

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1908)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE 1  
**Autor:** Costabel, A.  
**Kapitel:** Etude du gas ou la fongtion  $f()$  nest pas entière. Resultats de Cesaro.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10979>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ETUDE DU CAS OU LA FONCTION  $f(\xi)$  N'EST PAS ENTIÈRE.

RÉSULTATS DE CESARO.

11. — Je vais indiquer très brièvement ce qu'il advient lorsque la fonction sommatrice  $f$  a des singularités à distance finie. Je m'en tiendrai d'ailleurs au cas où ce sera une fraction rationnelle. Ce cas qu'il me semble naturel de placer après celui où  $f$  n'a pas de singularités à distance finie a été cependant le premier étudié au point de vue historique. Il correspond à des formules données en premier lieu par Cesàro. La formule fondamentale (1) du paragraphe 1 subsiste si  $\Gamma$  est un cercle de rayon fini mais, pour que les intégrations conservent la forme indiquée dans la suite,  $\Gamma$  ne doit contenir aucun point singulier de  $f$ . On peut alors imaginer que ce cercle  $\Gamma$  qui a l'origine pour centre soit décrit de manière à s'approcher autant qu'on le voudra du point singulier de  $f$  le plus rapproché de l'origine et que la variable  $\xi$ , tout en restant dans  $\Gamma$ , s'approche aussi du point singulier en question ce qui est une manière de faire croître  $|f(\xi)|$  autant qu'on veut. Mais alors, des conditions  $|\xi| < |\zeta|$ ,  $|\xi x| < |\zeta z|$ , on ne peut tirer autre chose que  $|x| \leq |z|$ . La condition  $|x| < |z|$  est la même que celle qui caractérise la formule de Taylor; comme de plus nous pouvons avoir  $|x| = |z|$  il s'en suit que l'on peut obtenir des formules valables sur la circonférence du cercle de convergence d'un développement taylorien.

Prenons par exemple  $f(\xi) = \frac{1}{1-\xi}$ . Nous aurons

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi s_1 + \xi^2 s_2 + \dots}{1 + \xi + \xi^2 + \dots}$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}$$

ce qui est la formule bien connue donnée par Cesàro.

Prenons encore,  $p$  étant entier,

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi^p}$$

Alors

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi^p s_p + \xi^{2p} s_{2p} + \dots}{1 + \xi^p + \xi^{2p} + \dots},$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \dots + s_{(n-1)p}}{n}.$$

Pour  $p = 1$ , cette dernière formule redonne celle de Cesàro. On peut faire à son sujet plusieurs remarques curieuses.

D'abord on peut la considérer comme un cas particulier des formules obtenues non pas en faisant tendre  $\xi$  vers la racine égale à 1 de l'équation  $\xi^p - 1 = 0$  mais en faisant tendre  $\xi$  vers l'une quelconque des racines de cette équation, c'est-à-dire vers l'un des sommets d'un polygone régulier de  $p$  côtés inscrit dans le cercle  $|\xi| = 1$ .

Voici une remarque plus importante encore relative à la dernière formule donnée pour  $F(x)$ . Soit  $x$  à l'intérieur du cercle de convergence. Alors on peut prendre  $p$  assez grand pour que les sommes  $s_p, s_{2p}, \dots, s_{(n-1)p}$  diffèrent les unes des autres d'aussi peu qu'on voudra. Dans ces conditions la formule considérée peut s'écrire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left[ \frac{s_0}{n} + \frac{n-1}{n} s_{(n-1)p} \right]$$

c'est-à-dire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} s_{(n-1)p}.$$

Ce n'est autre chose que la formule de Taylor elle-même qu'il est bien intéressant de retrouver directement comme cas particulier de formules plus générales étudiées dans ce travail.

A. COSTABEL (Montpellier).