

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1908)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE1  
**Autor:** Jules Andrade  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10980>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE<sup>1</sup>

## CHAPITRE V

### *La symétrie.*

#### *Sphère et Plan comparés; analogies et dissemblances.*

Avant d'étudier les analogies et les dissemblances des triangles sphériques comparés aux triangles plans, nous devons, pour cet objet même, étudier un mode remarquable de correspondance entre deux figures : le mode de correspondance *par symétrie*.

#### I. — Définitions et propriétés des figures symétriques.

DÉFINITIONS. — 1<sup>o</sup> Si deux figures  $F_1$  et  $F_2$  se correspondent, point par point, de manière que (fig. 53) toute droite qui réunit un point  $M_1$  de la première à un point correspondant  $M_2$  de la seconde soit traversée en son milieu  $H$  par un plan  $P$  fixe, mais perpendiculaire à la droite de jonction, on dira que les figures  $F_1$  et  $F_2$  sont *symétriques par rapport au plan P*.

Remarques. — a) Le plan  $P$  est le lieu des points de l'une des deux figures qui coïncident avec leurs correspondants respectifs de l'autre figure. C'est *le plan de symétrie*. — b) Une droite juxtaposée sur sa symétrique est ou bien perpendiculaire au plan de symétrie, ou bien située dans ce plan.

2<sup>o</sup> Si deux figures  $G_1$  et  $G_2$  (fig. 54) se correspondent point par point de manière que le milieu de la droite qui réunit

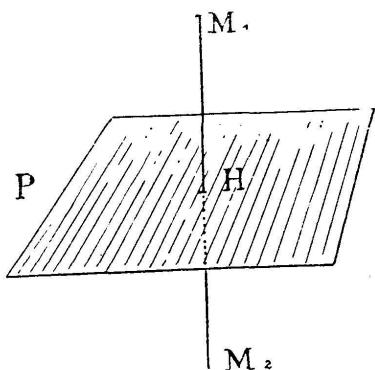


Fig. 53.

<sup>1</sup> Voir *L'Enseign. Math.*, année 1903, n° du 15 mai, p. 185-207; n° du 15 juillet, p. 296-318.

les deux points correspondants  $M_1$  et  $M_2$  soit un point fixe  $O$  de l'espace, on dit que les deux figures sont *symétriques*

¶. *l'une de l'autre par rapport au point O.* Le point  $O$  s'appelle le *centre de symétrie*.

¶. *Remarque.* — Une droite juxtaposée sur sa symétrique doit nécessairement passer par le centre de symétrie.

¶. **PROBLÈME FONDAMENTAL.** — On construit (fig. 55) la figure  $F_2$  symétrique de  $F_1$  par rapport au plan  $P$  et la figure  $F_3$  symétrique de  $F_1$  par rapport au point  $O$  pris dans le plan  $P$ . Cherchons quelle relation existe entre les deux figures  $F_2$  et  $F_3$ .

Pour répondre à cette question menons par le point  $O$  la droite  $ZOZ'$  perpendiculaire au plan  $P$ ; soit  $M_1$  un point quelconque de la figure  $F_1$ , soient  $M_2$  son correspondant dans  $F_2$  et  $M_3$  son correspondant dans  $F_3$ .

Le milieu  $H$  de  $M_1M_2$  est la projection commune des points  $M_1$  et  $M_2$  sur le plan  $P$ ; nous avons vu (chapitre II, théorie du dièdre) que la droite  $ZOZ'$  est dans le plan des trois droites  $M_1OM_3$ ,  $OH$ ,  $OM_2$ , et si l'on fait le rabattement de ce plan sur lui-même par un demi-tour exécuté autour de  $OH$ ,  $M_1$  venant en  $M_2$  l'angle  $M_1\widehat{O}H$  recouvre l'angle  $M_2\widehat{O}H$ : il résulte de là que les suppléments de ces angles ou  $Z\widehat{O}M_1$  et  $Z'\widehat{O}M_2$  sont égaux; en considérant alors l'angle opposé par le sommet à  $ZOM_1$ , c'est-à-dire l'angle  $Z'\widehat{O}M_3$  on voit enfin que la droite  $OZ'$  est la bissectrice de l'angle au sommet  $O$  du triangle  $M_3\widehat{O}M_2$ , et comme ce triangle est isocèle puisque  $OM_2$  et  $OM_3$  tous deux égaux à  $OM_1$  sont égaux, la droite  $OZ'$  doit *passer par le milieu de  $M_1M_2$*  et être *perpendiculaire à cette droite*.

On voit donc que pour amener la figure  $F_3$  en *coïncidence*

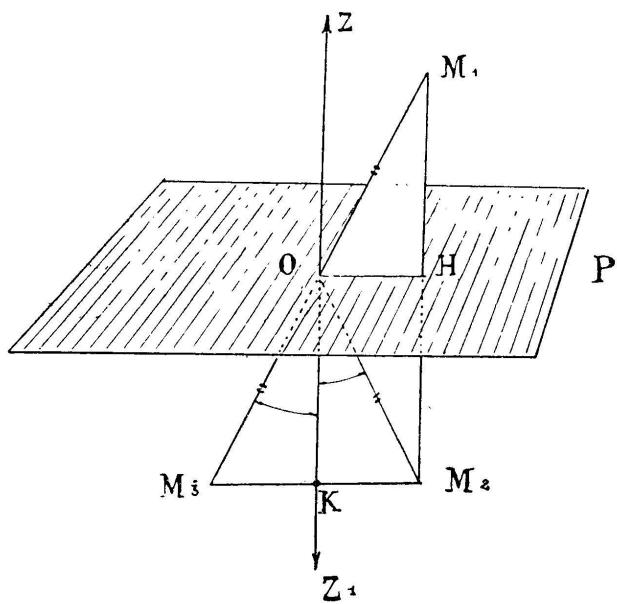


Fig. 55.

avec la figure  $F_2$ , il suffira de la faire tourner autour de l'axe de rotation  $OZ$  d'une demi-révolution.

**CONSÉQUENCE.** — *Les figures symétriques d'une même figure sont superposables.* — Ce fait est la conséquence du problème précédent et de la remarque suivante.

**Remarque.** — Les figures symétriques d'une même figure  $F$  par rapport à deux centres différents sont superposables, car elles sont chacune superposable sur la symétrique de la même figure  $F$  par rapport à un plan contenant les deux centres.

2. — *Une figure non plane n'est en général pas superposable sur sa symétrique*, et elle n'est, *dans tous les cas*, jamais superposable avec correspondance des éléments symétriques dans la superposition, *bien que tous les éléments plans correspondants soient égaux*.

*Exemple :* (fig. 56) soit un trièdre, formons le trièdre symétrique par rapport à son sommet  $S$ ; faces et dièdres du nouveau trièdre sont respectivement égaux aux éléments correspondants du premier trièdre, car ce sont des faces ou des dièdres, deux à deux, opposés par le sommet ou par l'arête. Or, *une trame d'un solide fixant la position du solide*, on pourra, si on veut essayer la superposition du trièdre et de son symétrique par éléments symétriques, commencer par faire coïncider la trame  $ASC$  sur la symétrique  $A'SC'$  par une rotation de un demi-tour exécutée autour d'une perpendiculaire menée par  $S$  à cette face, mais, après ce mouvement, la droite  $SB$  est restée d'un même côté du plan  $ASC$  et ne pourra donc pas venir coïncider avec sa symétrique  $SB'$ . Si pourtant le trièdre est *isocèle*, si par exemple (fig. 57) le dièdre d'arête  $SA$  est égal au dièdre d'arête  $SC$ , une rotation de un demi-tour exécutée autour de la perpendiculaire  $XY$  à la bissectrice de l'angle  $ASC$  fera coïncider le trièdre sur son symétrique; mais dans ce mode de superposition l'arête  $SC$  recouvre  $SA'$  qui n'est pas son élément symétrique.

*Autre exemple.* — Il résulte des lois de la réflexion de la lumière

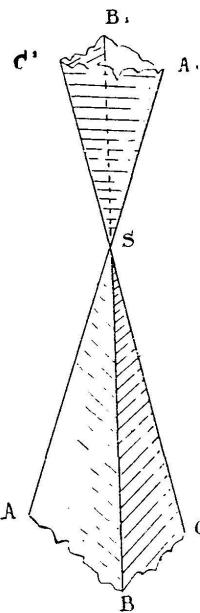


Fig. 56.

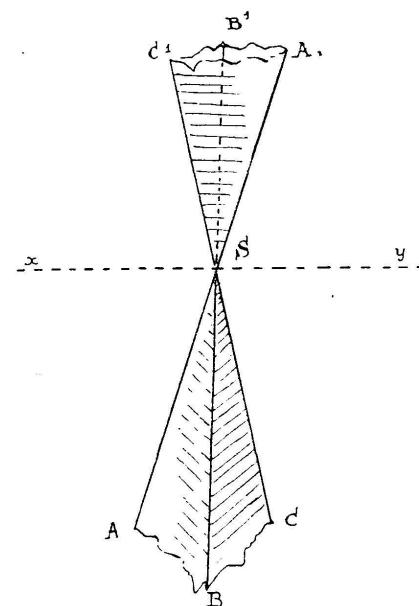


Fig. 57.

que l'image d'une figure  $F$  éclairée, fournie par un miroir plan, est une figure symétrique de  $F$ , par rapport à ce miroir.

Or, regardez-vous dans une glace plane, et que votre main gauche tire votre oreille gauche, votre image ne vous est pas superposable car elle se tire l'oreille droite.

3. — *Les figures planes sont égales à leurs symétriques.* — Ce fait résulte du théorème suivant (fig. 58) :

THÉORÈME. — *Si on fait tourner une figure plane  $F$  autour d'un axe  $XY$  situé dans le plan (1) de la figure et si la figure*

*$F$  vient, après la rotation occuper la position  $F'$  dans le plan (2) les figures égales  $F$  et  $F'$  sont encore symétriques par rapport au plan  $P$  qui partage en deux dièdres égaux le dièdre formé par les deux demi-plans, (1),  $XY$ , d'une part, et, 2,  $XY$ , d'autre part.*

En effet tout point  $S$  de la figure située sur l'axe demeure immobile, si donc  $H$  est le milieu de la droite qui réunit un point  $M$  de la figure à sa nouvelle venue dans la figure  $F'$ , la droite  $SH$  sera perpendiculaire à  $MM'$  et bissectrice de l'angle en  $S$  du triangle *isocèle*  $MSM'$ .

En faisant varier à volonté le point  $S$  on voit que la droite  $MM'$  est perpendiculaire en  $H$  au plan qui passe par  $H$  et par  $XY$ ; en prenant pour  $S$  le point  $I$  projection commune des points  $M$  et  $M'$  sur  $XY$  on voit de suite que le plan  $H, XY$  est le plan qui forme des dièdres égaux avec les plans (1) et (2) ce plan est donc le même pour tous les points  $M$ ; or  $M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport à ce plan fixe. Il en est de même des figures  $F$  et  $F'$ .

Remarque. — Ce théorème est la clef des propriétés du triangle sphérique isocèle.

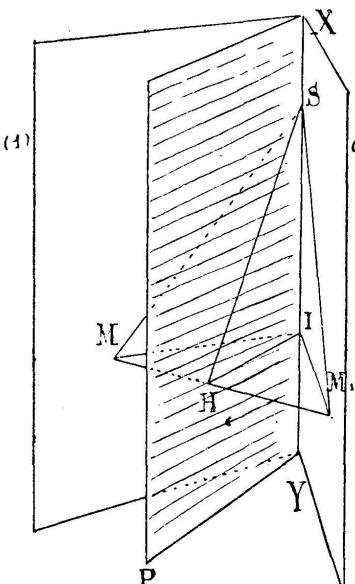


Fig. 58.

## II. — Propriétés du triangle sphérique.

1. — *Propriété du triangle sphérique dont deux côtés sont égaux.* — Soit (fig. 59)  $ABC$  un triangle sphérique isocèle

c'est-à-dire dont les côtés arc AB et arc AC sont égaux. Soient I le milieu de l'arc de base BC, H le milieu de la corde de l'arc de grand cercle BC, et O le centre de la sphère ; il résulte du théorème précédent que :

1<sup>o</sup> les arcs égaux AB et AC sont symétriques par rapport au plan bissecteur du dièdre (B, OA, C); 2<sup>o</sup> les arcs égaux BI et IC sont symétriques par rapport au plan bissecteur du dièdre (équivalent à 2 droits) (B, OI, C); de plus, tous deux perpendiculaires à BC au point H, ces deux plans doivent coïncider.

Ainsi donc : La figure formée par l'arc de cercle AB, l'arc BI, les deux rayons OA, OB, est symétrique de la figure formée par l'arc de cercle AC, l'arc CI, les deux rayons OA, OC. En particulier les tangentes en B aux deux arcs de grand cercle BA et BC forment un angle plan symétrique de l'angle formé par les tangentes en C aux deux arcs de grand cercle CA et BC, ces deux angles sont donc égaux, et enfin les angles en B et C du triangle sphérique ABC sont égaux ; de plus le plan des quatre points A I H O étant le plan de symétrie des deux portions du triangle sphérique considéré, on voit que les deux tangentes en I aux deux arcs IB et IC, portions du même arc BC, sont à la fois *coïncidantes* et *symétriques* par rapport à ce plan, mais hors de ce plan ; elles forment donc une perpendiculaire à ce plan qui est celui de l'arc de grand cercle AI ; donc enfin dans le triangle sphérique isocèle l'arc AI qui joint le sommet au milieu de l'arc de base est perpendiculaire à cette base.

2. *Propriété du triangle sphérique dont deux angles sont égaux.* — Soit O le centre de la sphère. Considérons d'abord le cas d'un triangle sphérique ABC (fig. 60) dont les angles en B et C sont droits ; A est alors un *pôle*<sup>1</sup> de l'arc de grand cercle BC, c'est-à-dire que le rayon OA est perpendiculaire au plan BOC (théorie du dièdre), les arcs AB et AC égaux chacun à un quadrant<sup>2</sup> sont égaux. Soit H le milieu de BC,

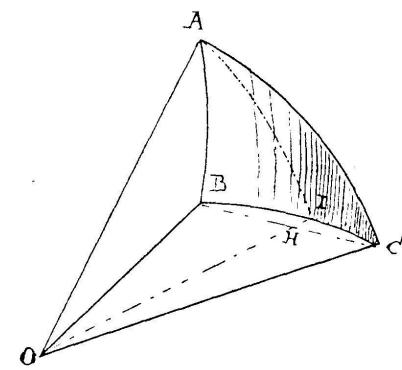


Fig. 59.

<sup>1</sup> *pôle* d'un cercle de la sphère : point où l'axe du cercle perce la surface sphérique.

<sup>2</sup> *quadrant* ou quart de la circonférence d'un grand cercle.

l'arc  $AH$  est dans le plan de symétrie des figures planes  $BOA$  et  $COA$ , soit  $D$  un point quelconque de l'arc  $AH$ ; joignons

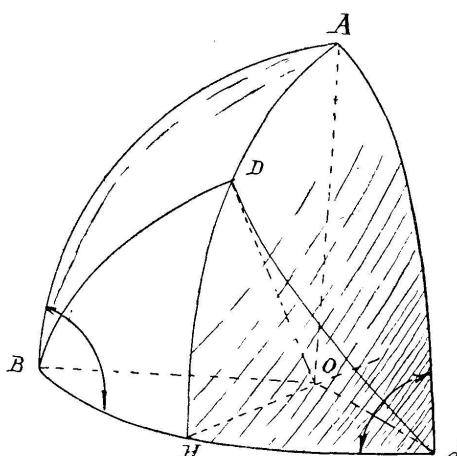


Fig. 60.

$OD$ ,  $D$  est à lui-même son symétrique,  $B$  et  $C$  sont symétriques par rapport au plan  $ADHO$ , les angles plans  $DOB$  et  $DOC$  symétriques sont égaux, donc les arcs  $BD$  et  $DC$  sont égaux et les angles sphériques  $\widehat{DBC}$  et  $\widehat{DCB}$  sont égaux.

Il n'y a d'ailleurs à partir du sommet  $C$  qu'un arc de grand cercle faisant avec l'arc de grand cercle  $BC$  et d'un côté de cet arc un angle

sphérique donné, comme le montre la notion du dièdre.

**CONSÉQUENCE.** — Si (fig. 61) un triangle quelconque sphérique  $A'BC$  a ses angles en  $A$  et  $C$  égaux, l'angle  $DBC$  étant par exemple aigu, nous considérerons le pôle  $A$  de l'arc  $BC$  qui est dans le même hémisphère que  $A'$ , soit  $H$  le milieu de l'arc  $BC$  et  $D$  le point où l'arc  $BA'$  coupe  $AH$ . Joignons  $D$  à  $C$  par un arc de grand cercle, les arcs  $DC$  et  $A'C$  feront au-dessus de  $BC$  un angle égal à l'angle  $DBH$ ; donc ces arcs  $DC$  et  $A'C$  coïncideront. Donc  $A'$  devant coïncider avec  $D$ , on aura bien arc  $A'C = \text{arc } A'B$ .

Ainsi, un triangle sphérique, qui a deux angles égaux, aura aussi égaux les côtés opposés à ces angles.

3. — *Triangle sphérique propre qui a deux angles inégaux.* — **THÉORÈME.** — *Dans un pareil triangle sphérique les côtés opposés à ces angles sont inégaux et dans le même ordre de taille.*

Du sommet  $B$  du plus grand des deux angles (fig. 62) traçons l'arc de grand cercle  $Bl$  qui, dans le triangle fait avec le côté  $BC$  commun aux deux angles un angle égal au plus petit des deux angles comparés dont le sommet est en  $C$ , cet arc coupe

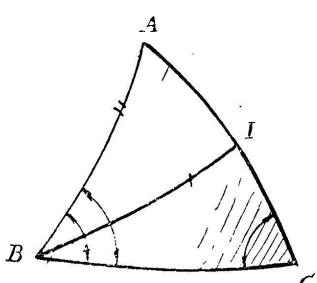


Fig. 62.

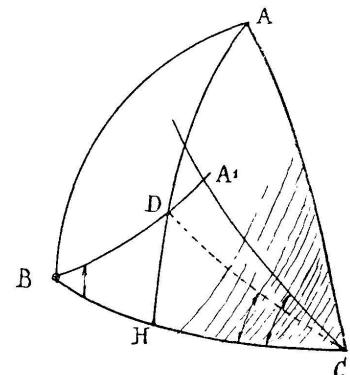


Fig. 61.

le côté  $AC$  en  $I$ ; le triangle équiangle  $IBC$  est alors isocèle et

$$\text{arc } BI = \text{arc } IC.$$

Or le triangle propre  $AIB$  donne :

$$\text{arc } AB < \text{arc } AI + \text{arc } IB$$

c'est-à-dire

$$\text{arc } AB < \text{arc } AI + \text{arc } IC$$

ou enfin

$$\text{arc } AB < \text{arc } AC.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

On va établir la *réciproque* de cette proposition.

4. — *Triangle sphérique qui a deux côtés inégaux.* — Soient (sans figure)  $a$  et  $b$  les côtés inégaux;  $\widehat{A}$  et  $\widehat{B}$  les angles respectivement opposés à ces côtés; je dis que le fait :  $a < b$  va entraîner le fait :  $\widehat{A} < \widehat{B}$ .

En effet des trois seules hypothèses possibles

$$1^\circ \widehat{A} > \widehat{B}; \quad 2^\circ \widehat{A} = \widehat{B}; \quad 3^\circ \widehat{A} < \widehat{B}$$

la première entraînerait (V; II, 3)  $a > b$ ; la seconde exigeait (V; II, 2) que  $a = b$ ; la troisième hypothèse subsiste donc seule et la démonstration est achevée.

5. — *Comparaison de ces théorèmes avec les théorèmes analogues du plan.* — En comparant les propositions qui précèdent et leurs analogues dans le plan (Chapitre III) le lecteur aperçoit la raison des changements nécessaires dans les étapes des démonstrations. Nous avions, avec les propriétés admises pour la droite, adopté et justifié pour cette série de propositions le point de départ suivant :

L'angle *extérieur* d'un triangle dépasse l'un et l'autre des deux angles du triangle qui n'ont pas même sommet que l'angle extérieur considéré.

Or cette proposition, on le voit aisément, *est fausse* pour les triangles sphériques; exemple : ceux-ci peuvent avoir deux angles droits et un troisième angle supérieur à 1 droit.

En revanche nous possédions pour les triangles sphériques, images des trièdres, cette proposition qu'un côté du triangle est plus petit que la somme des deux autres.

De là ce changement dans la marche suivie; les angles sphériques ne sont plus superposables sur eux mêmes par retournement, et les raisonnements, qui pour le plan employaient le retournement, sont remplacés sur la sphère par les raisonnements qui invoquent les propriétés de la symétrie.

Ces remarques se vérifieront encore dans la théorie des perpendiculaires et des obliques sphériques que nous allons résumer succinctement.

### III. — Perpendiculaires et obliques sur la sphère.

Etant donnés sur la sphère (sans figure) un arc de grand cercle  $XY$  et un point  $A$  hors de cet arc, nous distinguerons deux cas : 1<sup>o</sup> ou bien  $A$  est un pôle de  $XY$  : 2<sup>o</sup> ou bien  $A$  est distinct des pôles de  $XY$  ; en nous rappelant les propriétés de la projection d'une droite sur un plan (chapitre II) nous voyons que dans le cas 1<sup>o</sup> tous les arcs de grand cercle joignant  $A$  aux divers points de  $XY$  sont égaux à un quadrant et tous perpendiculaires à  $XY$  ; au contraire dans le second cas on obtient l'arc perpendiculaire à  $XY$  et passant par  $A$  en joignant ce point à l'un ou l'autre pôle de  $XY$ .

L'arc ainsi obtenu *est unique* mais il a deux pieds : (fig. 63) le pied H ou le pied K ; l'un d'eux H est à une distance de A moindre qu'un quadrant. Nous allons voir que cette distance AH est la plus courte distance sphérique de A aux divers points de XY ; comparons l'arc AH à l'arc *oblique* AM prolongeons AH d'une longueur

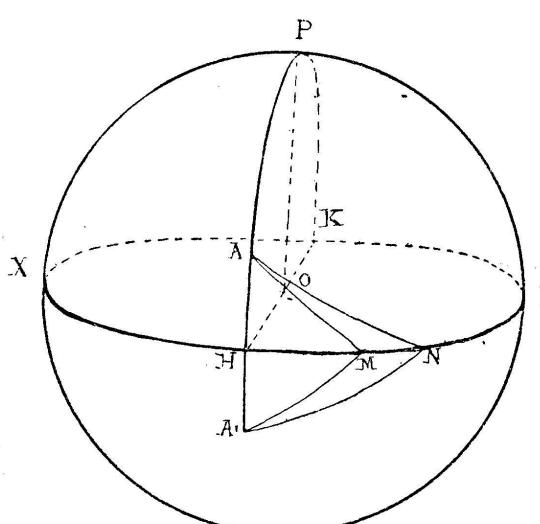


Fig. 63.

Y les arcs AM et A'M sont égaux comme symétriques par rapport au plan du cercle XY, donc

$$2 \text{ arc } \text{AH} < 2 \text{ arc } \text{AM}$$

ou

$$\text{arc } AH < \text{arc } AM.$$

Soient (fig. 63) AM et AN deux obliques aboutissant du même côté de H et telles que HM et HN soient tous deux moindres que 2 quadrants. Soit alors  $\text{arc } HM < \text{arc } HN$ .

Le triangle  $AMA'$  est intérieur alors au triangle propre  $ANA'$  or soient (fig. 64) deux tels triangles; prolongeons l'arc  $AM$  jusqu'en  $J$  sur  $A'N$ ; par les deux triangles sphériques partiels on a :

$$\text{arc } AM + \text{arc } MJ < \text{arc } AN + \text{arc } NJ$$

$$\text{arc } A'M < \text{arc } MJ + \text{arc } JA;$$

d'où, en ajoutant ces égalités membre à membre :

$$\text{arc } AM + \text{arc } MA' < \text{arc } AN + \text{arc } NA',$$

en appliquant ceci à la figure 63, nous aboutirons à la conclusion :

$$2 \text{arc } AM < 2 \text{arc } AN, \quad \text{ou à :} \quad \text{arc } AM < \text{arc } AN;$$

donc, de 2 obliques sphériques qui s'écartent inégalement du *pied propre* de la perpendiculaire celle qui s'écarte le plus est la plus grande.

**PROPRIÉTÉ DES OBLIQUES RÉDUITES. — TRIANGLES RÉDUITS.** — Nous considérons d'abord (fig. 65) les obliques dont les pieds s'écartent de moins d'un quadrant du pied de la plus courte distance; consi-

dérons d'abord deux telles obliques  $AM$  et  $AN$ , situées dans un même hémisphère par rapport à  $AH$ ; soit  $\text{arc } HM < \text{arc } HN$  et soit  $AM'$  l'arc symétrique de  $AM$  par rapport au plan de l'arc  $AH$ ;  $\text{arc } AM < \text{arc } AN$ ; donc:  $\text{arc } AM' < \text{arc } AN$ ; donc, dans le triangle propre  $M'AN$  angle  $\widehat{AM'H} > \widehat{ANM}$ ; donc, en revenant au triangle  $AMN$ , angle extérieur en  $M < \widehat{ANM}$ .

*Remarque.* — On étendra aisément cette propriété à tout triangle sphérique *réduit*, c'est-à-dire, dont les trois côtés sont moindres qu'un quadrant.

*Petits cercles sur la sphère.* — Le rayon sphérique d'un petit cercle de la sphère sera la distance sphérique de l'un des pôles à un point quelconque du petit cercle; dans ce qui suit nous prendrons pour pôle celui des pôles pour lequel le rayon sphérique est moindre qu'un quadrant.

La remarque faite tout à l'heure sur l'angle extérieur des triangles sphériques réduits nous permettra de démontrer à l'égard des petits cercles de la sphère les mêmes théorèmes de continuité que ceux établis pour les cercles du plan; en considérant ainsi les pôles propres et les rayons propres des petits cercles de la

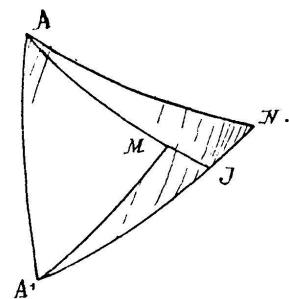


Fig. 64.

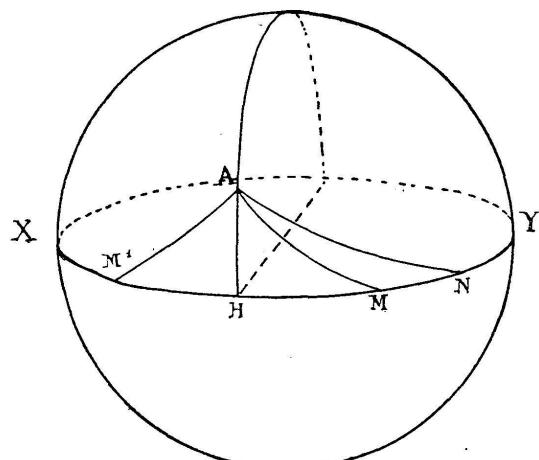


Fig. 65.

sphère, nous aurons alors pour les positions mutuelles de deux petits cercles de la surface sphérique les mêmes critères que pour les cercles du plan (voir chapitre IV).

#### IV. — Quelques propriétés spéciales aux triangles sphériques, leurs aires comparées.

1<sup>o</sup> *Le fuseau sphérique et la notion d'aire sphérique.* — Les fuseaux sphériques de même angle sont, au moins d'une manière, superposables; ils représentent des *étendues* ou *aires* sphériques mesurables et comparables entre elles comme les angles des fuseaux considérés.

D'autre part si on partage un fuseau en deux portions par un plan perpendiculaire à l'arête du fuseau on obtient deux triangles sphériques bi-rectangles symétriques et isocèles admettant un mode de superposition indiqué par la figure 66.

L'aire du fuseau est alors *double* de l'aire de l'un ou l'autre de ces triangles.

Nous appellerons *aires sphériques équivalentes*: des aires qui sont composées de *portions superposables en correspondance dans les deux figures*.

Si on prend comme unité d'aire *l'aire du triangle sphérique trirectangle* qui est la huitième portion de la sphère, l'aire d'un fuseau sera évidemment mesurée par deux fois le nombre qui mesure son angle comparé à l'angle droit.

2<sup>o</sup> **THÉORÈME.** — *Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents.* — Si on élève sur deux côtés d'un triangle sphérique, et en leurs milieux, des arcs de grand cercle perpendiculaires respectivement à ces côtés, le point I (sans figure) où ces arcs se coupent est à des distances sphériques égales des trois sommets, il appartient donc à l'arc de grand cercle perpendiculaire au troisième côté en son milieu.

Soient (fig. 67, en haut) ABC et A'B'C' deux triangles sphériques symétriques, le point I' symétrique du point I de l'un sera évidemment à distances sphériques égales des trois som-

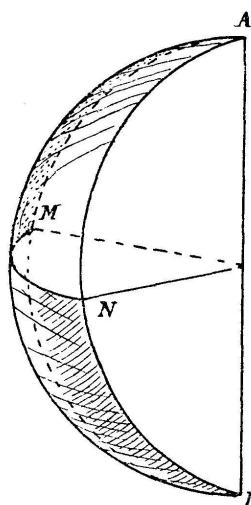


Fig. 66.

mets, puisque les éléments plans correspondants des figures symétriques sont égaux.

Pour la même raison les distances sphériques  $AI$ ,  $AH$ ,  $BH$ ,  $HC$  sont respectivement égales à leurs symétriques, arcs  $A'I'$ , arc  $A'H'$ , arc  $B'H'$ , arc  $H'C'$ ; d'où résulte que si le point  $I$  est intérieur à  $ABC$ ,  $I'$  sera intérieur à  $A'B'C'$ , et que si le point  $I$  est dans l'angle  $\widehat{ABC}$  et de l'autre côté de  $AC$  que  $B$ , la position de  $I'$  à l'égard des éléments symétriques  $A'B'C'$  sera la même que la disposition précédente, quoiqu'avec une orientation différente.

Le triangle sphérique considéré est alors la somme de trois portions additives ou la somme de deux portions positives diminuée d'une portion soustractive; ces portions sont *isocèles*, et par conséquent admettent un mode de superposition avec leurs symétriques, d'où résulte enfin que les deux

triangles sphériques  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont bien équivalents.

3<sup>o</sup> *Mesure de l'aire d'un triangle sphérique.* — En prolongeant (fig. 68) les côtés  $AC$  et  $CB$  jusqu'aux points  $A'$  et  $B'$  où ils recoupent respectivement le côté  $AB$  prolongé, on partage toute une moitié de la sphère en quatre triangles :  $ACB$ , et les trois triangles (1), (2), (3).

Avec l'unité d'aire adoptée la demi-sphère vaut 4 unités; soient  $\widehat{A}$ ,

$\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$  les angles du triangle sphérique considéré, le triangle (1) vaut le fuseau  $B$  moins le triangle  $ACB$ ; le triangle (2)

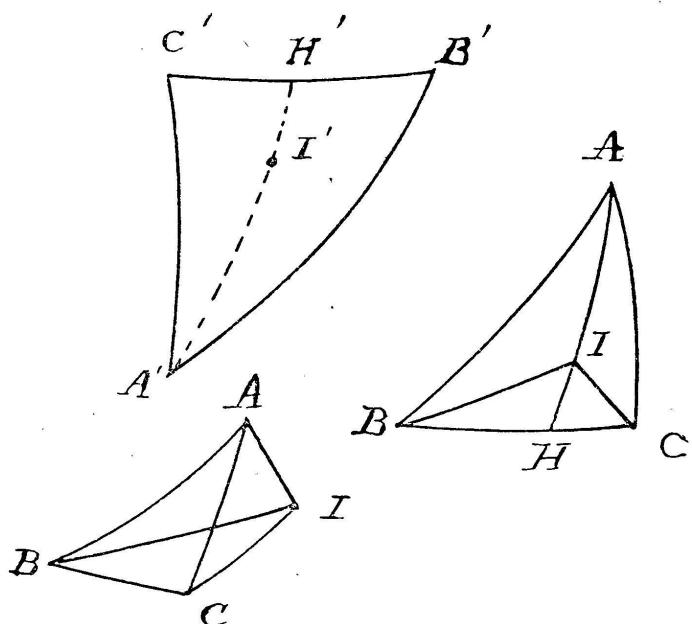


Fig. 67.

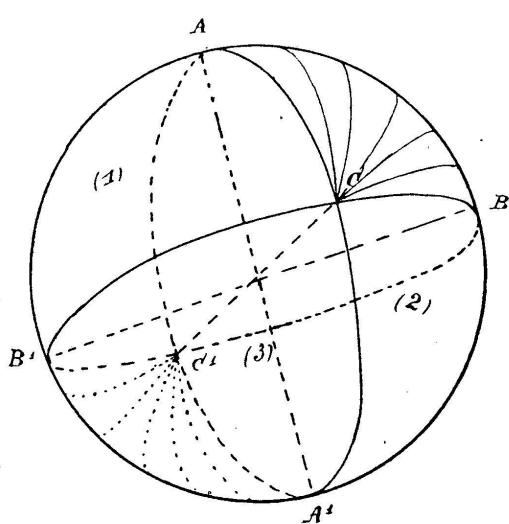


Fig. 68.

vaut le fuseau A moins le triangle ACB ; le triangle (3) vaut le fuseau C moins le symétrique A'C'B' du triangle ACB, d'ailleurs équivalent à ce dernier ; chaque fuseau étant mesuré par 2 fois son angle mesuré lui-même avec l'angle droit, nous aurons, par la décomposition de l'hémisphère ci-dessus définie,

$$(2A - \text{aire } ACB) + (2B - \text{aire } ACB) + (2C - \text{aire } ABC) + \text{aire } ACB = 4$$

d'où :

$$\text{aire } ABC = (A + B + C - 2) \text{ droits.}$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME. — *L'aire d'un triangle sphérique est mesurée par l'excès sur deux droits de la somme de ses angles ; c'est ce qu'on nomme l'excès sphérique du triangle.*

## CHAPITRE VI

*Géométrie qualitative de la sphère. — Déplacements de pivotement d'un corps solide.*

*Où s'arrête la géométrie qualitative ? Où commence la géométrie métrique ?*

### I. — Triangles sphériques supplémentaires et trièdres associés.

En comparant les aires des triangles sphériques situés sur une même surface sphérique, nous avons reconnu que la somme des trois angles d'un triangle sphérique dépasse deux angles droits par un *excès* dont la valeur est proportionnelle à l'aire du triangle ; cet excès est ce qu'on appelle l'excès sphérique du triangle.

On peut se proposer d'établir directement l'existence de cet excès sphérique soit sur le triangle sphérique, mais sans passer par la notion d'aire, soit sur l'angle trièdre dont le triangle est l'image.

C'est cette dernière méthode que nous suivrons.

Nous allons définir d'abord les trièdres *réciproques* ou

marque qui peut intéresser les lecteurs géomètres ; les propriétés de l'étendue vectorielle en géométrie générale, telles que je les ai exposées dans l'article précité, vont être éclairées d'un nouveau jour par le théorème d'Ampère-Stokes.

En effet, le vecteur *tourbillon* d'un vecteur donné, correspond à une distribution continue et même dérivable ; or, les deux caractères de *dérivabilité* et de *continuité*, dont le premier contient d'ailleurs le second, ne sont pas essentiellement euclidiens. De là l'extension du théorème d'Ampère-Stokes en géométrie générale ; enfin, cette extension nous donne immédiatement et d'une manière intuitive le théorème suivant :

L'espace euclidien est le seul dans lequel puisse exister un réseau triple orthogonal avec conservation de la longueur des arcs correspondants ; en d'autres termes, le théorème d'Ampère-Stokes nous montre de suite que si l'élément linéaire  $ds$  d'un espace est réductible à la forme :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

cet espace est nécessairement euclidien.

Ce rapprochement entre la *méthode classique* des  $(ds)^2$  et ma *méthode vectorielle* pour l'étude de la géométrie générale me paraît intéressant à signaler.

J. A.

---

## L'IMPORTANCE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DES VECTEURS DANS LE CALCUL VECTORIEL GÉNÉRAL

---

Une fois établi (et cela nous semble logique) que : « *l'unification des notations vectorielles doit être faite en tenant compte des résultats auxquels conduira l'analyse, complète et rationnelle, des entités géométriques et mécaniques, de leurs opérations et de leurs fonctions* », nous croyons utile d'indiquer brièvement l'état actuel des recherches relatives à la question, et quelles sont les entités qui doivent encore être étudiées par rapport à leur théorie générale et à leurs applications.

M. R. MARCOLONGO et moi, nous avons étudié<sup>1</sup> sous l'as-

<sup>1</sup> *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* Nota I, tomo XXIII (1<sup>o</sup> sem. 1907) : Nota II, t. XXIV ; 2<sup>o</sup> sem. 1907) : Nota III, t. XXIV : Nota IV, t. XXV (1<sup>o</sup> sem. 1908) : Nota V (éd ultima), t. XXVI (2<sup>o</sup> sem. 1908).

associés, dont les images sphériques seront deux triangles dits *polaires* ou *supplémentaires*.

Envisageons (fig. 69) un trièdre de sommet S et dont les arêtes sont les trois demi-droites SA, SB, SC. Par S élevons une droite perpendiculaire à la face BSC du trièdre, et nous aurons soin de la tirer du même côté de cette face que celui où se trouve l'arête SA, nous obtenons ainsi la demi-droite SA'; en répétant cette construction pour chaque face, nous formons un nouveau trièdre de sommet S et dont les arêtes sont SA', SB', SC'.

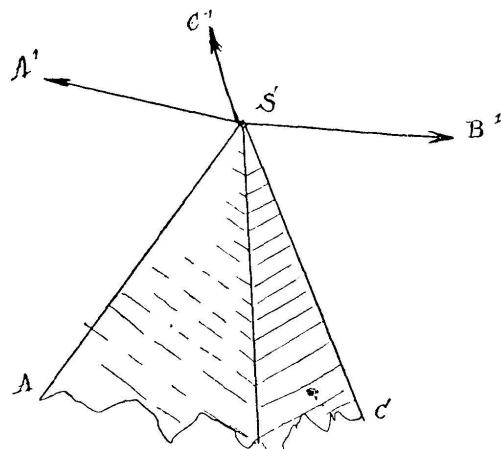


Fig. 69.

Ces deux trièdres sont dans une corrélation telle que *toute face* de l'un orientée par rapport à l'arête opposée, engendre une *arête correspondante* du second trièdre ; on les appelle deux trièdres *associés* ou *réciproques* ou encore : deux trièdres *supplémentaires* ; ces désignations se rattachent à des propriétés aussi simples que remarquables que nous allons maintenant établir.

1<sup>o</sup> Le mode d'association des deux trièdres est *réciproque*. Faisons d'abord la remarque suivante qui est une vérité de la Palice : considérons un assemblage de deux demi-droites

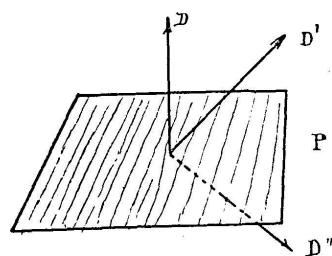


Fig. 70.

(fig. 70) tirées par un point O d'un plan P, et dont l'une D est perpendiculaire à ce plan ; ces demi-droites seront d'un même côté du plan P ou bien de part et d'autre de ce plan suivant que l'angle de ces demi-droites sera *aigu* ou *obtus* ; la remarque se justifie immédiatement en considérant l'intersection OU du plan P avec le plan passant par les droites données.

Dès lors, revenons à nos deux trièdres associés (fig. 69). L'arête SB' a été conduite perpendiculaire au plan ASC ; l'arête SC' a été menée perpendiculaire au plan ASB ; en particulier SB' et SC' sont l'une et l'autre, perpendiculaires à SA ; SA est donc une droite perpendiculaire à la face B'SC'.

et comme l'angle  $A'SA$  est aigu,  $SA$  sera perpendiculaire à la face  $B'SC'$  et du même côté de cette face que  $SA'$ .

Ainsi le premier trièdre dérive du second trièdre, comme le second dérivait du premier.

2° Dans le trièdre d'arêtes SA, SB, SC, considérons le dièdre d'arête SC ; et (fig. 71) soient tracées : la droite SA' perpendiculaire orientée à la face CSB et la droite SB' perpendiculaire orientée à la face CSA de ce dièdre. Soit XSY l'angle rectiligne de ce dièdre ayant S pour sommet. Pour fixer les idées supposons XSY aigu, en ce cas :

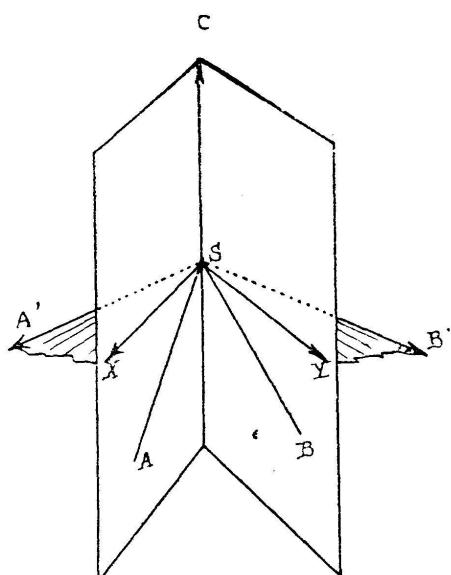


Fig. 71.

$$1^{\text{dr}} = \widehat{A'SY} = \widehat{XSY} + \widehat{A'SX} ;$$

et de même :

$$1^{\text{dr}} = \widehat{B'SX} = \widehat{XSY} + \widehat{YSB'} ;$$

ces égalités se lisent dans le plan du rectiligne du dièdre; ajoutons ces égalités membre à membre, on aura :

$$2^{dr} = \widehat{XSY} + (A'\widehat{SX} + \widehat{XSY} + \widehat{YSB'}) \\ \equiv \widehat{XSY} + A'\widehat{SB'}.$$

Ainsi une face du trièdre associé est le supplément de l'angle dièdre correspondant qui a pour arête l'arête du trièdre primitif associée à cette face du second trièdre.

*Nouvelles propriétés des trièdres déduites de la notion des trièdres associés.* — Soient :  $a, b, c$ , les faces et  $A, B, C$ , les dièdres d'un trièdre  $T$ , opposés à ces faces ; soient :  $a', b', c'$ , les faces et  $A', B', C'$ , les dièdres du trièdre  $T'$  associés à  $T$  ; d'après la propriété déjà établie, et d'après la réciprocité de l'association des deux trièdres on a :

$$\begin{array}{l||l} a = 2^{\delta} - A', & A = 2^{\delta} - a', \\ b = 2^{\delta} - B', & B = 2^{\delta} - b', \\ c = 2^{\delta} - C', & C = 2^{\delta} - c'. \end{array}$$

Or dans le trièdre  $T'$  on a :

$$a' + b' + c' < 4^{\text{dr}};$$

Or des égalités précédentes on déduit :

$$A + B + C = 6^{\text{dr}} - (a' + b' + c') ,$$

c'est-à-dire :

$$A + B + C > 6^{\text{dr}} - 4^{\text{dr}} \text{ ou } 2^{\text{dr}} .$$

Nous retrouvons ainsi l'existence de l'excès sphérique, comme propriété corrélative du *théorème du parapluie*. (Chap. III.)

Cherchons de même un théorème corrélatif du théorème qui montre toute face d'un trièdre plus petite que la somme des deux autres ; soit  $a'$  la *plus grande face* du trièdre  $T'$  on a :

$$a' < b' + c'$$

ou en vertu des égalités précédentes :

$$2 - A < 2 - B + 2 - C \text{ ou } A + 2 > B + C .$$

Ainsi : *dans un angle trièdre le plus petit dièdre augmenté de deux droits dépasse la somme des deux autres dièdres*.

*Remarque.* — Le théorème sur l'excès sphérique peut encore s'énoncer ainsi :

*Dans un triangle sphérique, un angle extérieur est plus petit que la somme des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.*

## II. — Le problème du dallage de la sphère.

Nous appelons *polygone sphérique convexe* une portion de la sphère, limitée par des arcs de grand cercle, mais située tout entière dans une même hémisphère bornée par chaque côté du polygone prolongé en circonférence entière de grand cercle.

On voit sans peine que si on considère un polygone convexe *régulier*, c'est-à-dire ayant ses angles égaux entre eux et ses côtés égaux entre eux, les sommets de ce polygone seront tous situés sur un même petit cercle dont le pôle sera dit un pôle du polygone.

*Problème.* — Quels sont les polygones réguliers sphériques convexes que l'on peut reproduire et réunir, contigus par côtés et par sommets, de manière à recouvrir toute la sur-

face de la sphère, *sans répétition ni lacune*? en d'autres termes quels sont les polygones réguliers convexes aptes à *daller* la surface de la sphère? Désignons par  $x$  le *nombre* des polygones réunis autour d'un même sommet ou *nœud* du réseau de dallage,  $x$  angles contigus formant 4 angles droits, chaque angle du polygone vaut  $\frac{4}{x}$  droits. D'autre part, soit  $y$  le nombre des côtés de chaque polygone, ou *dalle*. Du pôle de chaque dalle, on verra chaque côté de la dalle sous un angle sphérique égal à  $\frac{4}{y}$  droits; le triangle isocèle qui a pour sommet ce pôle et pour base un côté de la dalle a un *excès sphérique* égal à  $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2$  droits.

Ce nombre mesure la surface sphérique de la  $y^{\text{me}}$  partie de la dalle quand on prend comme unité le triangle trirectangle qui vaut le  $\frac{1}{8}$  de la sphère; avec cette unité l'aire d'une dalle est donc  $\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2\right)y$ ; dès lors, si nous nommons  $z$  le nombre des *dalles* dont l'ensemble recouvre la sphère, on aura *entre les trois nombres entiers*  $x$ ,  $y$  et  $z$  la relation :

$$\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} - 2\right)z \cdot y = 8$$

que nous pourrons écrire ainsi :

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} = \frac{2}{zy} ;$$

le problème du dallage sphérique revient donc à trouver tous les nombres entiers  $x$ ,  $y$ ,  $z$  unis par cette relation, ou comme on dit encore à résoudre l'équation (1) en nombres entiers.

Ce problème d'arithmétique est d'ailleurs très facile; nous nous contenterons ici d'en énoncer les solutions, qui sont au nombre de cinq, savoir :

- 1<sup>re</sup> solution :  $x = 3$ ,  $y = 3$ ,  $z = 4$ ;
- 2<sup>me</sup> solution :  $x = 3$ ,  $y = 4$ ,  $z = 6$ ;
- 3<sup>me</sup> solution :  $x = 3$ ,  $y = 5$ ,  $z = 12$ ;
- 4<sup>me</sup> solution :  $x = 4$ ,  $y = 3$ ,  $z = 8$ ;
- 5<sup>me</sup> solution :  $x = 5$ ,  $y = 3$ ,  $z = 20$ .

Ces cinq modes de dallages sphériques font évidemment connaître aussi cinq solides, limités par des polygones réguliers qui sont réunis par leurs côtés et assemblés par angles polyèdres réguliers ; ces solides, nommés *polyèdres réguliers convexes*, ont tous leurs sommets situés sur la surface sphérique que l'on a envisagée.

### III.— Triangles sphériques et rotations successives d'un solide.

*Glissement sphérique.* — Quand un corps solide reste cloué par un point fixe O et qu'il se meut, ce mouvement se nomme un mouvement de *pivotement* ; une portion du solide qui est à un instant sur une surface sphérique ayant le point O comme centre demeurera sans cesse sur la surface de cette même sphère. Comme trois points définissent un solide, on peut dire que le mouvement de pivotement équivaut au glissement d'une figure sphérique sur sa sphère.

1<sup>o</sup> *Effet de deux rotations successives.* Soient marqués sur la sphère considérée les pôles de deux rotations successives ; sans doute, pour chaque rotation on pourrait hésiter entre deux pôles, mais nous adopterons le pôle sur lequel un observateur marchant sur la sphère, étant posé tête hors la sphère, verrait s'accomplir la rotation considérée dans un sens déterminé par rapport à sa gauche et à sa droite ; A (fig. 72) est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *première* rotation ; B est le point de la sphère fixe qui va être le pôle de la *deuxième* rotation.

On peut même supposer que ces rotations soient chacune moindre qu'un demi-tour, soit alors  $u$  la rotation sur A vue par l'observateur posé sur le pôle A dans le sens des aiguilles d'une montre, soit de même  $v$  la rotation également orientée sur le pôle B.

Nous nous proposons de construire un point de la figure sphérique entraînée qui finalement n'aura pas bougé ; à cet effet joignons le premier pôle A au second par un arc de grand cercle AB moindre qu'une demi-circonférence.

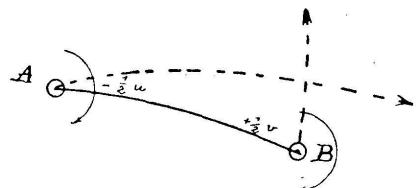


Fig. 72.

Faisons tourner (fig. 73) l'arc  $\overrightarrow{AB}$  autour de A d'un angle  $\frac{1}{2}u$ , mais en sens contraire du sens de la rotation donnée, nous obtenons sur l'hémisphère (1) un arc AX; faisons de même tourner l'arc  $\overrightarrow{BA}$  autour du second pôle d'un angle  $\frac{1}{2}v$ ,

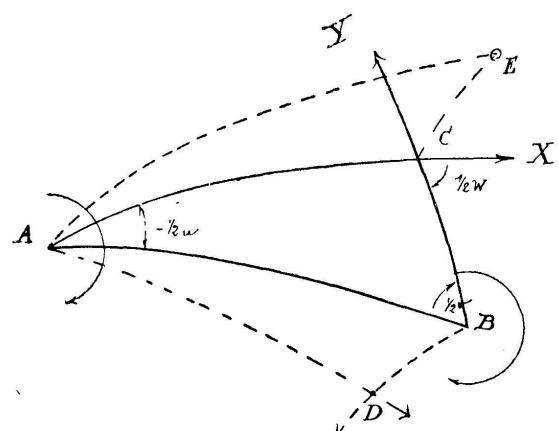


Fig. 73.

mais dans le sens même de la seconde rotation; nous obtenons ainsi un arc BY allant encore sur l'hémisphère (1); les deux arcs AX et BY se croisent sur l'hémisphère (1) en un point C.

Le point de la figure sphérique qui était en C avant la première rotation va par cette rotation venir en D, position symétrique de C par rapport au

plan de l'arc AB; la seconde rotation ramène le point D en C. C n'a donc, en définitive, point bougé.

Donc, le déplacement final du solide résulte d'une rotation autour de C qui représente sur la sphère *l'axe* qui joint à C le centre O de la sphère.

*Ainsi deux rotations dont les axes se croisent en un point O sont remplaçables par une rotation unique dont l'axe passe aussi par le même point O.*

*Remarque.* — Si l'ordre des rotations avait été changé, mais si leurs grandeurs et si leurs pôles sur la sphère fixe avaient été maintenus, le pôle C de la rotation unique remplaçant les deux autres eût été au point D.

*Grandeur de la rotation remplaçante.* — Soit (fig. 73) E le point symétrique de B par rapport au plan de l'arc AX, le point E de la figure sphérique vient en B par la première rotation, de plus il y demeure pendant la seconde rotation.

De là résulte que l'angle  $\widehat{XCB}$  extérieur au triangle ACB représente la moitié  $\frac{1}{2}w$  de la rotation *remplaçante* w.

**2<sup>o</sup> THÉORÈME.** — *Tout déplacement défini de pivotement sur un point O peut toujours être réalisé par une rotation exécutée autour d'un certain axe passant par O.*

En effet, une figure sphérique a toujours sa situation définie par les situations de deux de ses points; or le changement des positions de ceux-ci peut toujours être produit par un premier changement amenant le point  $P$  (fig. 74) en sa position finale  $P'$ , suivi d'une rotation *convenable* autour du pôle  $P'$ , qui laisse la droite  $OP'$  invariable.

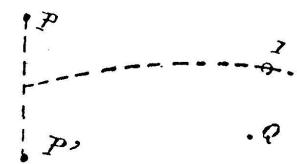


Fig. 74.

Le premier changement peut être réalisé par une rotation convenable exécutée autour d'un pôle  $I$  appartenant à l'arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc  $PP'$  en son milieu, *et ceci, même d'une infinité de manières*. Le déplacement final de la figure est donc produit par une première rotation autour de  $I$  suivie d'une seconde rotation autour de  $P'$ ; or nous venons de voir que ces deux déplacements successifs peuvent être remplacés par une rotation unique, et le théorème est démontré.

*Remarques.* — Il est d'ailleurs bien évident, d'après la définition de la ligne droite, et les propriétés des trames, que deux rotations autour de deux axes concourants ne s'équivalent que si elles sont exécutées autour d'un même axe. D'où la conséquence suivante :

*Autre remarque.* — Si le pôle  $A$  est donné, le lieu des axes des secondes rotations qui produisent après une rotation de pôle  $A$  un pivotement *total donné* est un plan, c'est le plan du grand cercle qui fait en  $C$  avec l'arc  $\overrightarrow{CX}$  (fig. 73) l'angle déterminé  $\frac{1}{2} w$ .

#### IV.— Fin de la Géométrie qualitative. Prévision de la Géométrie métrique.

Un triangle plan ou un triangle sphérique, image d'un trièdre, renferment 6 éléments : 3 côtés et 3 angles; notons seulement que dans un triangle sphérique les mots côtés, appliqués aux arcs de cercle qui forment les côtés, désignent en réalité : les angles au centre de la sphère dont ces arcs sont les images, ou encore les faces du trièdre correspondant au triangle sphérique.

Aux trois cas généraux d'égalité des triangles plans correspondent, on le vérifie bien aisément, trois cas d'*égalité ou symétrie* des triangles sphériques. Exemple : si deux triangles sphériques ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, l'un des triangles est ou bien égal à l'autre ou égal à un symétrique de l'autre.

Or, ces divers cas d'égalité nous montrent que, aussi bien dans les triangles sphériques que dans les triangles plans, les six éléments d'un triangle solide dépendent de trois d'entre eux, puisque trois d'entre eux permettent de construire le triangle ou son symétrique. Il doit donc exister un moyen de *calculer* ou de *construire* les grandeurs de trois des éléments du triangle, *connaissant les trois autres*.

*Ces constructions ou ces calculs* seront l'objet du second livre de la géométrie naturelle, elles formeront la géométrie *quantitative ou métrique*.

Nous terminons ici le *premier livre*, et nous pourrons le résumer en disant qu'il comprend essentiellement :

1<sup>o</sup> La notion des deux mouvements fondamentaux d'un solide : rotation autour d'une droite; translation avec guidage plan autour d'une droite qui est l'axe de la translation.

2<sup>o</sup> L'ajustage ou la correspondance des figures égales.

3<sup>o</sup> La symétrie.

C'est ce qu'on peut encore appeler la *Géométrie qualitative*. Elle doit être enseignée avec des *modèles* de solides et de mouvements.

J. ANDRADE (Besançon).

P.-S. — *Remarques.* — 1. Bien que l'exposé didactique du premier livre de la géométrie nouvelle soit achevé, je rappellerai aux lecteurs de cette *Revue* que le second livre ou la géométrie métrique a été approfondi ici même dans mon article intitulé « Les fonctions angulaires dans la géométrie de l'ajustage » (8<sup>e</sup> année, p. 257-281). Cet article pourra être aisément et considérablement allégé en vue d'un enseignement élémentaire qui, à mon avis, doit rester euclidien (en ce sens qu'on adoptera avec Euclide le phénomène de la similitude), mais qui néanmoins doit faire *sentir*, même au débutant, que le solide euclidien pour être le plus simple n'est pourtant pas le seul, logiquement possible, et cela suffira pour une première étude élémentaire.

II. Quittons maintenant le domaine pédagogique. Voici une re-