Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME SUR LA DROITE DE SIMSON
Autor: Pleskot, Ant.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10970

En effet, par ce rabattement O E vient en O E' recouvrir O H tandis que O H vient en O H' recouvrir O E; le segment O A perpendiculaire à la trame E O H comme à la trame E' O H' devra donc, ou bien se retrouver sur lui-même, soit recouvrir le segment O B; le premier est inadmissible, car la fixité finale de la trame A O S fixerait le solide et par conséquent serait inconciliable avec le rabattement précédent; donc O A recouvre O B; A X vient alors en A' X' recouvrir B U, tandis que A Y vient alors en A' Y' recouvrir B Z donc enfin l'angle X A Y égal à l'envers de l'angle Z B U est aussi égal à ce dernier.

J. ANDRADE (Besançon).

(A suivre).

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME SUR LA DROITE DE SIMSON

Théorème I. — Soient une conique K de centre O et un triangle inscrit A B C ; a, b, c, les milieux des côtés BC, AC, AB. Joignons Oa, Ob, Oc. Par un point quelconque D de la conique menons des parallèles à Oa, Ob, Oc coupant les côtés du triangle en a_1, b_1, c_1 respectivement : Ces trois points a_1, b_1 c_1 seront en ligne droite (*fig.* 1). Si la conique est un cercle, ce théorème devient le théorème de Simson : *Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle sur les côtés d'un triangle inscrit sont en ligne droite.*

Théorème II. — Par un point quelconque S d'une conique menons des parallèles aux côtés AB, BC. CA du triangle inscrit ABC ; elles donnent sur la conique des points c, a, b. Soit D un point quelconque de la courbe, menons Dc, Da,

---

[1] La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux portions égales.

Db coupant respectivement les côtés AB, BC, CA du triangle aux points c_1. a_1, b_1 : *Ces trois points seront en ligne droite* (*fig.* 2).

Si la conique est un cercle et si les points S et D sont pris aux extrémités d'un même diamètre, on retrouve le théorème de Simson.

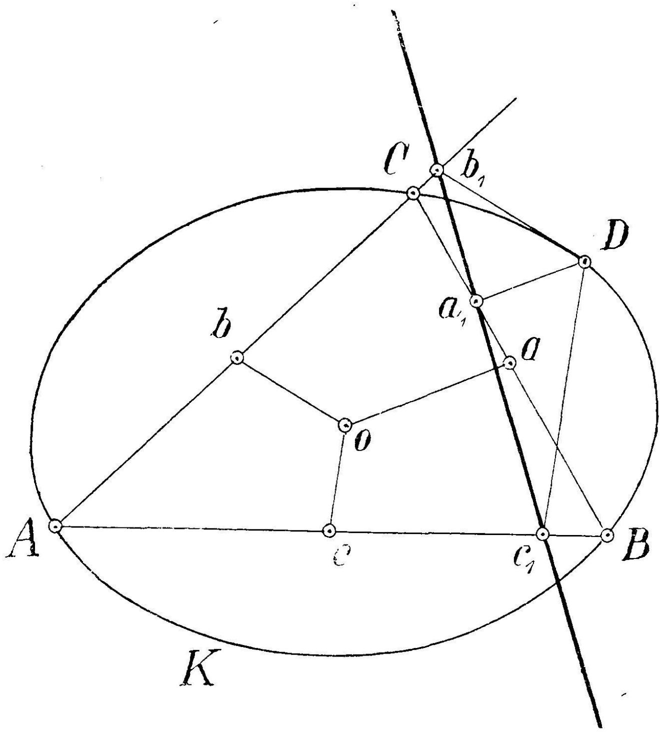

Fig. 1.

Ces deux théorèmes ne sont qu'un cas particulier du *théorème général* suivant :

Soient une conique K et un triangle inscrit A, B, C. Soit M une droite quelconque prise dans le plan de la conique ; déterminons sur cette droite deux divisions homographiques telles que les points d'intersection de la droite avec la conique en soient les points doubles (*fig.* 3). Nous prendrons pour les points de la première division les intersections c, a, b, de la droite M avec les côtés AB, BC, CA du triangle ; a_1, b_1, c_1 sont les points correspondants de l'autre division. Soit D un point quelconque de la conique : *Les droites* Da_1, Db_1, Dc_1 *couperont les côtés* BC, CA, AB *du triangle en trois points* α, β, γ, *situés sur la même droite*.

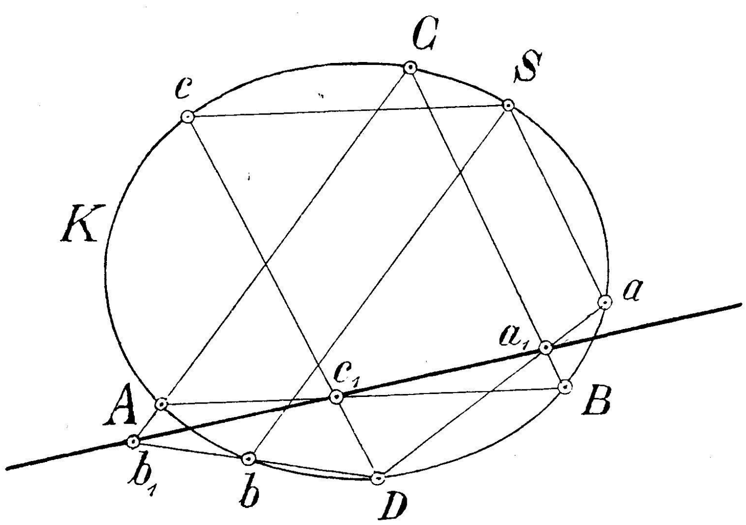

Fig. 2,

La démonstration en est facile. Considérons le côté AB du triangle comme fixe et le point C comme point variable pouvant se déplacer sur la conique. Le rayon variable AC coupe la droite M en b, point auquel correspond b_1. Les rayons AC et Db_1 sont les rayons de deux faisceaux homographiques, le lieu du point d'intersection de ces deux rayons

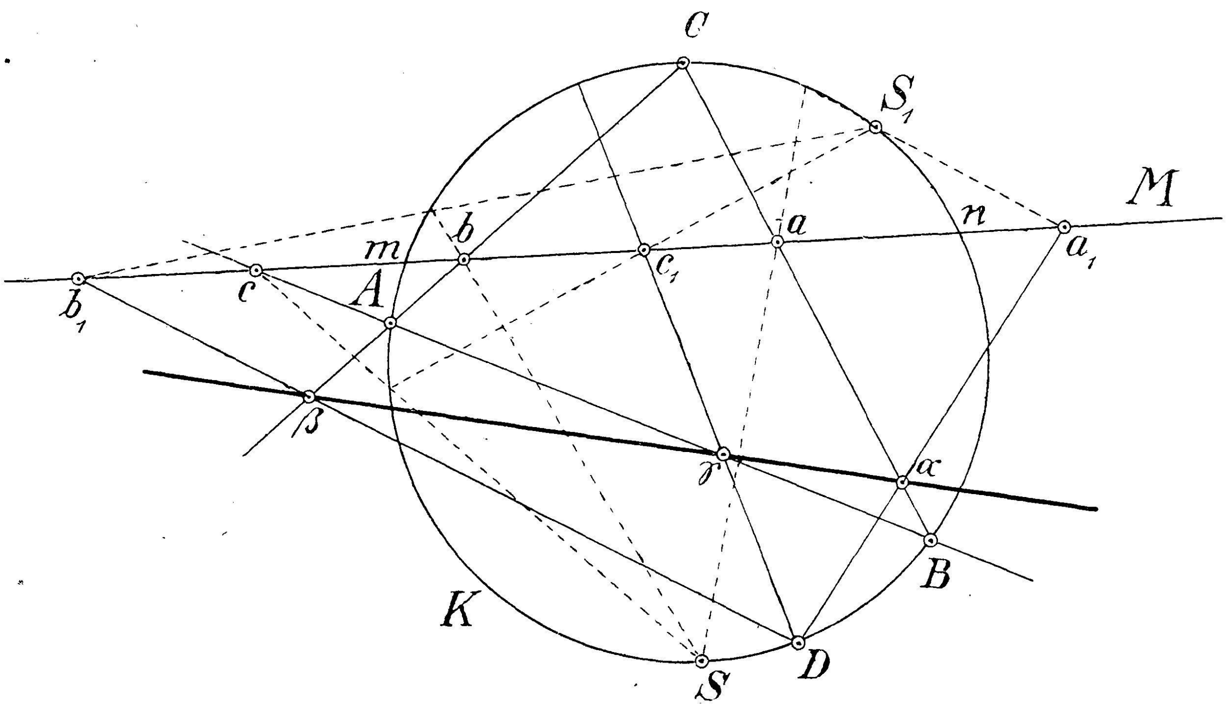

Fig. 3.

homologues sera une conique K_1, passant par les centres A et D des deux faisceaux, par les points m et n, intersection de la droite M et de la conique K, et par le point γ.

De même, le rayon variable BC coupe la droite M en a, point auquel correspond a_1. Les rayons BC et Da_1 sont des rayons homologues de deux faisceaux homographiques ; le lieu de leur point d'intersection sera une nouvelle conique K_2 passant par les centres B et D des faisceaux, par les points m et n et également par le point γ. Supposons que le point C décrive la conique K et considérons les rayons $\gamma\beta$ et $\gamma\alpha$. Ces rayons, ayant un centre commun γ appartenant aux deux coniques K_1 et K_2, sont homographiques. Un rayon $\gamma\beta$ du premier faisceau coupe la conique K_1 en un seul point β, la droite Aβ coupe également la conique K en un seul point C. Au point C correspondra un seul point α et par suite un seul rayon $\gamma\alpha$. Ainsi, à tout rayon $\gamma\beta$ correspond un seul rayon $\gamma\alpha$ et réciproquement.

Si nous pouvons démontrer que les faisceaux $\gamma\alpha$ et $\gamma\beta$ sont tels que l'on peut trouver trois rayons qui sont eux-mêmes leurs homologues, il en résultera que la propriété est générale, c'est-à-dire que chaque rayon est son propre homologue, ou encore que $\alpha\beta\gamma$ sont en ligne droite. Or il est facile de trouver les trois rayons en question. En effet, si C se trouve en m ou n, α et β se trouvent en m ou n, et si C est en D α et β coïncident avec ce même point D. Le théorème est donc démontré.

Les deux divisions homographiques a, b, c, ... a_1, b_1, c_1, ... ayant pour points doubles les points d'intersection de la droite M avec la conique K, peuvent s'obtenir en projetant les points de la conique sur la droite M, en prenant comme point de vue deux points quelconques S et S_1 de cette conique. Par conséquent, le théorème précédent peut s'énoncer comme suit : Soit une droite M coupant les côtés BC, CA, AB d'un triangle inscrit à une conique en a, b, c faisons correspondre à ces points trois autres points a_1, b_1, c_1 de la droite M, tels que S et S_1 étant deux points quelconques de la conique, les couples de droites Sa et S_1a_1, Sb et S_1b_1, Sc et S_1c_1 se coupent respectivement en des points de la même conique, il en résulte que les droites Da_1, Db_1, Dc_1 couperont les côtés BC, CA, AB en des points α, β, γ situés sur une même droite ; D étant un point quelconque de la conique.

Dans le cas où la droite M est la droite de fuite et où le point D coïncide avec le point S_1, on obtient le théorème II.

Si nous prenons pour divisions homographiques les divisions en involution, c'est-à-dire si aux points a, b, c, on fait correspondre les points conjugués a_1, b_1, c_1 par rapport à la conique, et si nous prenons pour la droite M la droite de fuite, on obtient le théorème I.

Nous pouvons obtenir maintenant des théorèmes correspondant par dualité aux précédents. Soient une conique et un triangle circonscrit ABC. Soit O un point que nous prenons comme centre de deux faisceaux homographiques ayant pour rayons doubles les tangentes menées de O à cette conique. Soient les trois rayons OA, OB, OC; déterminons leurs correspondants et soient a, b, c les points où ces rayons correspondants coupent une tangente quelconque à la conique ; les droites Aa, Bb, Cc seront concourantes. On peut déduire de ce théorème plusieurs théorèmes particuliers qui correspondent aux précédents par dualité.

Nous citerons seulement le cas particulier où le point O est le centre de la conique et où les faisceaux homographiques sont en involution. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Soit un triangle ABC circonscrit à une conique de centre O. Soient les trois rayons OA, OB, OC, construisons leurs conjugués coupant une tangente quelconque à la conique aux points a, b, c les droites Aa, Bb, Cc seront concourantes.

Si la conique est un cercle, nous obtenons un théorème qui correspond par dualité au théorème de Simson :

Soit un triangle ABC circonscrit à un cercle de centre O. Elevons en O des perpendiculaires aux droites OA, OB, OC respectivement ; soient a. b, c, les intersections de ces perpendiculaires avec une tangente quelconque au cercle, les droites Aa, Bb, Cc sont concourantes. Ce point de concours se nomme pour cette raison le point corrélatif de la droite de Simson.

Ant. Pleskot (Pilsen).