Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

W. Ahrens. — **Mathematische Spiele** (« Aus Natur u. Geisteswelt », Sammlung wiss.-gemeinverständlicher Darstellungen). Mit einem Titelbild u. 69 Figuren. 1 vol. cart. VI, 118 p.; 1 M. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce petit volume contient un choix de *jeux mathématiques* tirés d'un ouvrage très complet que l'auteur a publié sous le titre de *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (Teubner, 1901). On y trouve, entre autres les jeux des traversées, du solitaire, de Boss-Puzzle, du Baguenaudier, du cavalier, et les carrés magiques. L'auteur a joint au texte un certain nombre de questions dont les réponses sont placées à la fin du volume.

Suivant le but de la collection, ce petit opuscule est à la portée de ceux qui n'ont pas de préparation mathématique; ils y trouveront des notions à la fois instructives et récréatives.

E. Kaller (Vienne).

W. W. Rouse Ball. — **Histoire des Mathématiques.** *Edition française* revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. T. II — 1 vol. gr. in-8°, 271 p. Hermann, Paris.

Ainsi que nous l'avons déjà dit en rendant compte du Tome I (voir l'*Enseignement mathématique* VIII N° 3, p. 242-244), cet ouvrage n'est pas à proprement parler, une histoire du développement des idées et vérités mathématiques, mais plutôt une histoire des Mathématiciens.

Les *chapitres* que renferme l'ouvrage sont les suivants : XVI, La vie et les travaux d'Isaac Newton. — XVII, Leibniz et les Mathématiciens de la première moitié du XVIII^{me} siècle, avec deux subdivisions : Développement de l'analyse sur le continent, Les Mathématiciens anglais du XVIII^{me} siècle. — XVIII Lagrange, Laplace et leurs contemporains de 1740 à 1830, avec les quatre subdivisions : Développement de l'analyse et de la mécanique, Création de la Géométrie moderne, Développement de la physique mathématique, Introduction de l'analyse en Angleterre. — XIX, Les mathématiques au XIX siècle, avec les subdivisions : La théorie des nombres ou arithmétique supérieure. La théorie des fonctions de périodicité double et multiple, Fonctions elliptiques et abéliennes, La théorie des fonctions, Algèbre supérieure, Géométrie analytique, Analyse, Géométrie synthétique, La Géométrie infinitésimale, La Géométrie non-euclidienne, Mécanique, L'Astronomie théorique, Physique mathématique.

Nous ne voulons pas critiquer les subdivisions des trois premiers chapitres ; mais il aurait mieux valu laisser complètement de côté celles du dernier chapitre, le livre n'étant conçu qu'à un point de vue biographique; en procédant comme il l'a fait, l'auteur a été obligé d'introduire dans telle subdivision toute une série d'œuvres qui n'y avaient en réalité rien à faire, car, en faisant l'histoire des Mathématiciens mentionnés dans cette subdivision, on s'occupe de l'ensemble de leurs œuvres et non pas seulement de celles qui rentreraient effectivement dans le domaine que la division comporte. Ainsi Cauchy est traité complètement dans la division « Algèbre supérieure » et pourtant sa principale activité s'est portée sur un autre domaine que celui de l'Algèbre supérieure ; Weierstrass est traité dans la division « Fonctions elliptiques et abéliennes, » pourquoi pas dans la division générale « La théorie des fonctions » ? Casorati est placé dans la division « Algèbre supérieure » quoiqu'on lise à la p. 188 : « Les travaux de Casorati se rapportent presque uniquement à l'Analyse ». Voici encore un exemple du défaut d'une bonne division de l'Ouvrage : Le chapitre XIX commence par un court aperçu, servant d'introduction, sur l'histoire des mathématiques au XIX^me^ siècle, et traite ensuite les deux mathématiciens Gauss et Dirichlet, le premier d'une façon assez détaillée, le second rapidement ; ensuite, nous trouvons la division « La Théorie des nombres ou Arithmétique supérieure ». Gauss et Dirichlet ne font-ils pas partie des principaux représentants de ce domaine ? Pourquoi ne pas placer la division « Théorie des nombres » immédiatement après l'aperçu d'introduction ? Nous aurions également désiré que l'on mît plus de soin à l'impression correcte des titres, aussi bien dans l'original anglais que dans la traduction ; à la façon dont elles sont indiquées ici, les parties : La théorie des fonctions (p. 161), Algèbre supérieure (p. 162), Géométrie analytique (p. 198), Analyse (p. 202), etc. semblent n'être que des subdivisions de la théorie des fonctions de périodicité double et multiple (p. 149) ; par contre les parties : Méthodes graphiques (p. 221), Mécanique analytique (p. 224), qui ne sont que des subdivisions de la Mécanique (p. 221), sont prises pour des divisions indépendantes.

Il est regrettable en outre de ne pas avoir placé une table des noms de tous les mathématiciens cités dans la traduction française, on cherche parfois en vain tel ou tel mathématicien auquel on n'a pas consacré de paragraphe spécial, comme par exemple : Appel, Picard, Lerch, Kowalewski, Darboux, Goursat, Schwarz, Christoffel, Poincaré, Painlevé, Pringsheim, Mittag-Leffler, Peano, Liouville, et beaucoup d'autres.

La traduction française est cependant de beaucoup supérieure à l'original anglais, spécialement en ce qui concerne l'exposé des progrès du XIX^me^ siècle. Nous devons particulièrement à M. de Montessus une série d'additions, qui ont parfois une grande importance ; par exemple les articles sur Weierstrass, Cauchy, Galois, Hermite et d'autres, ont été augmentés, comme il convenait du reste. La partie « Analyse » dans laquelle R. Ball fait rentrer le Calcul différentiel et intégral et les équations différentielles, ne contient dans l'original anglais que 14 lignes ! (p. 489) ; il ne renferme qu'une simple énumération de noms ; mais M. de Montessus à consacré au moins 9 pages à cet important domaine des mathématiques (p. 202-210), dans lesquelles il nous donne une idée d'ensemble sur les progrès de l'Analyse supérieure, sans insister spécialement sur la partie biographique. C'est de cette façon qu'on aurait dû traiter chaque domaine mathématique, mais il était impossible de le faire sans remanier complètement le livre anglais.

M. de Montessus s'est en outre occupé, dans des articles spéciaux, de plus de 40 mathématiciens importants qui manquent dans le livre de R. Ball, ou qui ne sont mentionnés que très sommairement ; nommons parmi ceux-ci : Lhuilier, Lacroix, Malfatti, Waring, Poinsot, Delambre, Lamé, Cournot, Genocchi, Betti, Puiseux, Faà di Bruno, Brioschi, Stieltjes, Möbius, Clebsch, Halphen, Chasles, Cremona, Beltrami, etc.

Il faut également signaler dans la traduction française l'intéressant article de M. Darboux *sur le développement des méthodes géométriques* (Extrait du

Bull. des Sciences math. 1904), d'autant plus que dans l'ouvrage de Ball, la Géométrie, à l'exception de la Géométrie nouvelle (synthétique), n'est guère traitée avec l'ampleur qu'elle mérite.

Les personnes qui désirent savoir à quel domaine tel ou tel mathématicien s'est surtout consacré, trouveront d'assez bons renseignements dans ce livre. Pour les étudiants en mathématiques, ce serait un ouvrage d'une réelle utilité, s'il renfermait des indications bibliographiques un peu plus nombreuses ; par exemple l'article sur Hermite ne renferme qu'une seule indication de ce genre sur ses différents mémoires ; sans doute l'on renvoie à l'article de M. E. Picard : *L'œuvre scientifique de Ch. Hermite (Acta mathem.* t. XXI) ; mais il serait bien préférable d'indiquer la bibliographie pour chaque mémoire.

Nous avons encore trouvé par ci par là des erreurs dans les notices biographiques, de même les titres des ouvrages cités ne sont pas toujours exacts. Nous ne pouvons cependant pas signaler ici toutes les inexactitudes que nous avons rencontrées, nous nous bornerons à celles qu'il nous semble le plus nécessaire de rectifier.

p. 4. — « Le calcul de C suppose en effet la connaissance du rayon et de la densité moyenne de la terre, nombres que ne connaissait pas Newton ». Newton connaissait bien le rayon de la terre, seulement avec une exactitude moindre que celle fournie par les mesures du XIX[me] siècle.

p. 13, ligne, 11. — Il faut lire $(1 - x^2)^{\frac{0}{2}}$ au lieu de $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

p. 14, ligne 2 depuis en bas. — Il faut lire à la première et à la troisième expression x^{mn-1} à la place de x^{m-n-1} et dans la deuxième expression $x^{\left(m+\frac{1}{2}\right)n-1}$ à la place de $\left(x^{m+\frac{1}{2}}\right)^{n-1}$

p. 57. — « Il (de Montmort) fut le premier à résoudre complètement le problème des partis ». Ce problème avait été déjà résolu par Pascal et Fermat en 1654, comme on le lit dans le premier volume (p. 292-293 et 307-308). Fermat l'a également étendu au cas de trois joueurs. On aurait dû également mentionner ici le principal ouvrage de Montmort, *Essai d'analyse sur les jeux de hasard* (1708).

p. 58. — Le principal ouvrage de Cramer ne s'appelle pas « Traité sur les courbes algébriques », mais *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.*

p. 59. — Le principal ouvrage géométrique de Clairaut est intitulé *Recherches sur les courbes à double courbure*, et non « Traité sur etc. »

p. 68. — Il est vrai de dire que Halley a reconstitué le livre 8 des sections coniques d'Apollonius qui avait été perdu, mais c'est incomplet, il a également traduit en latin les livres 5, 6 et 7 qui n'avaient paru qu'en arabe.

p. 80. — « Il (Laplace) créa également le calcul des probabilités » n'est pas correct ; les fondateurs du calcul des probabilités sont Pascal, Fermat, Huygens et Jacob Bernoulli ; il est vrai que Laplace a présenté ce domaine des mathématiques en lui donnant la forme d'un tout et en lui fournissant une base analytique plus profonde, mais il ne doit pas pour cela en être considéré comme le fondateur.

p. 81. — S'il s'agit de l'*Introductio* d'Euler : « ouvrage composé pour servir d'introduction aux mathématiques pures », il faudrait plutôt dire « aux mathématiques supérieures ».

p. 84. — Le traité d'Euler *Curvavum maximi minimive proprietate gau-*

dentium inventio nova et facilis n'a pas paru en 1744, mais en 1741 (dans les *Commentar. Acad. Scient.* Petrop. T. VIII ad annum 1736); le traité plus général imprimé à Lausanne en 1744 s'appelle *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.*

Ibid. — L'ouvrage d'Euler publié en 1770 a comme titre *Vollständige Anleitung zur Algebra* « et pas » Einleitung zur Algebra ». La traduction française de ce livre parut à Lyon en 1774 et non en 1794 ; une autre parut également à Lyon en 1795 (an III de la républ.).

p. 87. — L'ouvrage de Lambert *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anvendung* n'a pas 4 volumes, mais 4 parties en 3 volumes.

p. 99. — « Il (Lagrange) créa le Calcul des variations » n'est pas tout à fait exact; Euler a déjà établi les bases théoriques du Calcul des variations dans son excellent ouvrage déjà mentionné *Méthodus inveniendi lineas curvas* etc.; Lagrange a simplement généralisé ce sujet, et l'a traité d'une façon plus analytique dans son traité : *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies (Mélanges de philos, et de mathém. de la Soc. royale de Turin* pour les années 1760-1761, Sect. II, p. 173 etc.), titre qui n'a pas été mentionné une seule fois dans l'ouvrage.

p. 136. — Il est bien vrai de dire que Gauss a démontré « que toute équation algébrique a une racine de la forme $a + bi$ », à condition d'ajouter: dans laquelle b peut aussi être égal à 0. Mais le théorème de Gauss aurait été certainement exprimé d'une façon plus correcte de la manière suivante : Toute fonction algébrique entière rationnelle d'une variable peut être décomposée en facteurs réels du premier et du second degré.

p. 142. — Le titre que l'on a donné ici du traité de Gauss : *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung* n'est pas du tout complet, les mots *wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* manquent.

p. 114. — « Mais il était réservé à Riemann.... de résoudre vraiment la question » (savoir du nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée); il n'est cependant pas tout à fait exact que cette question ait été réellement résolue ; les formules de Riemann n'en donnent qu'une solution approchée; du reste on lit plus loin : « Plus tard H. Poincaré, Sylvester et Hadamard la reprirent et poussèrent l'approximation plus loin encore que ce dernier ».

p. 152. — « Les premiers mémoires d'Abel concernant les fonctions elliptiques furent publiés dans le *Journal de Crelle* ». Mais il aurait été très désirable pour les étudiants en Mathématiques de savoir dans quels volumes.

p. 154, ligne 27. — Lisez « Amplectatur » au lieu de « Ampletactur ».

Ibid., ligne 31. — Lisez « inesse » au lieu de « inessi ».

p. 155. — « Il (Riemann) étudia à Göttingue avec Gauss, et ensuite à Berlin avec Jacobi, Dirichlet, Steiner et Eisenstein ». Il faudrait plutôt dire « sous » que « avec ».

p. 172, ligne 1. — Il faut supprimer « en Saxe » et ajouter « et mourut à Berlin en 1847 ».

p. 198, Note (2) — Lisez « Haughton » au lieu de « Hangton ».

p. 211. — Il s'agit ici des travaux de Steiner « Les plus importantes de ses autres recherches sont contenues dans des notes parues à l'origine dans le *Journal de Crelle,* et sont comprises dans sa *Synthetische Geometrie* ». La première partie de la phrase est correcte, quant à la seconde il faut remarquer que les *Vorlesungen über Synthetische Geometrie* n'ont pas été publiées par Steiner lui-même, mais par GEISER (1re partie 3 édit. 1887) et SCHROETER (2me partie, 3 édit. 1898), d'après des conférences universitaires et en se servant de manuscrits. Elles contiennent la théorie des sections coniques au point de vue élémentaire et comme projections, mais pas les propriétés des courbes algébriques et des surfaces, des polaires et des roulettes, des maxima et minima.

p. 232. — Nous ne voyons pas très bien pourquoi de M. Montessus compte Riemann, Christoffel, Klein parmi les grands *physiciens modernes*.

H. SUTER (Zürich).

H. BOUASSE. — **Cours de Physique** conforme aux programmes des certificats et de l'Agrégation de Physique. Fascicule II. — *Thermodynamique. Théorie des ions*. 1 vol. gr. in-8° de 262 p. 7 fr. Ch. Delagrave, Paris.

Ce volume est le second du *Cours* dont M. Bouasse a entrepris la publication[1]. Il est consacré à la Thermodynamique. Ce que doit être un tel cours, dit l'auteur dans sa préface, est véritablement effrayant. Si l'on songe en effet que la Thermodynamique était uniquement au début une étude de l'énergétique des gaz et qu'aujourd'hui on est conduit à considérer les solutions salines comme jouissant de propriétés analogues, que l'étude de ces solutions ne va pas ensuite sans l'introduction de la notion d'ionisation, ce qui conduit alors dans le domaine de l'électricité, on se demande comment les principes viendront à bout de questions si complexes et surtout si la physionomie simpliste qui leur avait été donnée par leurs créateurs se retrouvera dans les champs nouveaux où il a bien fallu les transporter. La tâche devait sembler ici particulièrement dure. M. Bouasse l'aborde dans un chapitre consacré surtout aux deux principes fondamentaux (principe de l'équivalence et principe de Carnot). Dans ces premières pages on trouve une charpente qui suffira à supporter tout le reste du volume sauf peut être le dernier chapitre, consacré à la conduction thermique, dans lequel on trouvera des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, ce qui d'ailleurs n'aura rien de bien embarrassant, le tome précédent nous ayant déjà familiarisés avec lesdites équations.

Mais revenons à la Thermodynamique et à ses principes.

Si un corps est défini par des variables $a, b, c, \ldots$ on ne pourra en général écrire une relation de la forme

$$dQ = Ada + Bdb + Cdc + \ldots$$

mais si toutes les transformations sont *réversibles* la chose devient possible. On a alors *l'équation thermique* du corps. Si les variables ne sont qu'au nombre de deux, à savoir la pression p et le volume v, des relations identiques à la précédente ont des coefficients qui, par définition, sont les *chaleurs spécifiques*, soit *à pression constante,* soit *à volume constant.*

La notion d'*énergie interne,* le fait que cette énergie U ne dépend que de l'état initial et de l'état final du corps, (dU étant une différentielle exacte) permettent de se faire une idée très simple du principe de l'équivalence.

Le principe de Carnot consiste en ce que $\frac{dQ}{T}$ est la différentielle exacte

[1] Voir l'analyse du premier volume dans *L'Enseign. mathém.* T. IX. 1907, p. 329.

d'une fonction S qui est *l'entropie*. Cela compris, nous sommes armés pour tout édifier. Ainsi on verra facilement que, dans le cas de deux variables, dQ puisse contenir symétriquement les chaleurs spécifiques dont nous parlions il y a un instant. Appliquant alors les deux principes précédents on a immédiatement la formule de Clapeyron dont de nombreux cas particuliers se rencontrent dans les divers chapitres du livre. On obtient par un raisonnement presque analogue une expression de l'énergie interne due à Kirchhoff et M. Bouasse termine ces préliminaires par un fort intéressant paragraphe sur la définition de la température absolue T. Que l'on conçoive seulement qu'un corps puisse être défini par T ou, ce qui revient au même, par une fonction quelconque de T et par une autre variable, soit le volume. Les principes conduisent à écrire des différentielles exactes avec les conditions analytiques bien connues, d'où l'on peut tirer inversement non pas T mais $\frac{T}{T_0}$. *Et la température absolue est ainsi définie, indépendamment de tout thermomètre, à un facteur constant près.* C'est là un résultat d'une clarté et d'un intérêt bien séduisants si l'on songe à ce je ne sais quoi de vague que l'on jette souvent sur la notion de température sous prétexte qu'elle n'est pas une grandeur mesurable au sens élémentaire de cet adjectif.

La place limitée dont je dispose dans ce journal m'interdit évidemment d'analyser les dix chapitres qui suivent avec autant de détails que le premier mais l'importance donnée à celui-ci semble bien être, je le répète, dans la pensée de M. Bouasse ; en une vingtaine de pages on fait connaissance avec tout l'outillage analytique qui interviendra ultérieurement. Les propriétés des gaz (Ch. II) et d'abord des gaz parfaits permettent d'appliquer d'une manière particulièrement simple les principes fondamentaux ; mais de l'étude du gaz parfait qui n'existe pas il faut passer à l'étude du gaz réel. L'équation idéale $pv = RT$ demande alors à être modifiée ; nous arrivons aux équations plus générales dues notamment à Clausius et à Van der Waals. Quant aux systèmes formés de plusieurs gaz, leur théorie reste très simple toutes les fois qu'on peut s'appuyer sur l'hypothèse fondamentale d'après laquelle l'énergie interne et l'entropie sont des sommes des énergie interne et entropie des composants. Signalons aussi l'étude des anomalies de densité présentées par certaines vapeurs.

Nous entrons maintenant dans la Chimie physique avec la *Règle des phases* (Ch. III). Il y a bien longtemps qu'on a considéré une vapeur en présence du liquide qui lui donnait naissance ou encore des dissolutions avec ou sans excès du sel dissous et cependant la notion précise de *phase* est récente. Les conditions d'équilibre des corps sous les différentes phases qu'ils peuvent présenter sont maintenant rattachées aux principes généraux de l'énergétique ; les créateurs de ces principes ont sans doute profondément ignoré la possibilité des merveilleuses applications qu'une science nouvelle en ferait.

M. Bouasse part d'un système de c composants sous φ phases distinctes d'où il résulte $c\varphi$ potentiels différents. Dans la phase α de masse M_α, le premier composant entre dans le rapport $s_{1\alpha} = M_{1\alpha} : M_\alpha$. On définit ainsi des s à deux indices appelés *concentrations* dont le nombre est aussi égal à $c\varphi$. Si le système est en équilibre le potentiel de chaque composant a la même valeur dans toutes les phases. Chaque phase fournit donc $\varphi - 1$ égalités entre potentiels d'où en tout, $c(\varphi - 1)$ équations. Comme d'autre part on a φ identités du type

$$\begin{array}{c} M_{1\alpha} + M_{2\alpha} + \cdots + M_{c\alpha} = M_\alpha \\ \text{ou} \\ s_{1\alpha} + s_{2\alpha} + \cdots + s_{c\alpha} = 1, \end{array}$$

on a finalement $c(\varphi - 1) + \varphi$ équations entre $c\varphi$ concentrations, la pression et la température. La différence $v = 2 + c - \varphi$ est la *variance* du système. Il y a des systèmes *invariants*, *univariants*, *bivariants*, *plurivariants* qui, ces définitions posées, vont être examinés en détail. Le chapitre IV est consacré tout entier au système univariant formé par un liquide et sa vapeur. Le chapitre V a trait aux dissolutions. C'est intentionnellement que je rapproche immédiatement ces parties. Sous des rubriques fort diverses on retrouvera l'unité à laquelle j'ai déjà fait allusion. On admirera la merveilleuse élasticité des formules initiales et des principes. Les équations de Van der Waals, de Clapeyron, etc..., serviront aussi bien dans les dissolutions que dans les gaz ; on s'enrichira d'innombrables faits physiques, les généralités mathématiques restant toujours les mêmes. Ce qu'il faut remarquer aussi c'est l'élégance et l'extrême utilité des méthodes graphiques. Suivre les corps sous leurs phases différentes, c'est parcourir un plan où deux axes représentent la température et la pression et où sont tracées des courbes que l'on franchit lorsque la phase change ; aux singularités des phénomènes physiques correspondent les singularités géométriques des courbes en question.

Quand au chapitre VI nous arrivons à l'hypothèse de la dissociation en *ions* et à la notion de pression osmotique l'analogie des gaz et des solutions apparaît déjà comme parfaite et définitive. Sans doute il semble que ce soit là le domaine de l'électricité mais, comme le fait bien remarquer M. Bouasse, un courant électrique ne crée pas d'ions ; il les met en mouvement et les oriente, rien de plus. Dès lors, si au point de vue historique on peut soutenir que l'idée d'ionisation soit née de l'interprétation de phénomènes d'électrolyse, n'est-il pas plus naturel d'étudier maintenant les solutions ionisées indépendamment de toute excitation électrique extérieure. Et ensuite on passera sans à-coup, sans discontinuité de la solution ionisée à la solution électrolysée ou à la pile. Que de choses curieuses se trouvent aussi révélées à propos de la pression osmotique, c'est-à-dire de la pression que subit une paroi perméable à un dissolvant mais imperméable à un corps dissous qui ne se trouve que d'un seul côté de la paroi. Je rappelle simplement que dans le cas où la solution est très étendue il existe une relation due à Van t'Hoff analogue à l'équation des gaz parfaits $pv = RT$ à un coefficient i près ; c'est là le coefficient *isotonique* qui d'ailleurs ne diffère de *1* que pour les électrolytes.

Voici maintenant en deux pages les formules fondamentales de la tonométrie et de la cryocospie ; il y a encore là une application fort simple de la formule de Clapeyron. Les chapitres VII et VIII se rapportent, comme je l'ai fait pressentir tout à l'heure, aux piles présentées d'abord comme des machines thermiques. Nous trouverons là un paragraphe très intéressant quant à l'influence de la pression sur la force électromotrice. L'idée générale qui intervient dans ces chapitres est celle de *force électromotrice de contact.* Envisagée d'abord dans les piles thermo-électriques elle conserve sa physionomie dans un circuit où toutes les parties ne sont pas métalliques. Sans doute certaines hypothèses, comme celle de Nernst sur l'ionisation des métaux placés dans un liquide, peuvent sembler d'une trop grande hardiesse, mais, comme on peut appliquer des considérations analogues aux chaînes thermo-électriques, on se trouve, en fin de compte, en présence de généralités que M. Bouasse a eu grandement raison de signaler.

Le chapitre IX est consacré à la théorie cinétique des gaz. Il me semble inutile de rappeler en quoi elle consiste. Les questions relatives à la répartition des vitesses des molécules sont particulièrement captivantes ; la détermination d'une unité naturelle d'électricité ne l'est pas moins. C'est la charge que transporte un atome d'hydrogêne, charge déduite de celle transportée par un gramme de ce gaz et de l'idée approximative que l'on peut se faire de la répartition des atomes dans un volume connu du même corps. M. Bouasse parle brièvement de la théorie cinétique des liquides, à peine ébauchée sans doute, mais à laquelle les mouvements browniens donnent cependant une saisissante réalité.

Dans la théorie des explosifs (ch. X) la notion de température d'inflammation est soigneusement précisée. Dans la mesure des hautes pressions dues aux explosifs solides nous retrouvons une des formules des gaz réels simplifiée pour le cas d'une pression et d'une température considérables ; la vitesse de propagation d'une onde est étudiée par la méthode de Hugoniot avec rappel des expériences de vérification dues à Vieille.

Quant à la conduction thermique (ch. XI), outre les problèmes classiques tels ceux du mur et de la sphère, elle donne lieu à un paragraphe remarquable sur la variation de l'entropie du fait de la conductibilité et surtout à des conclusions relatives aux corps anisotropes qui feront désirer vivement l'apparition du troisième volume consacré à l'Electricité. Les conductibilités thermique et électrique des cristaux se présentent sous les mêmes apparences analytiques ; c'est une nouvelle raison justifiant la présence de théories électriques dans un livre qui doit apparaître comme lié de façon intime à celui où se continuera cette belle et grande œuvre.

A. Buhl (Montpellier).

G.-H. Chandler. — **Elements of the Infinitesimal Calculus.** — 1 vol., in-12, relié, 319 p., 146 fig. ; 3e édit. ; $ 2 ; John Wiley and Sons, New-York.

Osw. Veblen and N. J. Lennes. — **Introduction to Infinitesimal Analysis.** Functions of one real variable. — 1 vol. in-8, relié, 227 p., 22 figures ; $ 2 ; John Wiley and Sons, New-York.

Voici deux manuels d'Analyse édités par la maison bien connue John Wiley & Sons à New-York. Ils possèdent tous deux les qualités de clarté et de concision qu'il n'est pas rare de trouver dans les ouvrages mathématiques américains. Etablir les propriétés fondamentales indispensables dans une première étude, les accompagner d'exemples bien choisis qui illustrent en quelque sorte la théorie, ce sont là deux points importants à observer par les auteurs d'ouvrages élémentaires et, dans le cas présent, ils s'y sont bien conformés.

Le petit traité de M. Chandler paraît en 3e édition. Il s'adresse plus particulièrement aux étudiants des écoles d'ingénieurs et il leur présente, sous une forme très condensée, les éléments du calcul différentiel et intégral avec de nombreuses applications aux calculs des aires, des volumes, des centres de gravité, des moments d'inertie, des intégrations par approximation, etc. Il se termine par des tables utiles à l'ingénieur et concernant les logarithmes répériens, les fonctions circulaires et hyperboliques, les fonctions lambda et gamma, et les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

L'*Introduction to infinitesimal Analysis*, de MM. Veblen et Lennes, est destiné aux étudiants qui ont à compléter les éléments d'Analyse et qui abordent l'étude des fonctions à une variable réelle. Les théorèmes fondamentaux sont naturellement établis avec rigueur tout en évitant des développements inutiles. Les auteurs partent de l'étude du système des nombres réels : nombres rationnels et irrationnels, algébriques et transcendants; transcendance de e et de π; puis, ils examinent la correspondance entre les nombres et les points sur un segment. Ces bases une fois bien établies, les auteurs passent aux notions de fonction, de limites, de la continuité d'une fonction d'une variable réelle et étudient, d'une manière approfondie, les dérivées et les différentielles, les séries de Taylor et les propriétés essentielles des intégrales définies. H. F.

H. Durège. — **Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Grösse.** In fünfter Auflage neu bearbeitet von *Ludwig Maurer*. — 1 vol. in-8° ; 397 p. ; 10 Mk., B. G. Teubner, Leipzig.

Cette édition nouvelle de l'excellent livre de Durège rendra de précieux services aux étudiants de nos universités. L'exposé convient à une première étude de la théorie des fonctions ; il ne suppose chez le lecteur que des connaissances élémentaires et le conduit jusqu'à une compréhension véritable du sujet.

M. Maurer a conservé intégralement la Préface où Durège présente, d'une façon claire et simple, ses idées sur la généralisation de la notion de nombre. Le reste de l'ouvrage a été rajeuni en maints endroits ; le dernier chapitre, relatif aux équations différentielles linéaires du 2d ordre, est entièrement nouveau.

Reprenant les choses au début, l'auteur définit les nombres irrationnels à la manière de Dedekind ; il donne quelques notions indispensables sur les ensembles et rappelle les propositions fondamentales de la théorie des grandeurs réelles et de leurs fonctions ; quelques exemples bien choisis, montrent que l'on ne peut pas toujours se contenter de l'intuition géométrique. Le 2me chapitre traite des nombres complexes, de leur représentation dans le plan et sur la sphère, et des transformations qui changent des cercles en cercles.

Les deux chapitres suivants nous amènent au centre du sujet : définition des fonctions analytiques, représentation conforme, théorèmes de Cauchy relatifs à l'intégration d'une fonction complexe et aux résidus, séries et produits infinis, convergence uniforme, séries de Taylor, de Laurent et de Fourier ; les applications sont variées et intéressantes ; citons en particulier, la détermination des « sommes de Gauss » qui jouent un rôle important dans la théorie de la division du cercle.

Un chapitre est consacré aux fonctions transcendantes élémentaires, aux fonctions uniformes et à leur décomposition soit en *éléments simples* (indiquant la façon dont elles deviennent infinies), soit en *facteurs primaires* (mettant en évidence les zéros et les pôles). Les théorèmes généraux sont appliqués aux fonctions doublement périodiques et à leurs représentations au moyen des fonctions p et p', ζ et σ de Weierstrass ; l'auteur a mentionné, en outre, la fonction H de Jacobi, utile pour le calcul numérique, car son développement en série trigonométrique converge très rapidement.

On arrive ensuite aux fonctions non uniformes ; un premier chapitre comprend le prolongement analytique, l'étoile de M. Mittag-Leffler (utilisée pour définir les surfaces de Riemann), et le principe de symétrie de M. Schwarz (appliqué à la représentation conforme d'un rectangle sur le demi-plan).

Les fonctions non uniformes les plus simples, les fonctions algébriques, sont traitées dans le chapitre suivant, qui contient le développement en séries, la détermination des cycles et la surface de Riemann correspondante ; un exemple numérique éclaircit ces notions importantes.

Durège avait fait ici une étude détaillée des intégrales de fonctions algébriques ; M. Maurer l'a supprimée et l'a remplacée par un des chapitres les plus instructifs du livre ; il est consacré à cette classe d'équations différentielles qui a acquis une si grande importance depuis une cinquantaine d'années : les équations linéaires homogènes. L'auteur s'est borné toutefois aux équations du 2d ordre à coefficients rationnels ; mais, en étudiant à fond ce cas particulier, il a su donner une idée claire et simple de la théorie générale pour tout ce qui concerne le groupe de l'équation, la nature des solutions aux environs d'un point singulier, la forme des coefficients nécessaire et sufflsante pour que les intégrales soient régulières. M. Maurer insiste sur cette classe remarquable d'équations (étudiée par Fuchs) dont toutes les intégrales sont régulières en un point singulier ; il en déduit les propriétés fondamentales de la série hypergéométrique. Au moyen du quotient de deux solutions de l'équation hypergéométrique, on arrive à une représentation conforme du demi-plan sur un triangle curviligne et l'on est conduit sans peine à ces transcendantes de M. Schwarz qui ne peuvent plus être prolongées analytiquement au-delà d'une frontière naturelle et qui sont, avec la fonction modulaire, les types les plus simples des fonctions automorphes.

Louis Kollros (La Chaux-de-Fonds).

A. Conti. — **Elementi di Aritmetica razionale** ad uso degli allievi delle scuole normali. Terza edizione (286 p.) Prix : L. 2.

— **Elementi di Calcolo letterale** con un'appendice sull'estrazione della radice quadrata e cubica, ad uso della Ia normale. (120 p.), L. 1.

— **Elementi di Calcolo letterale** per la IIIa classe tecnica. (120 p.), L. 1. Nicola Zachinelli, Bologna.

Le premier de ces trois manuels est *destiné aux élèves des écoles normales* ; il traite des objets suivant : 1° Grandeurs, nombres, nombres décimaux. — 2° Les quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux. — 3° Rapports et proportions entre les nombres. — 4° La proportionalité entre des grandeurs ; règle de trois. — Plan d'études et instructions concernant l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles élémentaires ; conseils didactiques. — 6° Exercices et problèmes (au nombre de 200).

Le second ouvrage donne les éléments du calcul littéral. Après une introduction sur l'étude du calcul algébrique, l'auteur examine successivement les identités, les équations du premier degré, l'extention de la notion de nombre, les nombres négatifs, les expressions algébriques et l'extraction des racines carrées et cubiques.

Le troisième manuel embrasse un champ un peu moins étendu ; il donne par contre plus de développement aux opérations du premier degré à plusieurs inconnues. Il se termine par un excellent choix de problèmes, au nombre de 125.

Rédigé avec soin, par un auteur bien au courant des plans d'études et des besoins pédagogiques de l'enseignement élémentaire, ces trois volumes sont appelés à rendre de grands services à l'enseignement élémentaire en Italie. Des ouvrages analogues seraient également désirables dans d'autres pays.

E. KALLER (Vienne).

E. A. FOUËT. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques**. Deuxième édition. Premier fascicule ; 1 vol. gr. in-8° de XIV, 112 p. — 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

La première édition de cet ouvrage formait deux volumes analysés déjà dans *l'Enseignement mathématique*, l'un en 1903 (p. 387) par M. D. Mirimanoff, l'autre en 1905 (p. 325) par moi. Quelque infime que soit le travail constitué par une analyse bibliographique, les auteurs en seront cependant fiers si certaines de leurs prédictions paraissent réalisées et rarement prédictions de succès le furent mieux que par l'œuvre de M. Fouët, laquelle avait pour but de rassembler brièvement, sous forme élémentaire et facilement accessible, les résultats acquis aujourd'hui dans l'étude des fonctions analytiques. La réussite fut si complète, les services que pouvait rendre le livre semblèrent si évidents qu'une seconde édition fait place maintenant à la première. Elle contiendra un aperçu des nouvelles richesses acquises à la Science dans ces derniers temps. L'auteur n'essaie pas d'ailleurs de tout compléter à la fois. Jusqu'ici c'est seulement l'introduction du tome I, contenant primitivement 65 pages, qui est rééditée, mais le seul fait de l'avoir portée à 112 pages montre assez à quel travail supplémentaire elle a donné lieu.

Nous étudions d'abord les idées fondamentales de nombre et de fonction. Beaucoup d'additions concernent les fonctions de variables réelles ce qui, au premier abord, peut sembler hors de propos dans un ouvrage consacré aux fonctions analytiques, mais ces dernières fonctions n'ont-elles pas été déduites d'abord de l'idée de fonction continue et cette dernière notion elle-même n'a-t-elle pas été disséquée et intimément fouillée par des récentes recherches telles que celles de M. R. Baire. Il est donc tout naturel à l'heure actuelle de chercher d'abord à se faire une idée aussi large que possible de la fonction définie uniquement dans le champ réel. Et c'est une étude qui est loin de manquer d'intérêt si l'on songe par exemple aux fonctions continues sans dérivées et aux courbes de Peano qui remplissent une aire. Après l'analyse de la notion de limite vient un aperçu de la théorie des ensembles. J'y signalerai surtout ce qui concerne les notions du transfini, de l'ensemble bien ordonné, du continu qui, suivant les points de vue, peut être considéré ou non comme un ensemble bien ordonné ; enfin les notions de mesure dues particulièrement à MM. Jordan et Borel. Suit une première classification des fonctions. La plus grande difficulté paraît être de classer les fonctions discontinues au sujet desquelles on pourrait encore rappeler les travaux de M. Baire et l'intéressant *principe de condensation* dû à Hankel, qui permet, étant donné une fonction à discontinuités isolées, d'en déduire une autre ayant des singularités du même type dans tout intervalle. Voici encore les fonctions *mesurables* (Lebesgue), *intégrables* (Riemann), *ponctuellement discontinues* sur tout ensemble parfait (Baire), etc., etc...

Si l'on classe les fonctions par les représentations dont elles sont susceptibles on retrouve notamment les *classes* de M. Baire, une fonction de classe n étant représentée par une série de polynomes n uple. Dans les considérations de ce genre la théorie des ensembles joue un rôle absolument fondamental. Pendant longtemps, par exemple, on a considéré une expression dépendant de plusieurs fonctions arbitraires ou d'une infinité multiple de coefficients comme plus générale qu'une autre ne contenant qu'une fonction ou qu'une infinité simple de nombres arbitraires ; aujourd'hui on ne voit plus là que des ensembles qui s'équivalent comme ayant le même caractère de dénombrabilité. Abordons maintenant les fonctions analytiques proprement dites. Nous n'y arrivons pas encore sans analyser définitivement la notion plus générale de fonction continue qui tout récemment a conduit à des distinctions aussi utiles qu'intéressantes. Ainsi une fonction de plusieurs variables peut être continue par rapport à toutes ses variables considérées isolément mais non par rapport à leur ensemble. Pour définir la fonction analytique, M. Fouët tire le plus grand parti possible de la définition de Cauchy : c'est une fonction $u(x,y) + i v(x,y)$ de $z = x + iy$ ayant une dérivée unique par rapport à z. La définition de Riemann, concernant les équations de Laplace $\Delta u = 0$ ou $\Delta v = 0$, vient ensuite. Elle est suivie des interprétations géométriques fournies par les transformations isogonales ou la représentation conforme. Le fascicule se termine par les définitions des singularités qui se rencontrent dans les différents domaines où la fonction est considérée et par l'étude sommaire des substitutions qui changent certaines fonctions en elles-mêmes (fonctions périodiques, automorphes, modulaires, etc...) Qu'il me soit permis d'insister sur la façon dont les choses sont disposées. Le texte courant contient les idées générales, simples et philosophiques ; d'innombrables notes au bas des pages complètent ce texte d'une façon extraordinairement substantielle et renvoient aux mémoires originaux. Il n'est plus utile d'adresser de souhaits à l'auteur ; espérons seulement, pour tout le monde, une publication rapide de ce qui complétera cette seconde édition.

A. Buhl (Montpellier).

C. A. Scott. — **Cartesian Plane Geometry**. Part I : Analytical Conics. — 1 vol. in-16, 428 p. (Dent's serie of mathematical text books). J. M. Dent et C°, Londres.

Après la mort tragique de M. Hudson, qui devait écrire une « Cartesian Plane Geometry » pour la collection Dent of (Dent's series of mathematical and scientific text books for Schools) Miss Scott fut chargée de compléter ou de récrire le livre. Très connue pour ses publications en géométrie analytique, elle était bien qualifiée pour cette tâche. Elle suivit son propre plan tout en s'inspirant volontiers des idées de M. Hudson, dont les manuscrits avaient été mis à sa disposition par M. Greenstreet, le directeur de la collection.

Le chapitre d'introduction traite des différents signes des grandeurs géométriques et de la représentation des points par des rapports. Cette innovation est due à M. Hudson et ne se trouve généralement pas dans les manuels anglais.

Sans entrer dans un compte rendu détaillé des divers chapitres habituels on peut mentionner un caractère important du livre, à savoir l'introduction dès le début, des coordonnées de point et des coordonnées linéaires suivant la méthode de Clebsch. Cette façon de procéder est vivement recommandée aux autres auteurs de géométrie analytique.

La définition bien connue de Pappus sert de base à la théorie des coniques. Il est alors possible d'en faire une étude uniforme et logique, ce qui est bien supérieur à la méthode si peu avantageuse qui consiste à prendre comme définition des coniques certaines propriétés particulières.

Les chapitres qui suivent la définition des coniques traitent de la relation entre les lignes droites et les courbes, tangentes et polaires, cordes et diamètres, asymtotes, propriétés des coniques, changement d'axes, systèmes de coniques et applications variées.

L'étude en est parfaitement claire et rigoureuse. Certaines parties auraient pu être traitées d'une façon plus concise. Au point de vue typographique, il aurait été avantageux pour l'étudiant que les en-têtes, définitions, théorèmes, etc. eussent été indiqués en caractères plus gros.

Mais, abstraction faite de ces critiques secondaires, le livre du professeur Scott peut être chaudement recommandé aux maîtres et aux élèves.

A. Emch (Soleure).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques:

Rendiconti del Circolo Matematica di Palermo, Direttore G.-B. Guccia.

Tome XXIV, 2me semestre 1907. — Luigi Berzolari : Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione. — Carlo Severini : Sul primo teorema fondamentale die Lie nella teoria dei gruppi di transformazioni. — Pasquale Grossi : Sul moto di un punto sollecitato da una forza la cui linea d'azione giace sempre in un complesso lineare. — Giuseppe Marletta : Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione. — Leo Koenigsberger : Über die Entwicklung algebraischer Functionen. — Giulio Giraud : Complemento ad una Nota del sig. Emch. — J. V. Pexider : Sur la fonction E (x) représentant l'entier contenu dans x. — C. Burali-Forti e R. Marcolongo : Per l'unificazione delle notazioni vettoriali (Nota II). Edmund Landau : Über die Multiplikation Dirichlet'scher Reihen. — Riccardo Bucca : Sul gruppo semplice di 168 collineazioni piane. — A. B. Basset : On Quintic Surfaces having a Tacnodal Conic. — W. H. Young : A Theorem in the Theory of Functions of a Real Variable. — Paolo Medolaghi : Sopra i gruppi definiti da equazioni differenziali del primo ordine. — Pierre Boutroux : Sur les fonctions-limites des fonctions multiformes. — Luigi Sinigallia : Sui nuovi numeri pseudo-euleriani del prof. Pascal. — G. Marletta : Sulla identità cremoniana di due curve piane. — Orazio Tedone : Sul problema dell'equilibrio delle temperature in un ellissoide a tre assi disuguali. — Georges Remoundos : Sur les intégrales réelles des équations differentielles et les forces centrales. — Corradino Mineo : Le antiradiali del cerchio. — C. J. Keyser : Circle Range Transversals of Circle Ranges in a Plane : A problem of Simple Construction. — Eugenio Elia Levy : Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. — C. Burali-Forti e R. Marcolongo : Per l'unificazione delle notazioni vettoriali