Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE 2
Autor: Andrade, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10975

On remarquera que les longueurs d'arcs de cercle de rayons égaux sont comparables entre elles au même titre que des longueurs de droites ou des étendues angulaires.

Angles d'un triangle spérique. La génération (fig. 52), d'un *fuseau spérique* sphérique par une rotation convenable continue d'une demi-circonférence tournant autour d'un diamètre est absolument analogue à la rotation du plan autour d'une perpendiculaire au plan, elle permet de définir les angles sphériques par une trame de grands cercles ; l'angle sphérique peut d'ailleurs être mesuré par l'angle des tangentes rectilignes à ses deux côtés qui sont tirées du sommet A ; cet angle est encore un angle rectiligne du dièdre formé par les demi-plans dont les arcs de cercle sont les images sphériques.

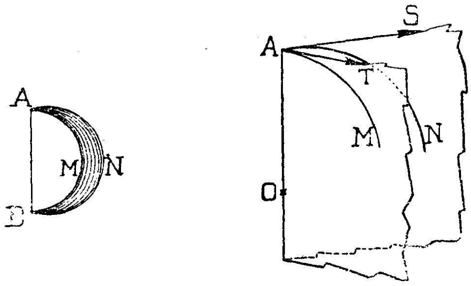


Fig. 52.

J. Andrade (Besançon).

(A suivre.)

SUR L'ÉQUIVALENCE DES ÉQUATIONS

Lemme. — La somme des n fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ étant représentée par la fraction

$$\frac{a_1 b_2 b_3 \dots b_n + a_2 b_1 b_3 \dots b_n + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}, \qquad (1)$$

pour que cette dernière fraction soit irréductible, il faut et il suffit que les n fractions données le soient aussi et que leurs dénominateurs soient premiers entre eux deux à deux.

Démonstration. 1° *La condition est nécessaire.* En effet, si deux des dénominateurs *au moins*, b_1 et b_2 par exemple, ou si le numérateur et le dénominateur de l'une des fractions, nométrie est quelquefois trop développée. Dans plusieurs gymnases on néglige par exemple l'étude du prismatoïde, dont la formule du volume donne lieu à des généralisations remarquables. D'autre part il serait désirable de donner une courte étude synthétique des sections coniques, en partant du cône de révolution, en la plaçant avant l'étude analytique.

Quant à la préparation du corps enseignant, elle varie d'un canton à un autre; il en est de même des exigences de l'Etat, qui ne sont pas toujours assez élevées. L'organisation des études pour les candidats à l'enseignement est encore insuffisante aussi bien dans les universités qu'à l'Ecole polytechnique fédérale. Sous ce rapport il conviendrait d'examiner avec soin les conseils que donne le rapport[1] de MM. Klein et Gutzmer (Dresde 1907).

Cette diversité dans la préparation est peut-être même une force stimulante, car le corps enseignant, dans son ensemble, est à la hauteur de sa mission. Il a conscience que l'enseignement mathématique est perfectible. Aussi est-ce avec le plus grand intérêt qu'il suit les discussions et les efforts qui se font dans les pays voisins.

H. Fehr.

LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE[2]

CHAPITRE III

Encore quelques propriétés du triangle. Angles trièdres et polyèdres. Le théorème du parapluie.

Comparaison des longueurs droites. (Sans figure.) — Deux droites étant données, si on porte l'une sur le prolongement de l'autre et bout à bout, la nouvelle droite formée sera dite *la somme* des deux premières ; des deux modes de superposition des droites égales il résulte que la somme de deux droites est indépendante de l'ordre dans lequel elles ont été ajoutées l'une à l'autre ; on définira de même la somme de plusieurs droites et cette somme jouira des propriétés suivantes : 1° la somme est indépendante de l'ordre de *jonction* des parties ; 2° dans la somme de plusieurs droites, un ensemble quelconque des portions de la somme peut être remplacé par leur somme partielle.

---

[1] Reproduit dans l'*Enseign. math.* du 15 janv. 1908; p. 5-49.

[2] Voir *L'Enseign. math.* du 15 mai, 1908; p. 185-207.

On résume les propriétés qui précèdent en disant que l'addition des droites est une opération *commutative* et *associative*.

Signes d'égalité et d'inégalité. — Plusieurs barres étant rangées par ordre de taille croissante, de taille égale, ou de taille décroissante, donnent à l'œil les trois groupements suivants (Fig. 20) : de là est né l'emploi des signes d'inégalité et d'égalité : $a < b$, $a = b$, $a > b$, qui signifient respectivement :

Fig. 20.

a plus petit que b, a égale b, a plus grand que b.

Quelques remarques évidentes. 1° Dire qu'une droite a est plus grande qu'une autre b, ou supérieure à une autre b, veut dire que la droite $a =$ la droite b *augmentée* de quelque chose ; l'addition étant une opération commutative, il résulte de la remarque précédente que si l'on a :

$$\left\{\begin{matrix} a < b \\ a' < b' \end{matrix}\right. \quad \text{on devra aussi avoir : } a + a' < b + b' .$$

2° Quand on ajoute une droite A un certain nombre de fois à elle-même, si par exemple on forme la droite égale à $A + A + A$, la nouvelle droite est dite égale à l'ancienne multipliée par 3 ; en général si m est un nombre entier, et si on forme la droite égale à $A + A \ldots + A$, réunion de m droites égales à A, on dit qu'on a formé la droite A *multipliée* par m, ce que l'on écrit $A . m$.

3° L'addition étant une opération commutative et associative on voit immédiatement que $(A + B + C + D).m = (A.m) + (B.m) + (C.m) + (D.m)$.

4° On admet comme évident qu'une droite A étant donnée et un nombre entier m étant également donné, il existe toujours une droite X (qui multipliée par m reproduira A ; on appelle cette droite la $m^{ème}$ partie de A ; on dit encore que X dérive de A par l'emploi *du nombre sectionnaire* $\frac{1}{m}$.

Ainsi, *par définition*, les égalités :

$$A = X \,.\, m \,, \quad \text{ou} \quad X = A \,.\, \frac{1}{m}; \text{ sont complètement équivalentes.}$$

5° On définira de même *le produit* d'une droite par plusieurs nombres entiers ou sectionnaires envisagés dans l'ordre de l'écriture. Exemple : $A . 3 . \frac{1}{4} . 5$ signifiera : longueur droite A que l'on multiplie par 3 : résultat dont on prend le quart : résultat que l'on multiplie par 5 ; et l'on démontrera sans peine que l'ordre des facteurs entiers ou sectionnaires n'exerce aucune influence sur le résultat.

6° Si p désigne un nombre entier ou sectionnaire on a :

$$(A + B + C) \cdot p = (A \cdot p) + (B \cdot p) + C \cdot p)$$

et par conséquent aussi, si l'on a : $A \cdot p > A' \cdot p$ on peut conclure : $A > A'$.

Les principes qui précèdent contiennent toute l'arithmétique et toute l'algèbre.

I. — Angle d'un triangle.

Deux demi-droites OX et OY peuvent former (Fig. 21) *soit un angle creux, soit un angle pointu, l'un supérieur, l'autre inférieur à 2 droits.*

Lorsqu'on admet, comme nous l'avons admis jusqu'ici, que *par deux points absolument quelconques* ne passe jamais qu'une seule droite on peut affirmer que tout angle engagé dans un triangle est un angle pointu. Démontrons le :

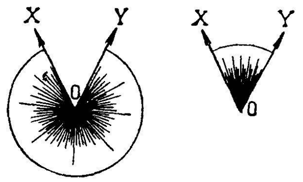


Fig. 21.

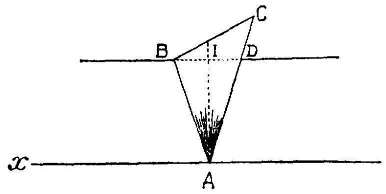


Fig. 22.

Soit $\widehat{BAC}$ (Fig. 22) un angle engagé dans un triangle BAC, sur le plus grand des deux côtés de cet angle prenons une *longueur* égale à celle du plus petit soit D le point ainsi obtenu sur AC, nous obtenons un triangle isocèle BDA ; soit I le milieu de BD, joignons I à A, nous obtenons une droite perpendiculaire à BD, menons A perpendiculaire à AI cette droite ne saurait pénétrer dans l'intérieur du triangle BDA, car elle couperait BD, ce qui n'est pas possible, donc l'angle $\widehat{BAC}$ engagé dans le triangle est formé de droites toutes situées d'un même côté de AX, donc l'angle considéré ne peut atteindre 2 droits.

II. — Propriété de l'angle extérieur d'un triangle.

Définition. — On appelle angle extérieur d'un triangle, l'angle formé en un sommet par l'un des côtés du triangle et par le prolongement de l'autre. (C'est aussi un angle pointu).

Théorème. — *L'angle extérieur d'un triangle est supérieur à tout angle intérieur qui n'a pas même sommet que lui.*

Faisons voir par exemple que : (Fig. 23) $\widehat{XAC} > \widehat{ACB}$. Joignons le troisième sommet B au milieu D de AC et prolongeons BD d'une longueur égale en DB′, joignons B′ à A, la droite AB′ sera située dans l'angle extérieur $\widehat{DAX}$; les angles opposés par le sommet BDC et ADB′ valent chacun 2 droits diminués de l'angle $\widehat{ADB}$ ils sont donc égaux ; alors les deux triangles ADB′ et BDC ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux ; et par suite les angles opposés respectivement à DB′ et BD côtés égaux, seront égaux ; ainsi $\widehat{B'AD} = \widehat{DCB}$; mais B′AD est portion de l'angle extérieur $\widehat{CAX}$, donc enfin on a bien :

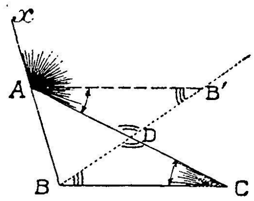


Fig. 23.

$$\widehat{XAC} > \widehat{ACB}.$$

III. — Comparaisons simultanées de 2 côtés d'un triangle et de leurs angles opposés.

Théorème. — *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux les angles opposés à ces côtés sont inégaux dans le même ordre de taille.*

Comparons (Fig. 24) les deux côtés AB et AC du triangle ABC ; soit le côté AC > AB. Prenons sur AC un segment AD = AB et joignons BD ; l'angle $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ (puisque le triangle ABD à deux côtés égaux) ; l'angle $\widehat{ADB}$ extérieur est plus grand que l'angle $\widehat{DCB}$ du triangle partiel BDC ; l'angle $\widehat{ABD}$ portion de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc plus grand que l'angle ACB, donc à plus forte raison l'angle total ABC dépassera-t-il ACB.

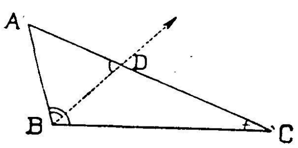


Fig. 24.

Théorème (réciproque du précédent). — *Si deux angles* d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés à ces *angles* sont inégaux et dans le même ordre de taille.

Soient (sans figure) $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ deux angles d'un triangle et soient: a et b les côtés respectivement opposés à ces angles; je dis que l'inégalité $\widehat{A} > \widehat{B}$ entraînera comme conséquence l'inégalité $a > b$.

En effet, en comparant a et b, trois cas peuvent seuls se présenter; ou bien 1° : $a < b$, ou bien 2° : $a = b$; ou bien 3° : $a > b$; or le cas de $a < b$ entraînerait, d'après le théorème précédent $A < B$ et le cas de $a = b$ entraînerait comme nous l'avons vu, au début de ces leçons $A = B$. Ces deux suppositions provisoires $a < b$ et $a = b$ entraîneraient donc des conséquences contradictoires avec l'hypothèse; on aura donc bien $a > b$ tout comme on avait d'abord $A > B$.

Remarque. — Ce genre de raisonnement est ce qu'on nomme un raisonnement *par l'absurde*.

IV. — Un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.

Il n'y a lieu à démonstration que si le côté considéré n'est pas le plus petit de tous, soit alors (Fig. 25) $AB > AC$. Prolongeons AC d'une longueur CD, de manière que $AD = AB$, joignons BD; envisageons d'une part le triangle isocèle ABD et d'autre part le triangle CBD. Dans ce dernier, l'angle CBD portion de ABD sera plus petit que celui-ci ou que son égal CDB; on a donc un triangle

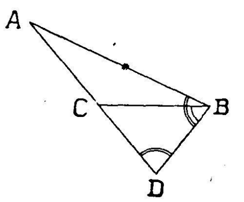


Fig. 25.

CBD dans lequel $\widehat{CDB} > \widehat{CBD}$; on peut donc affirmer, d'après le théorème précédent, que $CD < CB$; AB AD se composant de AC et de CD sera donc moindre que $AC + CB$.

V. — Comparaison de deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant deux angles inégaux.

Théorème. — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant un angle inégal, les côtés opposés à cet angle dans les deux triangles seront inégaux et dans le même ordre de taille.*

Portons (Fig. 26) le triangle A′B′C′ vers le triangle ABC, de manière à juxtaposer deux côtés égaux A′B′ sur AB et à placer les deux triangles dans une même région de leur plan commun, par rapport à ce côté coïncidant ; soit ABD la nouvelle venue du triangle A′B′C′, soit AX la bissectrice de l'angle formé par les deux autres côtés après ce transport.

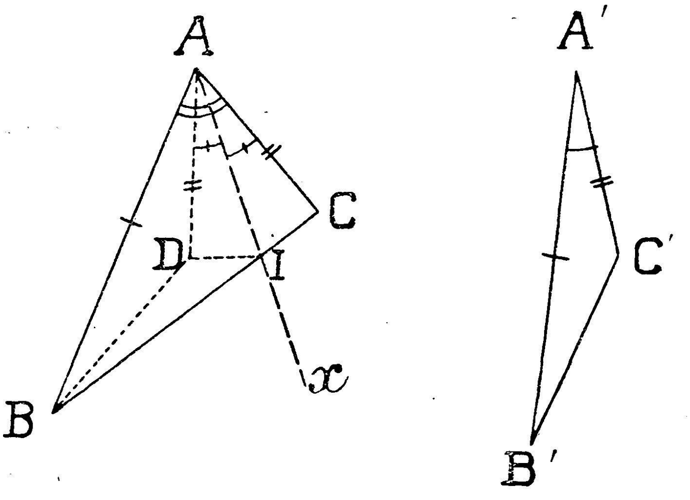


Fig. 26.

Cette bissectrice intérieure au plus grand angle BAC va couper le côté BC en I, joignons ID ; nous formons ainsi deux triangles ADI, AIC, égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, puis de l'égalité de ces triangles nous concluons DI = IC.

D'autre part, dans le triangle BDI nous avons, si D n'est pas sur BI,

$$BD < DI + IB \quad \text{ou} \quad BD < BI + IC \quad \text{ou} \quad BC.$$

Si D était sur BI, il serait forcément entre B et I et on aurait BD = BI — ID et à plus forte raison BD < BI + ID.

Théorème (réciproque du précédent). — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais si leurs troisième côtés sont inégaux, les angles opposés à ces côtés seront aussi inégaux et dans le même ordre de taille.*

Nous démontrerons cette réciproque par la réduction à l'absurde ; soient : b, c, a, les côtés du premier triangle, b', c', a', les côtés du second ; soient A et A′ les angles de ces triangles respectivement opposés aux côtés a et a'.

Nous supposons donnés les renseignements suivants :

$$b = b' \quad c = c' \quad a < a' \ \ldots \text{ (hypothèses données)}$$

voulant comparer les angles A et A′, nous ne pouvons que faire les suppositions suivantes :

1° A > A′ ; 2° A = A′ ; 3° A < A′ ; (hypothèses provisoires).

Or, d'après le théorème direct la supposition : A $>$ A$'$ entraînerait : $a > a'$, ce qui n'est pas ; la supposition A $=$ A$'$ entraînerait : $a = a'$, ce qui n'est pas non plus ; la seule supposition qui reste donc possible est : A $<$ A$'$.

VI. — Définition et propriétés de l'angle trièdre.

On appelle angle *trièdre* la figure 27 formée par 3 demi-droites et par les trames angulaires qui les réunissent deux à deux.

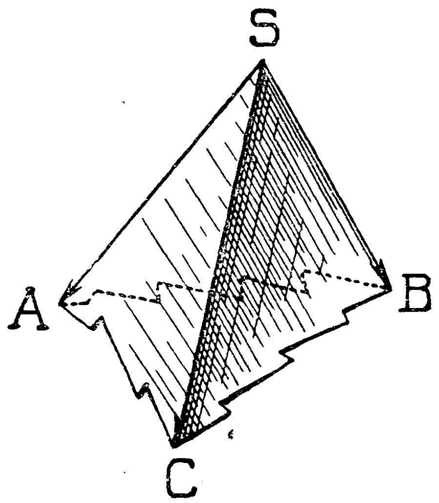


Fig. 27.

Ces trames angulaires portent encore le nom de *faces* du trièdre, leurs intersections ou les demi-droites déjà considérées se nomment les *arêtes* du trièdre.

Deux faces forment sur leur arête commune un angle *dièdre* que l'on nomme : un dièdre du trièdre. Le trièdre, sorte de capuchon, n'est pas une figure fermée ; mais un angle trièdre présente néanmoins certaines analogies avec un triangle ; nous allons par exemple démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout angle trièdre une face est plus petite que la somme des deux autres.*

Il n'y a lieu à démonstration que pour la face qui n'est pas la plus petite ; dans le plan de cette face qui prolonge le triangle ASB (Fig. 28) reproduisons donc un angle égal à la face adjacente plus petite, à partir de l'arête commune aux deux faces et dans une portion de la plus grande des deux faces ; nous obtenons ainsi l'angle ASD portion de ASB et reproduction de la face ASX ; sur l'arête SX prenons une longueur SC $=$ SD.

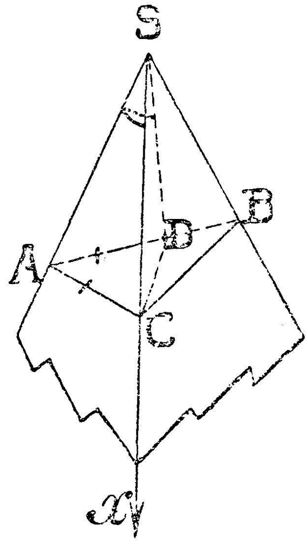


Fig. 28.

Menons CA, CB, CD ; grâce à notre choix des points C et D, les deux triangles ASD et ASC, déjà réunis par le côté commun SA seront égaux, et leur égalité nous apprendra ensuite que AD = AC ; d'autre part le triangle ABC nous donne

$$AB = AD + DB < AC + CB$$

et comme AD = AC, nous concluons

$$DB < CB\ .$$

Mais alors les deux triangles CSD et DSB qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ont leurs troisièmes côtés inégaux dans un ordre de taille que nous connaissons ; donc, d'après le théorème précédent, nous concluons :

$$\widehat{DSB} < \widehat{CSB}\ ,$$

ainsi, quand dans la plus grande face on a enlevé une portion égale à une face voisine on trouve un résidu plus petit que l'autre face voisine ; c'est donc que la première face était plus petite que la somme des deux autres.

VII. — **Théorème du parapluie.**

Théorème. — *La somme des faces d'un trièdre est moindre que 4 droits.*

Soit (Fig. 29) un trièdre de sommet S et soient SA, SB, SC ses 3 arêtes.

En prolongeant l'arête SA en SX nous formons un autre trièdre d'arêtes SB, SC, SX. Dès lors, en appliquant le théorème précédent au nouveau trièdre, et en remarquant que deux des faces du nouveau trièdre sont des suppléments de faces du premier trièdre, nous aurons :

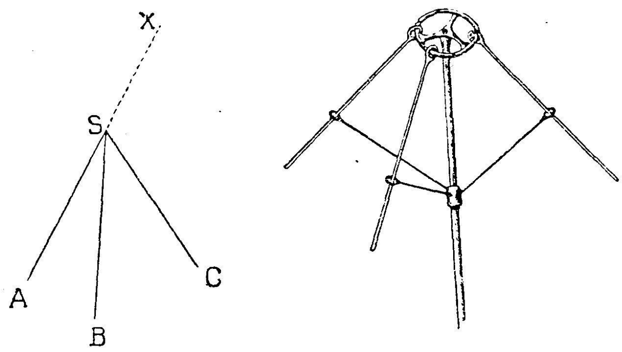


Fig. 29.

$$BSC < \widehat{BSX} + \widehat{CSX}\ ,$$

ou :

$$\widehat{BSC} < 2^{d} - \widehat{ASB} + 2^{d} - \widehat{ASC}\ ,$$

d'où on conclut immédiatement :

$$\widehat{ASB} + \widehat{ASC} + \widehat{BSC} < 4^{\text{droits}} .$$

Remarque— Concevons trois tiges rectilignes, (Fig. 27) appuyées comme les baleines d'un parapluie sur un cercle perpendiculaire à un axe et soutenues par trois autres tiges égales qui s'appuient à leur tour sur l'axe par l'intermédiaire d'une glissière qui peut s'élever sur cet axe.

Cette figure représente la membrure d'un parapluie rudimentaire, les trois tiges analogues aux baleines du parapluie forment par leurs axes un trièdre dont les faces augmentent quand le parapluie s'ouvre et diminuent quand le parapluie se ferme. Quand le parapluie s'est ouvert jusqu'à ce que les faces soient dans un même plan, les trois faces forment trois angles d'un plan, contigus et réunis autour d'un point sur trois droites, ces trois angles ont une somme égale à quatre droits.

Avant que le parapluie ne fût ouvert, la somme des trois faces du trièdre mobile était moindre que quatre droits ; comme désignation mnémonique l'énoncé du théorème précédent peut être retenu sous le nom de théorème du parapluie.

VIII. — Autre remarque.

Cette comparaison nous suggère une nouvelle démonstration du théorème. Prenons, (Fig. 30) sur les trois arêtes, des longueurs égales SA = SB = SC.

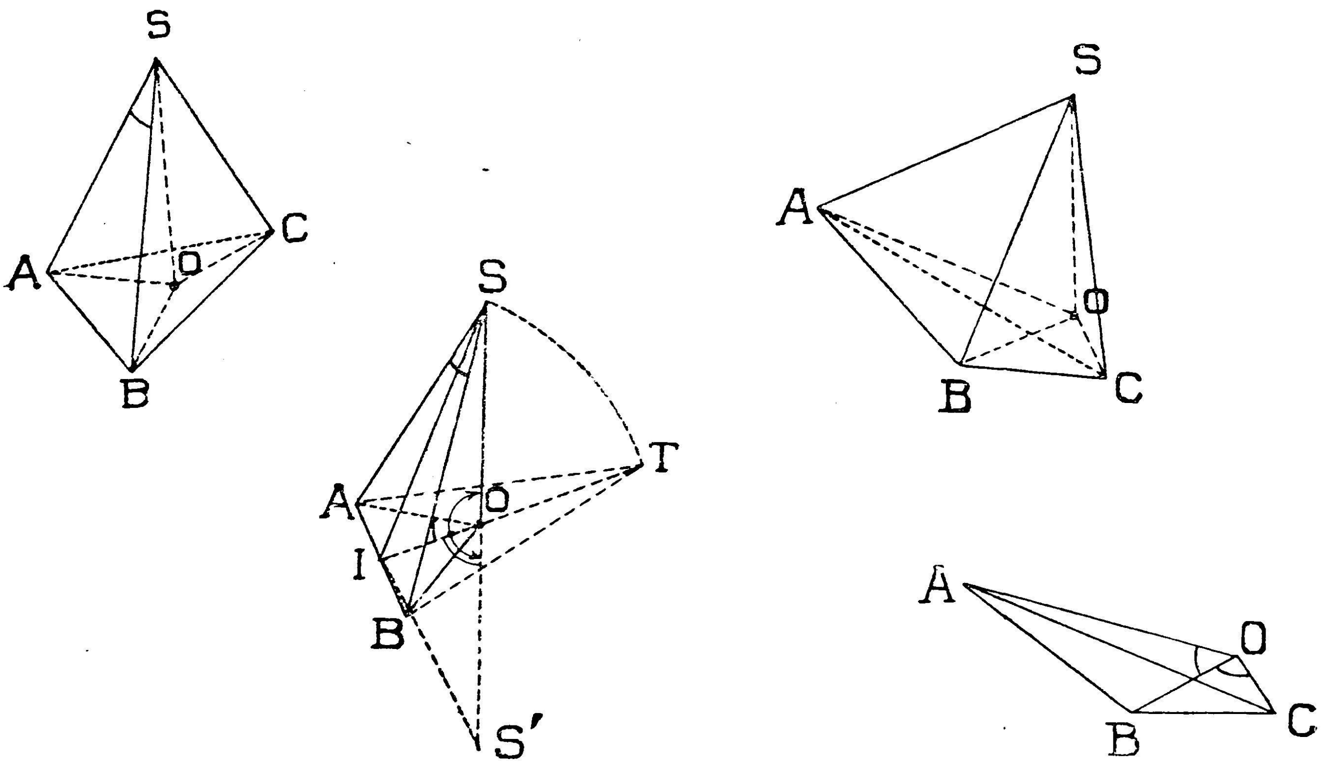


Fig. 30.

Et sur le plan déterminé par les trois points ABC abaissons une perpendiculaire SO, démontrons que l'angle ASB est plus petit que sa projection AOB. Soit I le milieu de AB.

Joignons I à O et à S par deux droites. SI étant perpendiculaire à AB, OI l'est aussi; d'autre part, prolongeons SO d'une quantité égale en OS' au-dessous du plan AOB; si l'on rabattait la figure SIO dans son plan autour de IO, S se rabattrait en S' d'où on conclut SI = S'I, or dans le triangle SS'I on a :

$$SS' < IS + IS' \quad \text{ou} \quad 2SO < 2SI \quad \text{d'où} \quad SO < SI\ ;$$

la perpendiculaire SO est moindre que l'oblique SI ; on montrerait de même que IO < IS, on conclut de là que si on rabat la distance SI sur IO le point S se rabattra en T, au-delà de O.

L'angle $\widehat{AOI}$ est donc un angle extérieur du triangle AOT ; on conclut de là

$$\widehat{AOI} > \widehat{ATI} \quad \text{ou} \quad 2\widehat{AOI} > 2\widehat{ATI} \quad \text{ou} \quad AOB > ATB$$

et comme ATB est la reproduction par rabattement de l'angle ASB on conclut AOB > ASB.

Dès lors, en revenant aux figures du trièdre dont le sommet est projeté en O sur le plan ABC, la somme des trois faces du trièdre est plus petite que la somme de leurs projections sur le plan ABC.

Dès lors si le point O est à l'intérieur du triangle la somme des projections des angles est précisément quatre droits.

Si au contraire le point O est hors du triangle ABC, chacun des trois angles en O reste cependant un angle pointu et l'un d'eux contient les deux autres, AOC par exemple contient AOB et BOC ; la somme des trois angles en O est donc moindre que deux fois l'angle AOC et comme l'angle AOC est moindre que deux droits la somme des triangles en O est ici moindre que quatre droits.

Donc dans tous les cas la somme des faces du trièdre est moindre que quatre droits.

IX. — **Angles polyèdres. Théorème du parapluie, applicable aux angles polyèdres convexes.**

On appelle *angle polyèdre* la figure 31 formée par plusieurs demi-droites envisagées dans un certain ordre ; les *faces* de l'angle polyèdre sont les trames angulaires formées par les divers groupes de deux demi-droites consécutives.

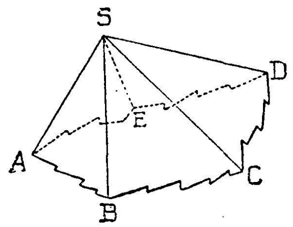


Fig. 31.

Les demi-droites sont les *arêtes* de l'angle polyèdre.

Un angle polyèdre est dit *convexe* si toutes ses arêtes demeurent d'un même côté par rapport au plan de chacune de ses faces; cette définition est satisfaite d'elle-même pour un angle trièdre.

Nous allons montrer que le théorème du parapluie s'étend aux angles polyèdres convexes ; il suffit pour le voir nettement de faire la *remarque suivante :*

Etant donnés (Fig. 32) deux demi-plans T_1 et T_2 comptés à partir de leurs intersections respectives OY et OZ avec un même

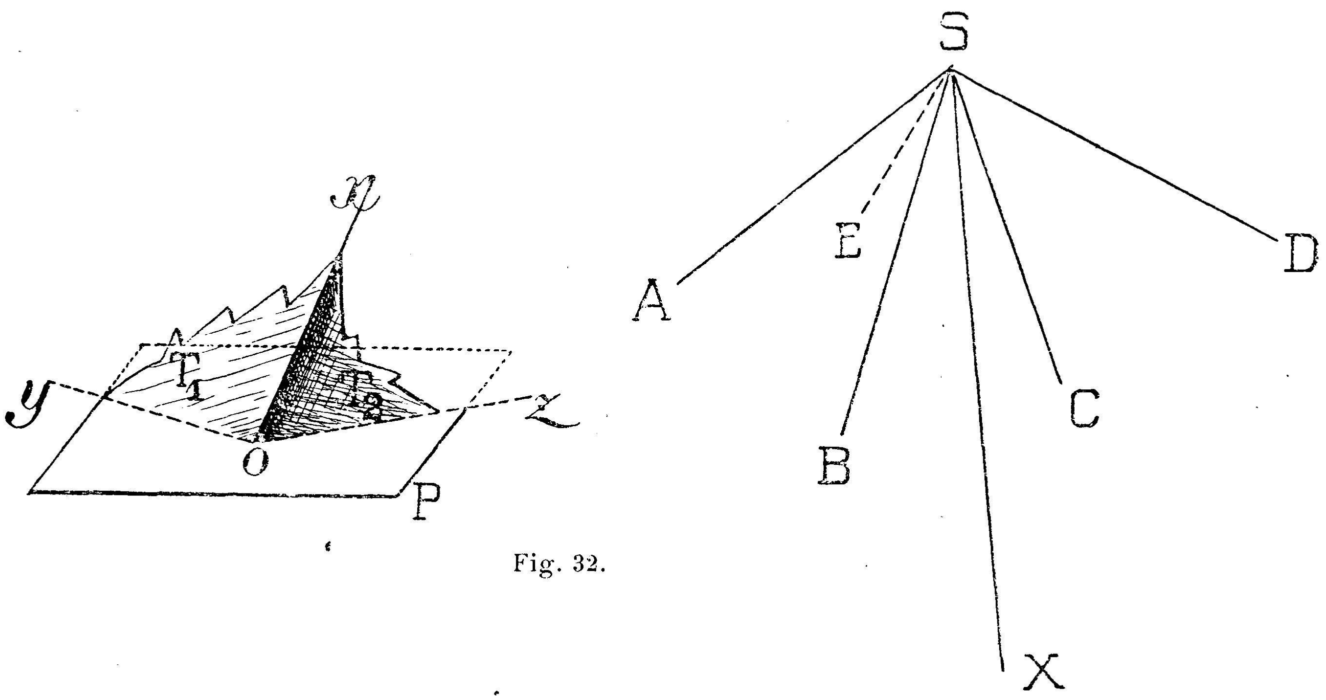


Fig. 32.

plan P, et tous deux comptés d'un même côté de P, les deux demi-plans auront toujours une demi-droite commune, située de ce même côté.

Considérons dès lors un angle polyèdre convexe et trois faces consécutives ; envisageons la face intermédiaire BSC, les prolongements des deux autres à partir des arêtes SB et SC se couperont en dehors des angles faces extrêmes suivant une demi-droite SX, si on remplace alors dans l'angle polyèdre les arêtes SB et SC par l'arête unique SX on forme un nouvel angle polyèdre convexe comme le premier mais ayant une arête de moins. En répétant cette réduction un assez grand nombre de fois on parviendra évidemment à un trièdre ; d'ailleurs par cette réduction, si le nombre des faces diminue, en revanche la somme de leurs *valeurs augmente.* Cela tient à ce que dans l'angle trièdre, dont les arêtes sont SB, SX, SC, la face BSC est moindre que la somme des faces BSX et XSC.

Ainsi par la réduction considérée, la somme des angles des faces augmente plus qu'elle ne diminue par la suppression d'une face. La somme des faces augmente donc jusqu'à l'obtention du trièdre, or ainsi augmentée elle est moindre que quatre droits, à plus forte raison la somme des faces de l'angle polyèdre primitif était-elle donc plus petite que quatre droits.

CHAPITRE IV

Les cercles du plan et de la sphère. Analogies du plan et de la sphère.

I.

Définitions. Considérons (sans figure), les points N, R, M de l'espace qui sont à une *distance* donnée d'un même point O également donné, tous ces points en nombre infini forment ce que l'on appelle une *surface sphérique ;* le point O est le centre de la sphère, les divers segments OM, OR, ON... sont des *rayons* de la sphère.

Ligne d'intersection d'une surface sphérique et d'un plan. Considérons (fig. 33) une surface sphérique de centre O et un plan P; soit M un point appartenant à cette surface sphérique et au plan P; soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P, joignons les points M et H par une droite, celle-ci sera perpendiculaire à HO; donnons à la droite MH envisagée comme une barre rigide liée à l'axe HO envisagé comme un pivot rigide, un mouvement de révolution autour de l'axe HO; dans ce mouvement le point M, nous l'avons vu, ne quitte pas le plan P, il ne quitte pas non plus la surface sphérique puisque pendant ce mouvement la distance OM ne varie pas : *il existe donc une ligne commune au plan P et à la surface sphérique* et cette ligne peut-être *définie dans le plan P l'ensemble des points de P dont chacun est à une distance fixe du point H,* cette ligne est appelée *circonférence de cercle.* H est son centre. Ainsi une surface sphérique et un plan P ont une ligne commune qui est une circonférence de cercle.

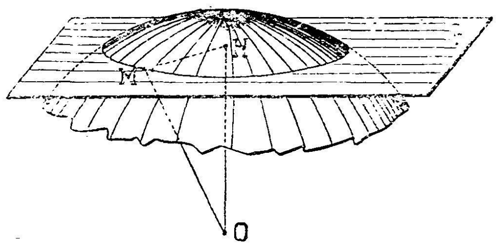


Fig. 33.

Il nous reste à établir que le plan P et la surface sphérique ne peuvent avoir d'autre point commun en dehors de la ligne précédente.

En effet soit (fi. 34) X un point commun à la surface de la sphère et au plan P déjà considérés ; soit toujours H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P.

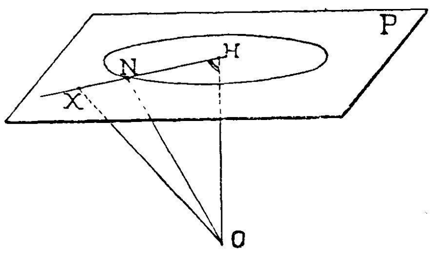


Fig. 34.

Parmi les différents points de la ligne que nous savons déjà commune au plan et à la surface sphérique, il y en aura certainement un, situé sur le segment HX ou sur son prolongement au delà de X ; il suffit en effet pour obtenir un pareil point N de porter sur la droite HX et *du même côté que* X un segment HN égal à la longueur HM de la figure précédente.

Or, si le point X différait de N, la droite joignant le point O au milieu de XN serait perpendiculaire à XN et devrait se confondre avec OH ; il y aurait donc contradiction, à moins que les points N et X ne se confondent.

Remarque. Si (fig. 33) les points H et M coïncidaient, le cercle d'intersection s'évanouirait sur le point H qui serait alors le seul point commun au plan et à la sphère.

II. — Remarques.

Cas d'égalité de 2 triangles rectangles. La manière dont nous venons d'utiliser ainsi les propriétés des perpendiculaires et des obliques mérite d'être retenue pour elle-même ; c'est ce que nous ferons par les deux théorèmes suivants qui nous donnent deux cas d'égalité propres aux triangles rectangles, et dans l'énoncé desquels on appelle *hypoténuse* le côté du triangle qui est opposé à l'angle droit de ce triangle.

1° *Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal sont égaux.*

2° *Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un angle autre que l'angle droit, égal, sont égaux.*

Le premier théorème se démontre en essayant (fig. 35) le commencement de la superposition par l'angle droit égal et en juxtaposant les 2 sommets C et C′ où se croisent deux côtés égaux chacun à chacun; on aura soin de rabattre les deux triangles d'un même côté par rapport au segment sur lequel sont déjà venus se confondre les côtés de l'angle droit; les hypoténuses devront alors coïncider en position, sans quoi on aurait des obliques égales s'écartant inégalement du pied de la perpendiculaire ce qui, nous venons de le voir, n'est pas possible.

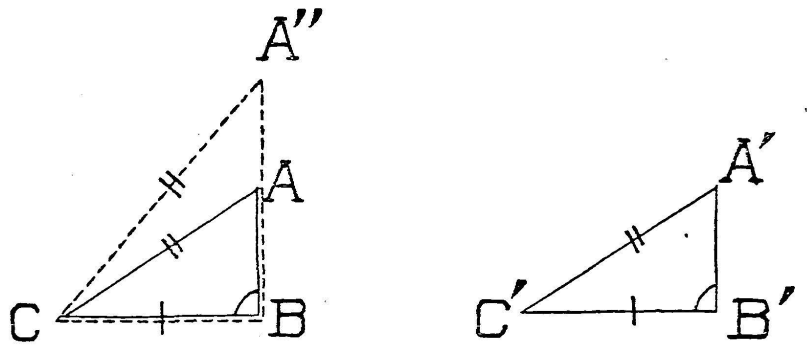


Fig. 35.

Le second théorème se démontre en essayant (fig. 36) le commencement de la superposition par l'hypoténuse égale et par l'angle non droit égal $\widehat{A} = \widehat{A'}$. L'angle B′ droit ne variant pas pendant le trajet, et son sommet étant venu en B″, la superposition commencée doit s'achever d'elle-même sans quoi on pourrait, d'un même point C, abaisser sur une même droite 2 perpendiculaires, CB et CB″.

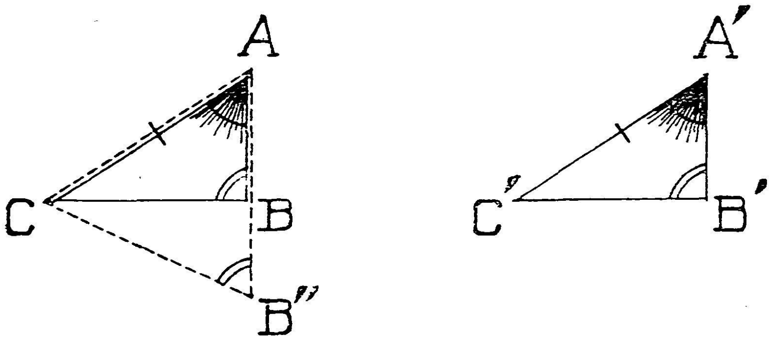


Fig. 36.

Autre remarque. Tout angle d'un triangle rectangle autre que l'angle droit donné est *aigu*, c'est-à-dire moindre qu'un angle droit.

En effet, article VIII, chapitre III, la perpendiculaire (fig. 37) CB sur AB tirée de C est plus courte que l'oblique CA tirée du même point C. Or nous avons vu que, si dans un triangle quelconque deux côtés sont inégaux les angles opposés sont inégaux et dans le même ordre de taille que ces côtés. De l'in-

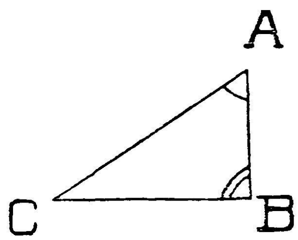


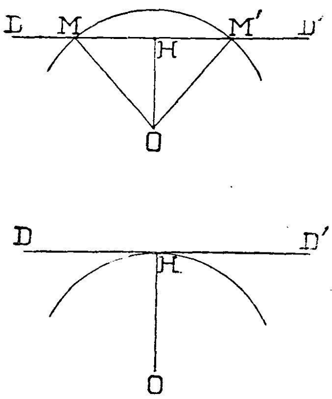
Fig. 37.

égalité CA > CB, nous tirons : angle B > Angle A ; et comme l'angle B est droit, l'angle A est bien aigu.

III. — Situations mutuelles des droites et des circonférences d'un même plan ; situations des plans et d'une sphère.

En raisonnant exactement comme pour la sphère on verra que *dans un même plan :*

1° Si une droite DD′ (fig. 38) et une circonférence de centre O ont en commun un point M, distinct du pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite DD′, elles auront encore en commun, un autre point M′, mais nul autre point commun hors des deux précédents et de plus le point H sera le milieu du segment MM′.



2° Si une droite DD′ et une circonférence de centre O ont en commun un point H qui est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite, elles n'ont aucun autre point commun. On dit alors que la droite est tangente à la circonférence.

Fig. 38.

Remarque. — Désignons par d la distance du centre O à la droite DD′ c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée sur la droite et soit R la longueur du rayon de la circonférence. Trois cas sont à distinguer, suivant qu'auront lieu l'une ou l'autre des circonstances suivantes, qui s'excluent mutuellement :

1° $d < R$. 2° $d = R$. 3° $d > R$.

On voit de suite que le cas $d > R$ empêche la droite et la circonférence de se couper ; que le cas de $d = R$ fait la droite et la circonférence mutuellement tangentes.

Il nous reste à établir que dans le cas de $d < R$ la droite et la circonférence se coupent toujours.

Rappelons-nous à cet effet que les longueurs a, b, c de trois côtés d'un triangle sont assujetties aux inégalités :

$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b,$

d'où on conclut aussi, si par exemple $a > b$, $c > a - b$.

Ainsi un côté d'un triangle est compris entre la somme et la différence de deux autres côtés ; soit alors (fig. 39) H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur DD′. Portons sur DD′ et à partir de H une longueur HK égale à 2R et joignons O à K par une droite. Nous aurons $OK > KH - HO$, ou $OK > R + (R - HO)$, donc OK est $> R$.

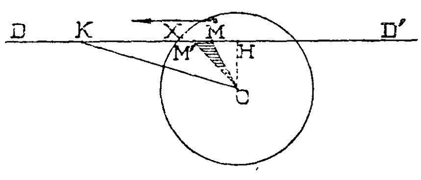


Fig. 39.

Imaginons alors un point M, mobile de H vers K d'une manière continue, soit M′ une position du point voyageur, voisine de la position M.

Le triangle OM′M nous donne $OM - MM' < OM' < OM + MM'$; si donc le chemin MM′ est pris suffisamment petit ; la variation de la longueur OM sera aussi petite qu'on le voudra ; en d'autres termes la longueur OM est *une fonction continue* de la longueur MH ; or quand le point voyageur va de la position H à la position K, c'est-à-dire quand la longueur variable MH varie de zéro à HK la longueur variable OM a varié depuis la valeur OH moindre que R jusqu'à la valeur OK supérieure à R, d'ailleurs OM est allé toujours en augmentant, *donc la valeur variable de* OM *a* PASSÉ UNE ET UNE SEULE FOIS *par la valeur fixe* R, c'est-à-dire que le point voyageur a passé par une position X appartenant à la fois à la droite et à la circonférence.

Le principe que nous admettons ici est le suivant : Si une quantité y varie d'une *manière continue* en même temps qu'une quantité x dont la première dépend, et si, pour deux valeurs de x distinctes, (savoir pour $x = a$ et pour $x = b$) y prend deux valeurs distinctes savoir c et d, il existera au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle la fonction y prendra une valeur m quelconque mais comprise entre c et d. La démonstration de ce principe appartient à l'enseignement de l'algèbre et nous ne la reproduirons pas ici.

Remarque. — Cette discussion peut être appliquée à la sphère; elle nous montre que tout plan dont la distance au centre de la sphère est moindre que le rayon de cette sphère coupera effectivement la sphère suivant une circonférence.

IV. — Situations mutuelles de deux circonférences d'un plan.

L'étude rigoureuse des situations mutuelles de deux circonférences deviendra très facile si nous nous reportons encore au principe de continuité, mais nous aurons quelques faits préliminaires à établir.

Premier fait préliminaire. Si (fig. 40), deux droites OA et OB sont obliques sur une même droite AB mais d'un même côté de la perpendiculaire OH tirée de O sur AB, la bissectrice OC de l'angle AOB partage le segment AB en deux portions inégales, la portion CB qui est la plus voisine du point H est la plus petite des deux portions. Le triangle ABO dont l'angle en B

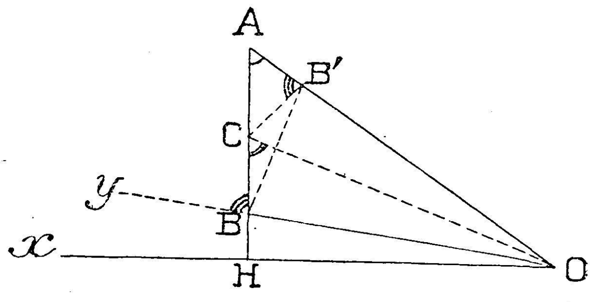


Fig. 40.

est obtus donne : AO $>$ OB ; portons *l'oblique la plus courte* OB sur la plus grande; joignons CB′, le triangle CB′O est égal au triangle CBO, d'où on conclut que l'angle CBY $=$ l'angle AB′C; or l'angle CBY est *extérieur* au triangle CBO et l'angle $\widehat{BCO}$ est intérieur; on a donc $\widehat{CBY} > \widehat{BCO} > \widehat{CAO}$; on a donc dans le triangle ACB′ ; angle $\widehat{AB'C}$ $>$ angle $\widehat{CAB'}$.

Donc, en considérant les côtés opposés à ces angles :

AC $>$ CB′ ; et comme CB′ $=$ CB, on a bien :

AC $>$ CB, comme nous voulions le démontrer.

Deuxième fait préliminaire. Considérons (fig. 41), une circonférence de centre O, et un angle au centre TOA, constituant

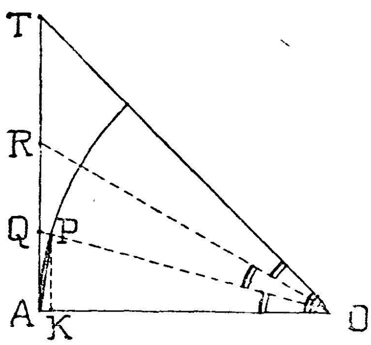


Fig. 41.

l'angle d'un triangle rectangle ayant le rayon OA comme côté d'un angle droit dont le sommet est en A ; soit OT l'hypoténuse de ce triangle rectangle. Partageons l'angle TOA en n parties égales, la corde AP qui sous tend les arcs correspondants à ces angles au centre sera moindre que la $n^{ème}$ partie du côté AT.

En effet soit AQ la première des portions de AT détachées par ces angles, d'après le fait établi tout à l'heure on a :

$$AQ < QR < \ldots < RT, \text{ d'où } AQ < \frac{AT}{n}.$$

Or l'angle QPA étant obtus, et l'angle $\widehat{AQP}$ aigu, on aura $AP < AQ < \dfrac{AT}{n}$.

Théorème. — Soit (fig. 42), M un point voyageur sur l'arc AB d'une circonférence de centre O, soit O′ un autre point du plan.

La longueur O′M *varie d'une manière continue quand le rayon* OM *tourne lui-même d'une manière continue autour de* O.

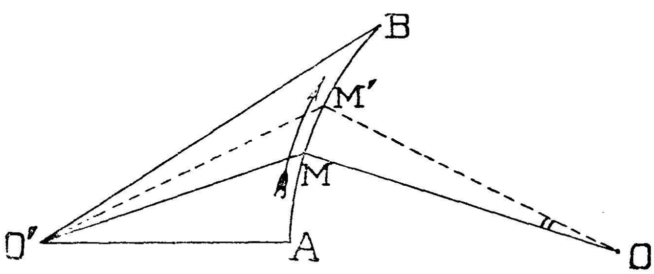


Fig. 42.

En effet, quand le rayon OM tourne d'un angle $\widehat{MOM'}$, moindre que $\dfrac{\widehat{TOA}}{n}$ de la figure 41, MM′ sera moindre que $\dfrac{TA}{n}$, et comme O′M — MM′ $<$ O′M′ $<$ O′M $+$ MM′, on voit qu'on a pu rendre $\widehat{M'OM}$ assez petit pour que la variation O′M′ — OM ou OM — O′M′ soit aussi petite qu'on voudra. *La variation de la longueur* O'M *est donc bien continue.*

Première conséquence. Si (sans figure), un arc AB de circonférence réunit un point A intérieur à une autre circonférence C et un point B extérieur à cette même circonférence, l'arc considéré doit traverser la circonférence C en quelque point X.

La démonstration se fait d'elle-même en rapprochant le fait précédent du principe de continuité, car si O est le centre de la circonférence C de rayon R, la longueur OM varie depuis une quantité OA moindre que R jusqu'à une quantité OB supérieure à R, elle doit donc prendre *dans l'intervalle* la valeur R lorsque le point M est en un certain point X de l'arc AB, mais ce point X étant à distance R de O appartient évidemment à la circonférence C.

Théorème. — *Si deux circonférences* (fig. 43), *ont en commun un point* M *situé hors de la droite qui réunit leurs centres, elles ont encore en commun un point* M' *tel que la droite* OO' *passe par le milieu de* MM' *et est perpendiculaire à* MM'.

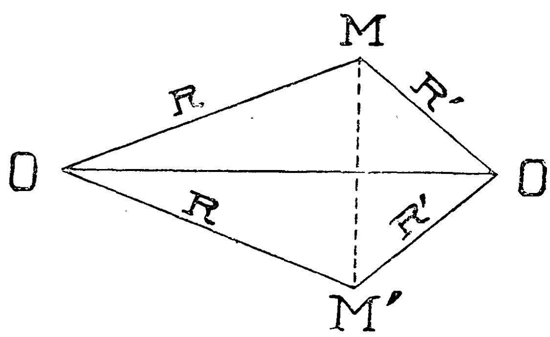


Fig. 43.

La démonstration s'achève par un simple rabattement autour de OO'.

Remarque. — Si deux circonférences ont deux points communs M et M', les deux centres de ces circonférences se trouvent sur la perpendiculaire élevée au milieu de MM', de là il résulte évidemment que deux circonférences de centres distincts ne peuvent avoir plus de deux points communs et que lorsqu'elles ont un seul point commun, ce dernier point appartient à la droite qui joint les centres.

Criterium des situations mutuelles de deux circonférences. Par la remarque précédente on voit que si deux circonférences se coupent on doit pouvoir construire un triangle tel que OMO' dans les figures précédentes; on conclut de là que, si d est la distance des centres et que si R est le plus grand des rayons R et e' on aura $R - R' < d < R + R'$.

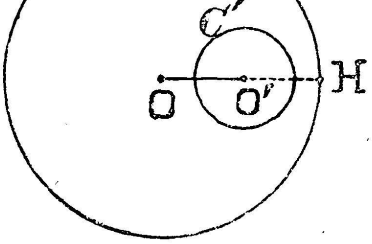


Fig. 44.

Nous allons démontrer la *réciproque,* mais auparavant supposons que l'on ait : $d < R - R'$, ou $d = R - R' - e$.

Soit (fig. 44) H l'extrémité du rayon de C issu de O vers O', un point de la circonférence C' est alors intérieur à C, aucun autre point ne saurait alors être extérieur, puisqu'alors, comme on l'a vu, les circonférences se couperaient et l'on devrait avoir $d > \mathrm{R} - \mathrm{R}'$.

On démontrerait de même que si $d > \mathrm{R} + \mathrm{R}'$ les circonférences ne se coupent point mais sont toutes deux extérieures l'une à l'autre.

Supposons maintenant : $\mathrm{R} - \mathrm{R}' < d < \mathrm{R} + \mathrm{R}'$; si $d > \mathrm{R} - \mathrm{R}'$ il y a des points de C′ en dehors de C, si $d < \mathrm{R} + \mathrm{R}'$ il y a des points de C′ en dedans de C, donc d'après un théorème déjà signalé C′ et C se coupent.

V. — La notion d'orientation.

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent encore s'énoncer sous une forme plus claire en disant : Un point M (fig. 45), d'une figure solide *plane* est défini par ses deux distances r et r' à deux points particuliers A et B de la figure. En effet :

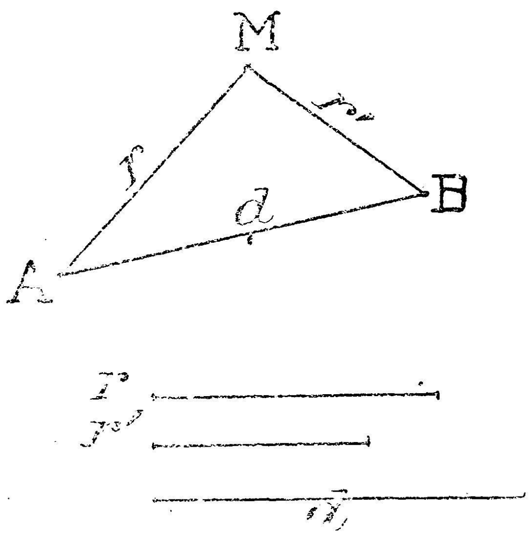


Fig. 45.

1° Quand le point M est fixé en position en même temps que les deux points A et B, il suffit de joindre M à A, M à B et de *mesurer* les distances r et r' ; celles-ci seront représentées soit par des fiches, soit par des nombres.

2° Quand les *fiches* r et r' sont données, ainsi que la fiche d de la distance AB, la figure est reconstructible au moyen d'une règle, d'un compas et d'une feuille *plane*.

Si l'on a à la fois $r - r' < d < r + r'$ la construction du point M sera possible, au moyen de l'intersection de deux cercles.

Il y a toutefois une réserve à faire ; le tracé du point M défini par les seules distances d, r, r', conduit en réalité à deux points M et M′. D'ailleurs les deux triangles AMB, et AM′B qui répondent à la question sont superposables, l'un peut être amené sur l'autre par une rotation d'un demi-tour autour de la charnière AB.

L'assemblage solide de trois points ne peut donc pas être défini dans l'espace d'une manière absolument complète par la connaissance de deux des points A et B et par celle du plan passant par A et B dans lequel la figure doit être donnée.

Passons à un assemblage solide plan de quatre points et demandons-nous si cet assemblage est complètement défini et en forme et en position par les connaissances des distances r et r' de M aux deux points de repère A et B, et par les distances s et s' de N aux deux mêmes points de repère.

Si les données précédentes étaient les seules, on aurait le choix entre les quatre assemblages suivants :

$$\begin{cases} M \\ N \end{cases} \quad \begin{cases} M \\ N' \end{cases} \quad \begin{cases} M' \\ N \end{cases} \quad \begin{cases} M' \\ N' \end{cases} \qquad \text{(fig. 46)},$$

l'ambiguïté serait donc accrue, puisque non seulement on pourrait hésiter entre quatre assemblages différant tout au moins par la position, mais encore, les divers assemblages ne seraient pas tous superposables. Si le nombre des points augmentait, l'embarras pour reconstruire la figure serait encore accru.

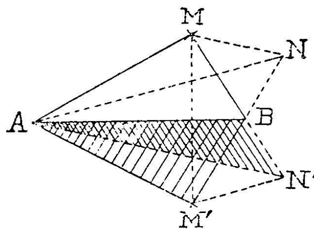


Fig. 46.

Cet exemple montre nettement que les longueurs des distances des divers points de la figure à deux d'entre eux constituent des données insuffisantes si l'on n'a pas soin d'y ajouter des renseignements *purement qualitatifs* de situations relatives.

Par exemple nous ajouterons aux renseignements des fiches, et pour chaque point nouveau N, un *renseignement de situation* qui sera de l'une ou l'autre espèce suivante :

1° ou bien M et N sont d'un même côté de AB ;

2° ou bien M et N sont de part et d'autre de AB ;

— nous nommerons ces renseignements des renseignements *d'orientation;* — avec ces renseignements ajoutés à la connaissance des distances, l'assemblage solide plan devient complètement défini, et on n'a plus à hésiter qu'entre deux situations ; on passe d'ailleurs de l'une de ces situations à l'autre par un demi-tour exécuté autour de AB.

Enfin, on pourra même faire cesser toute hésitation entre les deux situations du même solide en se préoccupant des trois dimensions du solide.

Nous pourrons par exemple, dans un solide déterminé, associer à tout plan une poupée invariablement liée au solide, nous pourrons par exemple placer la poupée en A (fig. 47), perpendiculairement au plan considéré du solide, visant le point B de ce plan; la situation du point M sera alors complètement définie; si une fois données les distances MA, MB, on ajoute de quel côté (gauche, ou droite) le point M se trouve par rapport à la poupée.

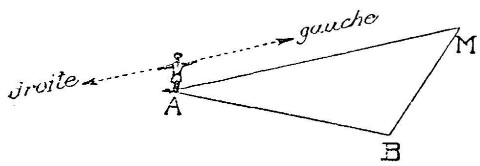


Fig. 47.

Nous allons retrouver ces notions sur la sphère.

VI. — Les cercles de la sphère.

Grands cercles et petits cercles. Analogies des triangles sphériques et des triangles plans.

Toute section plane de la sphère est un cercle, nous l'avons vu, dont le centre est la projection du centre de la sphère sur le plan de la section ; si ce plan passe déjà par le centre de la sphère la ligne d'intersection des deux surfaces sera une circonférence du plus grand rayon possible, c'est une circonférence de grand cercle.

Par deux points, A et B (fig. 48), donnés sur la surface sphérique passe toujours un grand cercle, et un seul lorsque du moins les points A et B ne sont pas aux extrémités de deux rayons égaux et directement contraires ; en effet, hormis ce cas d'exception, les droites OA, OB déterminent un plan et un seul, et ce plan va couper la surface sphérique en une circonférence et une seule.

Par contre si la circonférence est unique, *l'arc* qui réunit les deux points n'est pas complètement déterminé, on peut hésiter entre deux arcs AMB et APB.

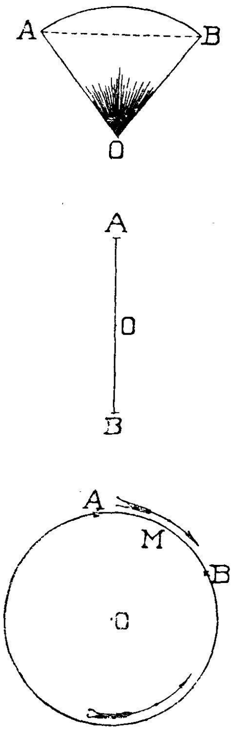


Fig. 48.

Nous considérons plus particulièrement l'arc *réduit* c'est-à-dire celui des deux arcs qui est moindre qu'une demi-circonférence ; cet arc est l'image sphérique de l'angle pointu déterminé par les deux rayons dans la trame triangulaire formée par les 3 points O, A, B.

Deux arcs de grand cercle issus d'un point A vont se réunir en un autre point B nommé l'*antipode* du premier (fig. 49).

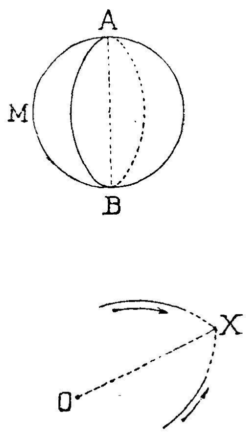


Fig. 49.

Il y a plus : deux grands cercles étant donnés se coupent toujours (fig. 49), en un point X ; en effet les plans des deux grands cercles sont deux plans distincts qui ont déjà en commun le centre O de la sphère, ces deux plans auront donc une droite commune, or, un point X, situé sur cette droite commune, à une distance de O égale au rayon, est un point de la surface sphérique, commun aux deux arcs.

Les arcs de grand cercle sur une surface sphérique ont évidemment une grande analogie avec les droites du plan, mais la propriété précédente va être un élément de simplification de la géométrie de la sphère. Nous allons poursuivre l'exposé des analogies.

Les deux régions de la surface sphérique par rapport à un grand cercle, sont les analogues des deux régions d'un plan par rapport à une droite; si (fig. 50), deux points A et B sont, par rapport à un grand cercle de la sphère, dans une même région (1), l'arc de grand cercle *moindre qu'une demi-circonférence* qui les réunit ne traverse pas la circonférence de grand cercle donnée; au contraire deux points C, D, appartenant à deux régions opposées (1) et (2) par rapport à la circonférence complète considérée étant réunis par un arc moindre qu'une demi-circonférence, cet arc réduit *coupera* cette demi-circonférence; ces faits peuvent d'ailleurs s'interprèter comme traduisant, par images sphériques, les faits correspondants qui se rattachent à la distinction des deux régions de l'espace par rapport à un plan.

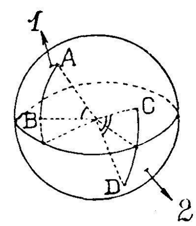


Fig. 50.

Cette notion conduit sans peine (fig. 51), à la trame triangulaire sphérique; si celle-ci est bordée par deux *côtés* réduits, en vertu des propriétés de l'angle trièdre, le troisième sera aussi réduit et deux points quelconques de l'intérieur du triangle seront aussi à distance réduite sur un arc de grand cercle situé à l'intérieur du triangle.

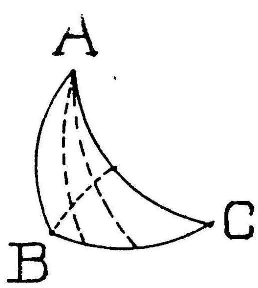


Fig. 51.

Nous nommerons triangle spérique *propre* un pareil triangle; c'est l'image d'un trièdre dont le sommet est au centre de la spère.

Nous avons ici un renseignement immédiat sur ces triangles, ceux-ci en effet étant l'image d'un trièdre, nous voyons que dans un triangle propre un côté est plus petit que la somme des deux autres.