Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE 2
Autor: Andrade, J.
Kapitel: IV. — Situations mutuelles de deux circonférences d'un plan.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10975

Imaginons alors un point M, mobile de H vers K d'une manière continue, soit M′ une position du point voyageur, voisine de la position M.

Le triangle OM′M nous donne $OM - MM' < OM' < OM + MM'$; si donc le chemin MM′ est pris suffisamment petit ; la variation de la longueur OM sera aussi petite qu'on le voudra ; en d'autres termes la longueur OM est *une fonction continue* de la longueur MH ; or quand le point voyageur va de la position H à la position K, c'est-à-dire quand la longueur variable MH varie de zéro à HK la longueur variable OM a varié depuis la valeur OH moindre que R jusqu'à la valeur OK supérieure à R, d'ailleurs OM est allé toujours en augmentant, *donc la valeur variable de* OM *a* PASSÉ UNE ET UNE SEULE FOIS *par la valeur fixe* R, c'est-à-dire que le point voyageur a passé par une position X appartenant à la fois à la droite et à la circonférence.

Le principe que nous admettons ici est le suivant : Si une quantité y varie d'une *manière continue* en même temps qu'une quantité x dont la première dépend, et si, pour deux valeurs de x distinctes, (savoir pour $x = a$ et pour $x = b$) y prend deux valeurs distinctes savoir c et d, il existera au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle la fonction y prendra une valeur m quelconque mais comprise entre c et d. La démonstration de ce principe appartient à l'enseignement de l'algèbre et nous ne la reproduirons pas ici.

Remarque. — Cette discussion peut être appliquée à la sphère; elle nous montre que tout plan dont la distance au centre de la sphère est moindre que le rayon de cette sphère coupera effectivement la sphère suivant une circonférence.

IV. — Situations mutuelles de deux circonférences d'un plan.

L'étude rigoureuse des situations mutuelles de deux circonférences deviendra très facile si nous nous reportons encore au principe de continuité, mais nous aurons quelques faits préliminaires à établir.

Premier fait préliminaire. Si (fig. 40), deux droites OA et OB sont obliques sur une même droite AB mais d'un même côté de la perpendiculaire OH tirée de O sur AB, la bissectrice OC de l'angle AOB partage le segment AB en deux portions inégales, la portion CB qui est la plus voisine du point H est la plus petite des deux portions. Le triangle ABO dont l'angle en B

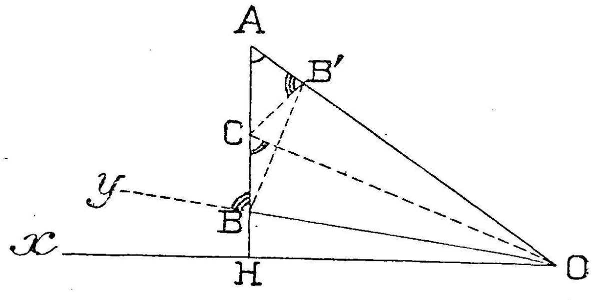

Fig. 40.

est obtus donne : $AO > OB$; portons *l'oblique la plus courte* OB sur la plus grande; joignons CB', le triangle CB'O est égal au triangle CBO, d'où on conclut que l'angle CBY = l'angle AB'C ; or l'angle CBY est *extérieur* au triangle CBO et l'angle $\widehat{BCO}$ est intérieur; on a donc $\widehat{CBY} > \widehat{BCO} > \widehat{CAO}$; on a donc dans le triangle ACB' ; angle $\widehat{AB'C} >$ angle $\widehat{CAB'}$.

Donc, en considérant les côtés opposés à ces angles :

$AC > CB'$; et comme $CB' = CB$, on a bien :

$AC > CB$, comme nous voulions le démontrer.

Deuxième fait préliminaire. Considérons (fig. 41), une circonférence de centre O, et un angle au centre TOA, constituant l'angle d'un triangle rectangle ayant le rayon OA comme côté d'un angle droit dont le sommet est en A ; soit OT l'hypoténuse de ce triangle rectangle. Partageons l'angle TOA en n parties égales, la corde AP qui sous tend les arcs correspondants à ces angles au centre sera moindre que la $n^{ème}$ partie du côté AT.

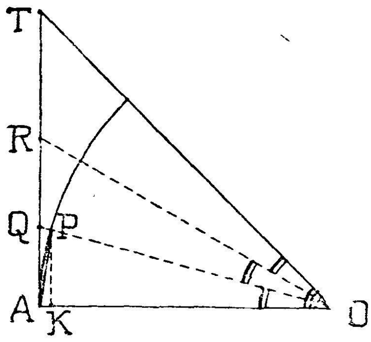

Fig. 41.

En effet soit AQ la première des portions de AT détachées par ces angles, d'après le fait établi tout à l'heure on a :

$$AQ < QR < \dots < RT, \text{ d'où } AQ < \frac{AT}{n}.$$

Or l'angle QPA étant obtus, et l'angle $\widehat{AQP}$ aigu, on aura $AP < AQ < \dfrac{AT}{n}$.

Théorème. — Soit (fig. 42), M un point voyageur sur l'arc AB d'une circonférence de centre O, soit O' un autre point du plan. *La longueur* O'M *varie d'une manière continue quand le rayon* OM *tourne lui-même d'une manière continue autour de* O.

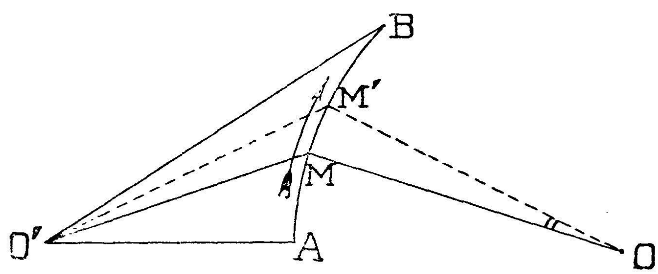

Fig. 42.

En effet, quand le rayon OM tourne d'un angle $\widehat{MOM'}$, moindre que $\dfrac{\widehat{TOA}}{n}$ de la figure 41, MM' sera moindre que $\dfrac{TA}{n}$, et comme $O'M - MM' < O'M' < O'M + MM'$, on voit qu'on a pu rendre $\widehat{M'OM}$ assez petit pour que la variation $O'M' - OM$ ou $OM - O'M'$ soit aussi petite qu'on voudra. *La variation de la longueur* O'M *est donc bien continue.*

Première conséquence. Si (sans figure), un arc AB de circonférence réunit un point A intérieur à une autre circonférence C et un point B extérieur à cette même circonférence, l'arc considéré doit traverser la circonférence C en quelque point X.

La démonstration se fait d'elle-même en rapprochant le fait précédent du principe de continuité, car si O est le centre de la circonférence C de rayon R, la longueur OM varie depuis une quantité OA moindre que R jusqu'à une quantité OB supérieure à R, elle doit donc prendre *dans l'intervalle* la valeur R lorsque le point M est en un certain point X de l'arc AB, mais ce point X étant à distance R de O appartient évidemment à la circonférence C.

Théorème. — *Si deux circonférences* (fig. 43), *ont en commun un point* M *situé hors de la droite qui réunit leurs centres, elles ont encore en commun un point* M' *tel que la droite* OO' *passe par le milieu de* MM' *et est perpendiculaire à* MM'.

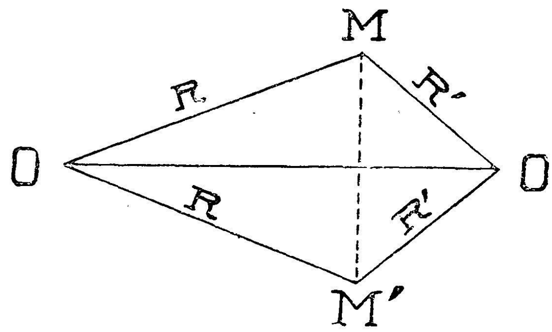

Fig. 43.

La démonstration s'achève par un simple rabattement autour de OO'.

Remarque. — Si deux circonférences ont deux points communs M et M', les deux centres de ces circonférences se trouvent sur la perpendiculaire élevée au milieu de MM', de là il résulte évidemment que deux circonférences de centres distincts ne peuvent avoir plus de deux points communs et que lorsqu'elles ont un seul point commun, ce dernier point appartient à la droite qui joint les centres.

Criterium des situations mutuelles de deux circonférences. Par la remarque précédente on voit que si deux circonférences se coupent on doit pouvoir construire un triangle tel que OMO' dans les figures précédentes; on conclut de là que, si d est la distance des centres et que si R est le plus grand des rayons R et e' on aura $R - R' < d < R + R'$.

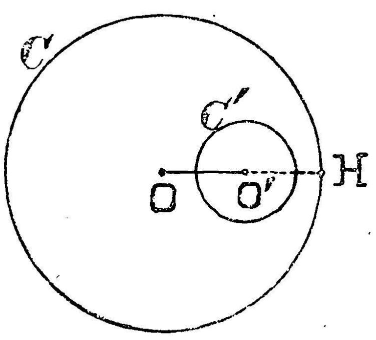

Fig. 44.

Nous allons démontrer la *réciproque,* mais auparavant supposons que l'on ait : $d < R - R'$, ou $d = R - R' - e$.

Soit (fig. 44) H l'extrémité du rayon de C issu de O vers O', un point de la circonférence C' est alors intérieur à C, aucun autre point ne saurait alors être extérieur, puisqu'alors, comme on l'a vu, les circonférences se couperaient et l'on devrait avoir $d > R - R'$.

On démontrerait de même que si $d > R + R'$ les circonférences ne se coupent point mais sont toutes deux extérieures l'une à l'autre.

Supposons maintenant : $R - R' < d < R + R'$; si $d > R - R'$ il y a des points de C' en dehors de C, si $d < R + R'$ il y a des points de C' en dedans de C, donc d'après un théorème déjà signalé C' et C se coupent.

V. — La notion d'orientation.

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent encore s'énoncer sous une forme plus claire en disant : Un point M (fig. 45), d'une figure solide *plane* est défini par ses deux distances r et r' à deux points particuliers A et B de la figure. En effet :

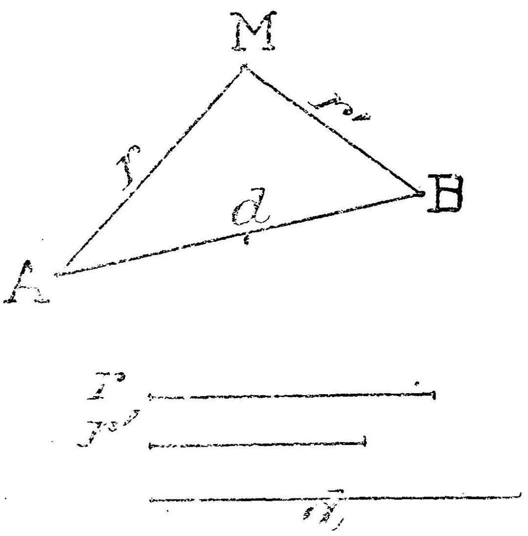

Fig. 45.

1° Quand le point M est fixé en position en même temps que les deux points A et B, il suffit de joindre M à A, M à B et de *mesurer* les distances r et r' ; celles-ci seront représentées soit par des fiches, soit par des nombres.

2° Quand les *fiches* r et r' sont données, ainsi que la fiche d de la distance AB, la figure est reconstructible au moyen d'une règle, d'un compas et d'une feuille *plane*.

Si l'on a à la fois $r - r' < d < r + r'$ la construction du point M sera possible, au moyen de l'intersection de deux cercles.

Il y a toutefois une réserve à faire ; le tracé du point M défini par les seules distances d, r, r', conduit en réalité à deux points M et M'. D'ailleurs les deux triangles AMB, et AM'B qui répondent à la question sont superposables, l'un peut être amené sur l'autre par une rotation d'un demi-tour autour de la charnière AB.

L'assemblage solide de trois points ne peut donc pas être défini dans l'espace d'une manière absolument complète par la connaissance de deux des points A et B et par celle du plan passant par A et B dans lequel la figure doit être donnée.

Passons à un assemblage solide plan de quatre points et demandons-nous si cet assemblage est complètement défini et en forme et en position par les connaissances des distances r et r' de M aux deux points de repère A et B, et par les distances s et s' de N aux deux mêmes points de repère.