Etude du gas ou la fongtion f() nest pas entière. Resultats de Cesaro.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Etude du cas ou la fonction $f(\xi)$ n'est pas entière. Résultats de Cesaro.

11. — Je vais indiquer très brièvement ce qu'il advient lorsque la fonction sommatrice f a des singularités à distance finie. Je m'en tiendrai d'ailleurs au cas où ce sera une fraction rationnelle. Ce cas qu'il me semble naturel de placer après celui où f n'a pas de singularités à distance finie a été cependant le premier étudié au point de vue historique. Il correspond à des formules données en premier lieu par Cesàro. La formule fondamentale (1) du paragraphe 1 subsiste si Γ est un cercle de rayon fini mais, pour que les intégrations conservent la forme indiquée dans la suite, Γ ne doit contenir aucun point singulier de f. On peut alors imaginer que ce cercle Γ qui a l'origine pour centre soit décrit de manière à s'approcher autant qu'on le voudra du point singulier de f le plus rapproché de l'origine et que la variable ξ, tout en restant dans Γ, s'approche aussi du point singulier en question ce qui est une manière de faire croître $|f(\xi)|$ autant qu'on veut. Mais alors, des conditions $|\xi| < |\zeta|$, $|\xi x| < |\zeta z|$, on ne peut tirer autre chose que $|x| \leqq |z|$. La condition $|x| < |z|$ est la même que celle qui caractérise la formule de Taylor ; comme de plus nous pouvons avoir $|x| = |z|$ il s'en suit que l'on peut obtenir des formules valables sur la circonférence du cercle de convergence d'un développement taylorien.

Prenons par exemple $f(\xi) = \dfrac{1}{1-\xi}$. Nous aurons

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi s_1 + \xi^2 s_2 + \dots}{1 + \xi + \xi^2 + \dots}$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}$$

ce qui est la formule bien connue donnée par Cesàro.

Prenons encore, p étant entier,

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi^p} .$$

Alors

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi^p s_p + \xi^{2p} s_{2p} + \cdots}{1 + \xi^p + \xi^{2p} + \cdots},$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \cdots + s_{(n-1)p}}{n}.$$

Pour $p = 1$, cette dernière formule redonne celle de Cesàro. On peut faire à son sujet plusieurs remarques curieuses.

D'abord on peut la considérer comme un cas particulier des formules obtenues non pas en faisant tendre ξ vers la racine égale à 1 de l'équation $\xi^p - 1 = 0$ mais en faisant tendre ξ vers l'une quelconque des racines de cette équation, c'est-à-dire vers l'un des sommets d'un polygone régulier de p côtés inscrit dans le cercle $|\xi| = 1$.

Voici une remarque plus importante encore relative à la dernière formule donnée pour $F(x)$. Soit x à l'intérieur du cercle de convergence. Alors on peut prendre p assez grand pour que les sommes s_p, s_{2p}, ..., $s_{(n-1)p}$ diffèrent les unes des autres d'aussi peu qu'on voudra. Dans ces conditions la formule considérée peut s'écrire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{s_0}{n} + \frac{n-1}{n} s_{(n-1)p}\right]$$

c'est-à-dire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} s_{(n-1)p}.$$

Ce n'est autre chose que la formule de Taylor elle-même qu'il est bien intéressant de retrouver directement comme cas particulier de formules plus générales étudiées dans ce travail.

A. Costabel (Montpellier).