

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1908)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE 1  
**Autor:** Costabel, A.  
**Kapitel:** Etude de la formule (C)  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10979>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

la formule (A) se réduit à

$$(C) \quad F(x) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)}.$$

C'est le type général des formules de sommabilité de M. Borel. Quant à la condition (B), on conçoit qu'elle ne peut être réalisée que pour  $x$  dans une certaine région du plan où l'on cherche à définir  $F(x)$ . Je dirai que c'est la *région de sommabilité* dans laquelle la formule (C) est valable.

4. — La formule (A) a été établie dans le cas où les pôles de  $F(x)$  étaient simples. Si ce sont des pôles multiples d'ordre  $n$ , on voit, d'après une formule bien connue, que le second membre de (3), et par suite le second sigma de (A), contiennent linéairement

$$f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right), \quad f^{(1)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right), \dots, \quad f^{(n-1)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)$$

et non pas seulement la première de ces quantités. Alors la condition (B) est à remplacer par  $n$  conditions qui, cas très important, se confondent si  $f(\xi) = e^\xi$ .

#### ETUDE DE LA FORMULE (C).

5. — La formule (C) ne sera applicable, si  $n$  est l'ordre de multiplicité des pôles de  $F(x)$ , que pour  $x$  situé dans des régions du plan telles que l'on ait

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{f^{(i)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Si ces  $n$  conditions sont réalisables, il s'ensuit notamment que la formule (C) est  $n-1$  fois dérivable dans le cas où  $F(x)$  serait une fonction à pôles simples car la  $(n-1)^{\text{ème}}$  dérivée a alors des pôles d'ordre  $n$ . La formule (C) est même indéfiniment dérivable si  $f(\xi) = e^\xi$ . Ce résultat a été signalé par M. Borel. On pourrait le généraliser mais il est particu-

lièrement évident quand la fonction sommatrice est la fonction exponentielle.

La méthode de sommation exponentielle est donc particulièrement importante. Je me propose, dans ce qui suit, de retrouver les résultats de M. Borel concernant les fonctions sommatrices

$$f(\xi) = e^\xi, \quad f(\xi) = e^{\xi^p}, \quad (p \text{ entier})$$

et d'étudier en outre le cas de

$$f(\xi) = e^{e^\xi}.$$

6. — *Méthode de sommation exponentielle.* — C'est le cas où l'on prend  $f(\xi) = e^\xi$ . Cherchons les points  $x$  pour lesquels on ait

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\xi x}{\xi}}}{e^\xi} = 0.$$

Posons pour cela

$$\xi = \rho e^{i\omega}, \quad x = r e^{i\theta}, \quad a_k = \alpha_k e^{i\tau_k}.$$

Envoyons  $\xi$  à l'infini dans la direction d'argument  $\omega$ . La limite à chercher est celle d'une exponentielle dont l'exposant est

$$\rho(\cos \omega + i \sin \omega) \left[ \frac{r}{\alpha_k} \cos(\theta - \tau_k) + \frac{r}{\alpha_k} i \sin(\theta - \tau_k) - 1 \right].$$

Cette exponentielle tendra vers 0 si la partie réelle de l'exposant croît indéfiniment par valeurs négatives, ce qui exige

$$\frac{r}{\alpha_k} \cos(\omega + \theta - \tau_k) - \cos \omega < 0.$$

Considérons la droite d'équation

$$\frac{r}{\alpha_k} \cos(\omega + \theta - \tau_k) - \cos \omega = 0.$$

Si  $\omega$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$  l'inégalité précédente est vérifiée pour tous les points situés du même côté que

l'origine par rapport à cette droite. Comme à chaque pôle de la fonction  $F$  correspond une droite, la région des points du plan où la formule (B) sera applicable sera formée par la région située du même côté que l'origine par rapport à toutes ces droites ; c'est donc une région polygonale, appelée *polygone de sommabilité*.

Si  $\omega$  est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$  l'inégalité précédente n'est alors vérifiée que pour les points du plan situés de l'autre côté de l'origine par rapport à la droite précédente.

Dans ce cas la région de sommabilité, si elle existe, est constituée par tous les points du plan situés de l'autre côté de l'origine par rapport à toutes ces droites. Elle n'existe que si  $F(x)$  se réduit à une fraction rationnelle car alors le dernier terme de (A) n'existe pas. Si ce terme était conservé il ne pourrait disparaître pour  $|\xi|$  croissant dans la direction indiquée,  $e^\xi$  ne croissant pas alors indéfiniment.

7. — *Etude du polygone de sommabilité.* — Le côté du polygone de sommabilité relatif au point singulier  $\alpha_k, \tau_k$  a pour équation

$$x \cos(\omega - \tau_k) - y \sin(\omega - \tau_k) - \alpha_k \cos \omega = 0.$$

Le coefficient angulaire de cette droite est  $\operatorname{cotg}(\omega - \tau_k)$  ; le coefficient angulaire de la droite joignant l'origine au point  $(\alpha_k, \tau_k)$  est  $\operatorname{tg} \tau_k$ . L'angle  $\varphi$  de ces deux droites se calcule facilement et est égal à

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega$$

d'où la propriété suivante :

*Les droites joignant l'origine aux points singuliers de la fonction  $F$  font avec les côtés du polygone passant par ces points des angles constants égaux à  $\frac{\pi}{2} - \omega$ .*

Dans le cas où  $\omega = 0$  l'angle précédent est droit, et les côtés du polygone correspondant aux points singuliers situés sur le cercle de convergence sont tangents à ce cercle. Le cercle de convergence est alors situé tout entier à l'intérieur du polygone de sommabilité.

Au contraire si  $\omega$  est différent de 0 mais compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ , certains côtés du polygone de sommabilité sont sécants par rapport au cercle de convergence, et il y a alors une région du cercle de convergence qui est extérieure au polygone de sommabilité; ce qui nous conduit à cette remarque curieuse, que, pour les points d'une région du plan où la série de Taylor est convergente, la sommabilité peut ne pas avoir lieu. Le cas de  $\omega = 0$  est celui étudié d'abord par M. Borel.

Pour  $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$  le polygone de sommabilité est réduit au point origine.

*Quand  $\omega$  varie chaque côté du polygone tourne autour du point singulier y relatif, dans le même sens. Ces côtés font tous des angles égaux avec les droites joignant les dits points singuliers à l'origine.*

*Les sommets du polygone de sommabilité ou, plus généralement, les points de rencontre de deux côtés du polygone décrivent des cercles passant par l'origine et les deux points singuliers, correspondants.*

Proposons-nous le problème suivant.

A quelles conditions le point de rencontre de deux côtés correspondants à deux points singuliers sera-t-il sommet du polygone de sommabilité pour une valeur de  $\omega$ ; et à quelles conditions le restera-t-il quel que soit  $\omega$ .

*La condition nécessaire et suffisante pour que le point de rencontre de deux côtés correspondants à deux points singuliers  $a_1, a_2$  soit un sommet du polygone de sommabilité, quel que soit  $\omega$ , est qu'il n'y ait aucun point singulier de la fonction  $F$  à l'intérieur du cercle passant par l'origine et les points singuliers  $a_1, a_2$ .*

La condition est nécessaire, il suffit de montrer pour cela que s'il existait un point singulier  $a_3$  à l'intérieur du cercle  $a_1Oa_2$ , le point M de rencontre des côtés  $a_1, a_2$  serait séparé de l'origine par le côté  $a_3$ . Donc OM serait, quel que soit  $\omega$ , coupé par le côté relatif à  $a_3$  en un point Q situé entre O et M.

Le lieu du point Q quand  $\omega$  varie, est un cercle passant

par  $a_3$ , O, et tangent en O au cercle  $a_1Oa_2$ . On a en effet

$$\begin{aligned}\widehat{MQa_3} &= \pi - \widehat{QPa_1} - \widehat{QMP}, \\ \widehat{QPa_1} &= \widehat{a_1Oa_3} = \tau_1 - \tau_3, \\ \widehat{QMP} &= \widehat{a_1a_2O} = \text{const}, \\ \widehat{MQa_3} &= \pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1a_2O} = \text{const}.\end{aligned}$$

Donc le point Q décrit un cercle et la tangente à ce cercle au point O fait avec le côté  $Oa_3$  l'angle

$$\pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1a_2O}.$$

De même la tangente au cercle  $a_1a_2O$  au point O fait avec  $Oa_3$  l'angle

$$\widehat{a_2a_1O} + \tau_3 - \tau_2,$$

qui est égal à

$$\pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1a_2O}.$$

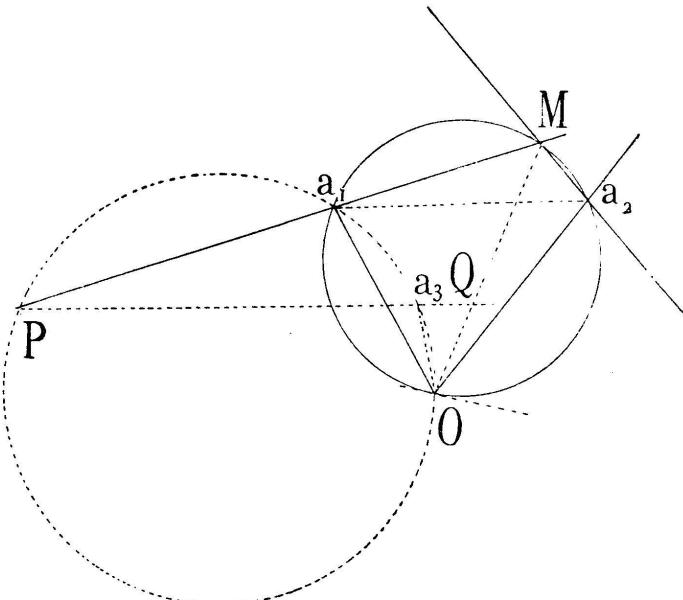


Fig. 1.

Le point Q est donc à l'intérieur du cercle  $a_1Oa_2$  et il est, quel que soit  $\omega$ , compris entre O et M.

La condition est suffisante car, s'il existait un côté du polygone séparant le point M du point O, on voit en s'aidant de la démonstration précédente que ce point singulier auquel ce côté correspondrait serait situé à l'intérieur du cercle  $a_1Oa_2$ . Ce que l'on ne suppose pas.

Ces propriétés géométriques nous permettent de construire les seuls côtés utiles intervenant dans la formation du polygone de sommabilité.

8. — *Région de sommabilité obtenue par la variation de  $\omega$ .*  
— Déterminons toute la région constituée par les points du plan pour lesquels la série de Taylor de la fonction sera sommable pour une valeur de  $\omega$  au moins ; il existe en effet des

régions du plan qui sont situées dans des polygones de sommabilité correspondant à de certaines valeurs de  $\omega$  et ne sont pas à l'intérieur d'autres polygones de sommabilité correspondant à d'autres valeurs de  $\omega$ .

Or tout point sommet du polygone de sommabilité pour une valeur de  $\omega$  l'est pour toutes les valeurs de  $\omega$  comprises entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ ; et lorsque  $\omega$  varie entre ces limites, ces points sommets du polygone décrivent entièrement leur circonférence lieu.

Il résulte donc que la région de sommabilité sera limitée

par des cercles passant par l'origine et par les groupes de deux points singuliers auxquels correspondent les sommets du polygone. Dans le cas où  $\omega$  est compris entre  $+\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{3\pi}{2}$  la région extérieure de sommabilité n'existe qu'autant que la fonction  $F(x)$  est une fraction rationnelle. Il est de plus nécessaire et suffisant que les pôles de cette fonction soient tels qu'il en existe deux d'entre

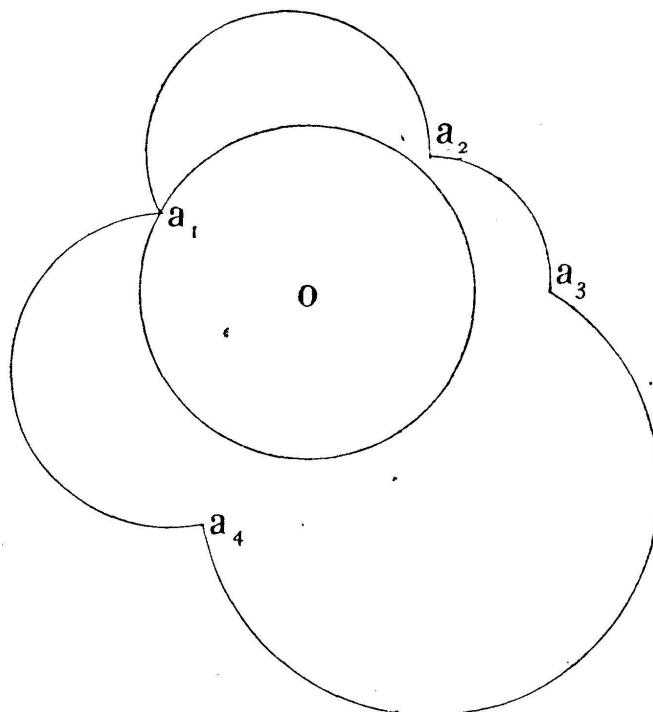


Fig. 2.

eux tels que le cercle passant par l'origine et ces deux points contienne tous les autres. La région de sommabilité est alors l'angle limité par les côtés correspondants à ces deux points; région située de l'autre côté de l'origine par rapport à ces deux côtés. Ceci nous permet de déterminer la région totale de sommabilité lorsque  $\omega$  varie de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{3\pi}{2}$ .

9. — *Méthode de sommation exponentielle généralisée.* Elle correspond à l'emploi de la fonction sommatrice  $f(\xi) = e^{\xi^p}$ ,  $p$  étant entier.

Cherchons les points  $x$  du plan vérifiant, quel que soit le point singulier  $\alpha_k$ , la condition

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{e^{\left(\frac{\xi x}{\alpha_k}\right)^p}}{e^{\xi^p}} = 0.$$

Cela revient à chercher la limite d'une exponentielle dont l'exposant est

$$\rho^p(\cos p\omega + i \sin p\omega) \left[ \left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p \cos p(\theta - \tau_k) + \left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p i \sin p(\theta - \tau_k) - 1 \right].$$

Cette exponentielle tendra vers 0 lorsque  $\xi$  croîtra indéfiniment dans la direction  $\omega$ , si l'on a

$$\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p \cos p(\omega + \theta - \tau_k) - \cos p\omega < 0.$$

C'est une condition analogue à celle déjà trouvée, mais elle nous amène à considérer les courbes

$$r^p = \frac{\alpha_k^p \cos p\omega}{\cos p(\omega + \theta - \tau_k)}$$

qui, dans le cas de  $\omega = 0$ , ont été encore considérées par M. Borel.

On peut faire sur ces courbes limitant la région de sommabilité des raisonnements absolument identiques à ceux déjà fait dans le cas de la méthode exponentielle, on est conduit à des résultats plus généraux ; et l'on peut montrer que l'on peut disposer du nombre  $p$ , entier, de manière à étendre la région de sommabilité en un point quelconque du plan.

10. — *Emploi de la fonction sommatrice  $f(\xi) = e^{\xi}$ .* — Par un raisonnement toujours analogue aux précédents on déterminera la région de sommabilité en égalant à zéro la limite, pour  $|\xi|$  croissant indéfiniment, d'une exponentielle dont l'exposant est

$$e^{\frac{\xi x}{\alpha_k}} - e^{\xi}.$$

Cela nous conduit à écrire que la partie réelle de cette quantité croît indéfiniment par valeurs négatives. Or on trouve facilement que cette partie réelle est

$$e^{\frac{\rho r}{\alpha_k} \cos(\theta + \omega - \tau_k)} \cos \left[ \frac{\rho r}{\alpha_k} \sin(\theta + \omega - \tau_k) \right] - e^{\rho \cos \omega} \cos(\rho \sin \omega)$$

les notations étant les mêmes qu'au paragraphe 6.

Considérons maintenant la droite

$$\rho \sin \omega = a,$$

qui est parallèle à l'axe réel et pour laquelle nous supposons  $a < \frac{\pi}{2}$ . Si l'extrémité du rayon vecteur  $\rho$  va à l'infini en suivant cette droite dans le sens positif, le second terme de la partie réelle ci-dessus considérée se comporte à l'infini comme

$$- e^{\rho} \cos a,$$

C'est dire que ce terme croît indéfiniment par valeurs négatives. Je dis qu'on peut s'arranger à ce que le terme précédent tende vers zéro dans les mêmes conditions. Il suffit pour cela que le facteur  $\cos(\theta + \omega - \tau_k)$  qui figure dans l'exposant soit toujours négatif. Comme, pour les grandes valeurs de  $\rho$ ,  $\omega$  devient nul, il faudra

$$\frac{3\pi}{2} > \theta - \tau_k > \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2} + \tau_k > \theta > \frac{\pi}{2} + \tau_k.$$

Géométriquement cela revient à dire qu'un point singulier d'argument  $\tau_k$  de  $F(x)$  entraîne que la région de sommabilité n'est qu'un demi-plan limité par une droite passant par l'origine et perpendiculaire à la direction  $\tau_k$ . Si tous les points singuliers de  $F(x)$  sont compris dans un angle ayant son sommet à l'origine et une ouverture  $\lambda$ , la région de sommabilité est un angle de même nature dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du précédent et dont l'ouverture est par suite  $180^\circ - \lambda$ . On voit que la fonction sommatrice ici étudiée ne peut être employée que pour une fonction  $F(x)$  dont les singularités ne sortent pas d'un demi-plan.