_1M_2$  et être perpendiculaire à cette droite.

On voit donc que pour amener la figure F3 en coïncidence

avec la figure F<sub>2</sub> il suffira de la faire tourner autour de l'axe de rotation OZ d'une demi-révolution.

Conséquence. — Les figures symétriques d'une même figure sont superposables. — Ce fait est la conséquence du problème précédent et de la remarque suivante.

Remarque. — Les figures symétriques d'une même figure F par rapport à deux centres différents sont superposables, car elles sont chacune superposable sur la symétrique de la même figure F par rapport à un plan contenant les deux centres.

2. — Une figure non plane n'est en général pas superposable sur sa symétrique, et elle n'est, dans tous les cas, jamais superposable avec correspondance des éléments symétriques dans la superposition, bien que tous les éléments plans correspondants soint égaux.

Exemple: (fig. 56) soit un trièdre, formons le trièdre symétrique

, par rapport à son sommet S; faces et dièdres du nouveau trièdre sont respectivement égaux aux éléments correspondants du premier trièdre, car ce sont des faces ou des dièdres, deux à deux, opposés par le sommet ou par l'arête. Or, une trame d'un solide fixant la position du solide, on pourra, si on veut essayer la superposition du trièdre et de son symétrique A par éléments symétriques, commencer par faire coïncider la trame ASC sur la symétrique A'SC' par une

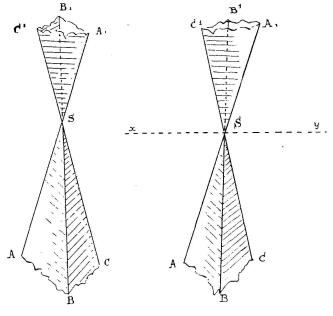


Fig. 56. Fig. 57.

rotation de un demi-tour exécutée autour d'une perpendiculaire menée par S à cette face, mais, après ce mouvement, la droite SB est restée d'un même côté du plan ASC et ne pourra donc pas venir coïncider avec sa symétrique SB'. Si pourtant le trièdre est isocèle, si par exemple (fig. 57) le dièdre d'arête SA est égal au dièdre d'arête SC, une rotation de un demi-tour exécutée autour de la perpendiculaire XY à la bissectrice de l'angle ASC fera coïncider le trièdre sur son symétrique; mais dans ce mode de superposition l'arête SC recouvre SA' qui n'est pas son élément symétrique.

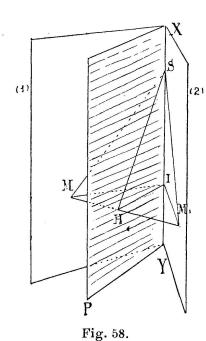
Autre exemple. — Il résulte des lois de la réflexion de la lumière

que l'image d'une figure F éclairée, fournie par un miroir plan, est une figure symétrique de F, par rapport à ce miroir.

Or, regardez-vous dans une glace plane, et que votre main gauche tire votre oreille gauche, votre image ne vous est pas superposable car elle se tire l'oreille droite.

3. — Les figures planes sont égales à leurs symétriques. — Ce fait résulte du théorème suivant (fig. 58) :

Théorème. — Si on fait tourner une figure plane F autour d'un axe XY situé dans le plan (1) de la figure et si la figure



F vient, après la rotation occuper la position F' dans le plan (2) les figures égales F et F' sont encore symétriques par rapport au plan P qui partage en deux dièdres égaux le dièdre formé par les deux demi-plans, (1), XY, d'une part, et, 2, XY, d'autre part.

En effet tout point S de la figure situé sur l'axe demeure immobile, si donc H est le milieu de la droite qui réunit un point M de la figure à sa nouvelle venue dans la figure F', la droite SH sera perpendiculaire à MM' et bissectrice de l'angle en S du triangle isocèle MSM'.

En faisant varier à volonté le point S on voit que la droite MM' est perpendiculaire en H au plan qui passe par H et par XY; en prenant pour S le point I projection commune des points M et M' sur XY on voit de suite que le plan H, XY est le plan qui forme des dièdres égaux avec les plans (1) et (2) ce plan est donc le même pour tous les points M; or M et M' sont symétriques par rapport à ce plan fixe. Il en est de même des figures F et F'.

Remarque. — Ce théorème est la clef des propriétés du triangle sphérique isocèle.

## II. — Propriétés du triangle sphérique.

1. — Propriété du triangle sphérique dont deux côtés sont égaux. — Soit (fig. 59) ABC un triangle sphérique isocèle