Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR

Autor: Andrade, Jules

Kapitel: CHAPITRE II Les deux mouvements fondamentaux d'un solide et la nouvelle théorie du dièdre.

Autor: Andrade, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10969

Les deux triangles OBO′ et OCO′ seront alors tels que les droites joignant le milieu A de leurs bases à leurs sommets respectifs seront perpendiculaires à cette base ces deux triangles seront donc isocèles et OB = O′B ; OC = O′C.

On conclut de là que les deux triangles OBC, O′BC réunis en talus par leur côté commun BC sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun ; nous concluons de là l'égalité des angles OBC et O′BC, puis ensuite l'égalité des triangles OBD, O′BD comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; d'où nous concluons OD = DO′; si enfin, nous considérons le triangle isocèle ODO′ nous voyons que la droite qui joint le sommet principal D au milieu A de la base est perpendiculaire à cette base.

Définition. Quand une droite OA est perpendiculaire à toutes les droites d'un plan P passant par A on dit que la droite est perpendiculaire au plan ; cette droite est nécessairement hors du plan P. Le point A se nomme la projection de O sur le plan P.

CHAPITRE II

Les deux mouvements fondamentaux d'un solide et la nouvelle théorie du dièdre.

En prenant comme éléments des figures les droites et les trames de droites ou plans et en prenant comme données fondamentales : la droite ou axe de rotation, et l'angle plan superposable sur lui-même par retournement nous avons déjà acquis un premier résultat important ; nous avons obtenu les trois cas d'égalité des triangles et la notion des droites perpendiculaires et celle d'une droite perpendiculaire à un plan, rappelons cette dernière notion.

Etant donnée une droite OX (sans figure), faisons passer par cette droite un premier plan dans lequel nous traçons OA perpendiculaire à OX, faisons passer par OX un second plan dans lequel nous menons OB perpendiculaire à OX, nous avons vu qu'une troisième droite quelconque tirée de O dans le plan P formé par les deux droites OA et OB est perpendiculaire à OX. On a dit alors que la droite OX est perpendiculaire au plan P.

Il existe donc, par un point O de OX, un plan P perpendiculaire à OX, et comme tout plan peut être porté sur un autre plan on voit qu'aussi bien, étant donné un plan Q, on peut par un point O lui mener *une* droite OX perpendiculaire.

Mais il est nécessaire d'aller plus loin, et de nous assurer que par un point O d'un plan Q *on ne peut mener qu'une seule* perpendiculaire à ce plan.

Remarquons d'abord que par un point I situé hors d'un plan il ne peut passer deux droites distinctes IH et IK perpendiculaires à un plan Q.

En effet s'il en passait deux (Fig. 10), le triangle IHK ayant les deux sommets H et K communs avec le plan Q aurait la base HK commune avec lui dans le plan de ce triangle on aurait donc dans un même plan deux droites distinctes, perpendiculaires à une même droite et passant par un même point I, mais alors, comme on l'a vu (propriété des perpendiculaires) le rabattement du plan sur lui-même autour de HK devrait amener le point I en un même point J situé sur les prolongements de HI et de IK, on aurait donc deux droites distinctes passant par I et J ce qui, nous l'avons vu, n'est pas possible (propriétés fondamentales de la droite).

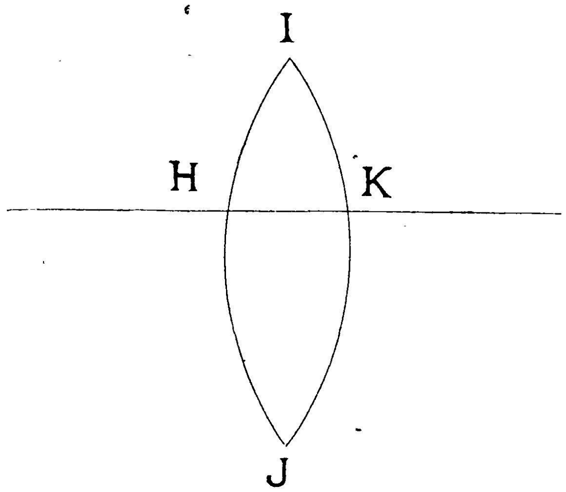

Fig. 10.

Cette remarque va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. — *Il est impossible que par un point O d'un plan Q puissent passer deux droites perpendiculaires à ce plan.*

En effet, soient deux de ces perpendiculaires sur lesquelles (Fig. 11) nous prendrons deux longueurs égales O M=O N, une droite quelconque tirée de O dans le plan Q, soit O S, est perpendiculaire à une troisième droite quelconque dans le plan OMN; d'où on conclut, en faisant varier OS, que cette troisième droite quelconque du plan MON est aussi perpendiculaire au plan Q.

Considérons en particulier le point I milieu du segment MN; OI en particulier, sera perpendiculaire au plan Q.

Joignons SM et SN les deux triangles SOM et SON sont égaux comme ayant un angle égal (comme droit) compris entre 2 côtés égaux chacun à chacun; d'où on conclut que SM=SN, et, par suite, que IS est perpendiculaire à MN au point I (propriété du triangle isocèle).

Mais alors, en joignant un point S du plan au point I (Fig. 12) et prenant sur cette droite un segment de longueur constante IL, l'ensemble des points L ainsi obtenu devrait puisque

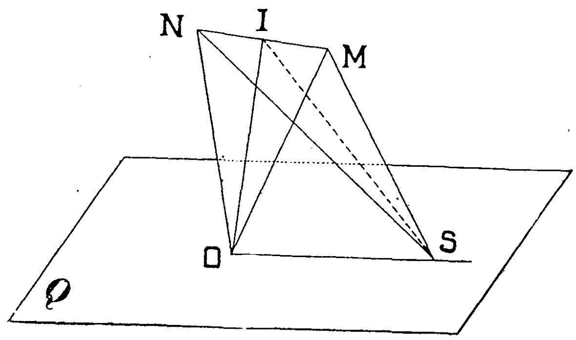

Fig. 11.

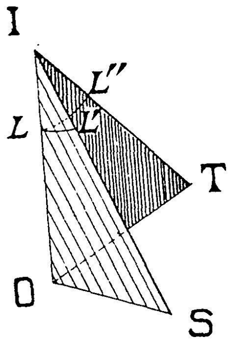

Fig. 12.

e LI est perpendiculaire à NM représenter l'ensemble des positions que peut occuper dans l'espace un point particulier d'un solide qui tourne autour de l'axe MN; or nous avons admis que l'ensemble des points L est une ligne, et que le déplacement de rotation d'un solide est parfaitement déterminé, tandis qu'ici nous voyons que ce déplacement est *complètement indéterminé* puisqu'il peut s'effectuer à partir de la position L dans tous les plans passant par IO.

Remarque additionnelle. La démonstration est achevée, mais pour rendre ceci encore plus net nous pourrons achever de préciser la complète indétermination du mouvement de L; les deux mouvements possibles pour le solide peuvent avoir lieu dans deux sens différents mais pour chacun de ces sens soit L′ une position voisine *postérieure* à la position actuelle du point considéré dans le solide en rotation ; il existe sur la trajectoire de L des points de plus en plus voisins de L, et lorsque la distance LL′ tend vers zéro la position de LL′ tend, on le voit aisément, vers une position limite perpendiculaire à IO, *laquelle ne peut appartenir à tous les plans passant par la droite ILO* comme cela devrait avoir lieu en conséquence de la supposition faite plus haut qu'il existe 2 droites perpendiculaires à un plan. Cette supposition est donc une fois de plus inadmissible.

Conséquence. Nous savons déjà que la situation d'un corps solide peut être complètement définie par la position de l'une de ses trames, par exemple par celle qui se confond actuellement avec l'angle AOB de l'espace ; d'autre part nous venons de voir qu'il n'existe qu'une droite OZ perpendiculaire à l'angle AOB ; si donc on considère une barre rigide et si on l'oblige à rester perpendiculaire à une trame d'un solide, on peut être assuré que la barre sera du même coup invariablement liée au solide tout entier.

Théorème II. *Les diverses droites perpendiculaires à une même droite* OZ *menées par un même point* O *sont dans un seul et même plan.* Soit (Fig. 13) OA une première perpendiculaire à OZ et soient OH et OK deux autres perpendiculaires à OZ, également tirées de O.

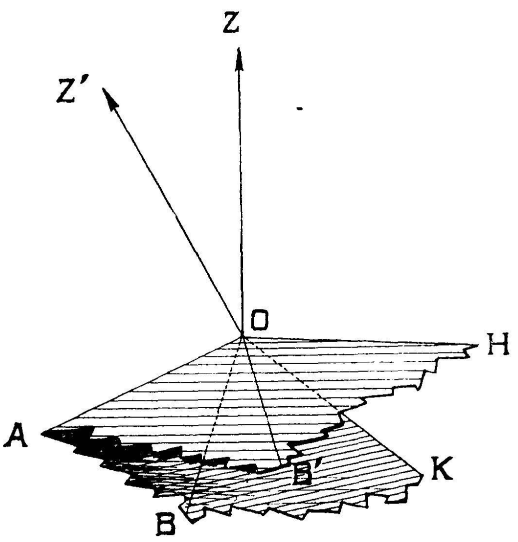

Fig. 13

Admettons provisoirement que les plans AOH et AOK puissent être différents ; alors traçons dans l'un et l'autre plan et à partir de OA comme origine, deux angles égaux AOB et AOB′.

La droite OZ est perpendiculaire à chacune des deux trames égales AOB et AOB′.

Les deux trames AOB et AOB′ étant égales, peuvent être regardées comme deux positions extrêmes d'une même trame d'un solide qui serait entrainée dans le mouvementde ce solide tournant autour de AO.

Regardons OZ comme la première position d'une droite du solide et considérons la positions OZ′ occupée par cette dernière lorsque la trame AOB sera venue se coucher sur AOB′ ; il est clair que OZ′ sera distinct de OZ, sans quoi le solide aurait eu une trame ZOA non déplacée et n'aurait pas subi de déplacement ce qui est faux puisque la trame AOB s'est déplacée.

Or pendant le déplacement, la perpendiculaire à la trame lui reste perpendiculaire ; les droites OZ et OZ′ distinctes seraient donc toutes deux perpendiculaires à la même trame AOB′ ; mais nous avons déjà démontré que celà est impossible.

Donc enfin les plans HOA et KOA ne sauraient être distincts.

Conséquence : Tout plan pouvant être superposé sur un autre plan ou conservant sa perpendiculaire rigide, on voit de suite que par un point d'un plan on peut toujours tirer une droite perpendiculaire à ce plan.

Définitions. La courbe décrite par un point d'un solide tournant autour d'un axe, et qui, nous venons de le démontrer est contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe, s'appelle *une circonférence de cercle ;* OZ ou l'axe de ce cercle coupe le plan du cercle en un point O, appelé centre du cercle.

Dans son plan la circonférence de cercle est définie comme l'ensemble des points du plan qui sont à une même distance d'un point fixe. Le segment OM est un rayon du cercle.

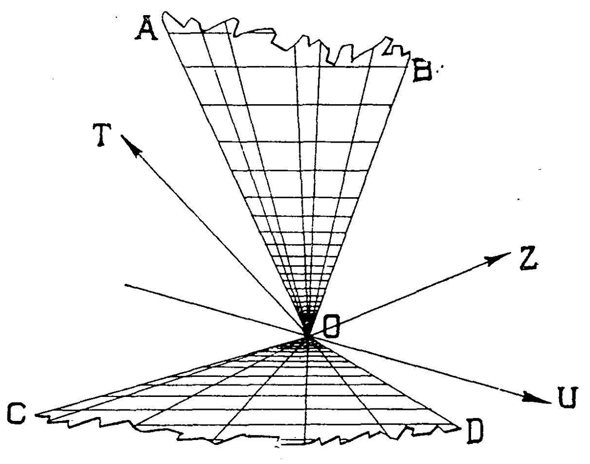

Fig. 14.

Corollaire. Si 2 plans distincts ont déjà un point commun ils ont en commun toute une droite commune passant par ce point, soit O le point commun (Fig. 14);

Menons par O, 1° la droite OZ perpendiculaire au plan AOB;

2° La droite OT perpendiculaire au plan COD;

3° Une droite OU perpendiculaire au plan des deux droites OZ et OT; cette droite OU étant perpendiculaire à OZ appartient au plan AOB, et étant perpendiculaire à OT elle appartient au plan OCD elle est donc commune aux deux plans AOB, COD.

THÉORÈME III. *Pour projeter un point O sur une droite XY d'un plan P il suffit 1° de projeter le point O sur le plan P, en A; 2° de projeter le point A en I sur XY.*

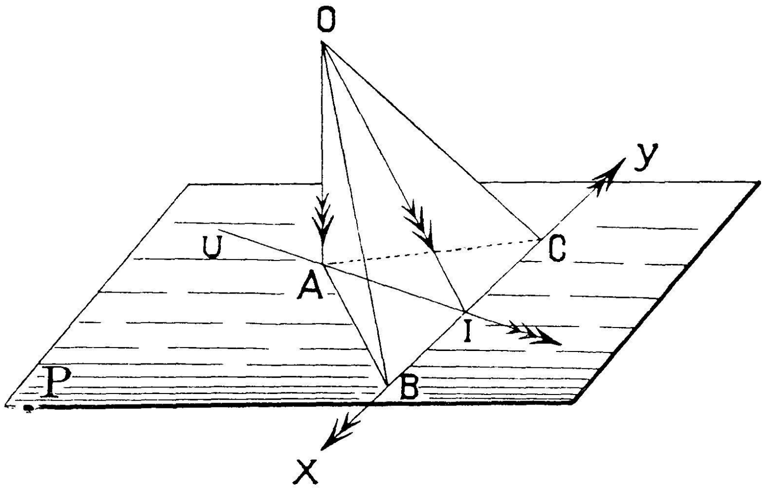

Fig. 15.

Il s'agit de démontrer qu'en joignant I à O la droite obtenue sera perpendiculaire à XY; à cet effet portons sur XY de part et d'autre de I les longueurs égales IB et IC, joignons les points B et C d'abord à A puis à O. On aura d'abord AC = AB, puis par la considération des triangles rectangles égaux OAB et OAC, nous trouvons OB = OC; et enfin, dans le triangle isocèle OBC, la droite qui joint le sommet O au milieu I de la base sera perpendiculaire à cette base.

THÉORÈME RÉCIPROQUE III *bis*. *Si par la projection I d'un point O extérieur à un plan P sur une droite XY du plan on mène, dans ce plan, une droite IU perpendiculaire à XY, la projection A du point O sur IU sera aussi la projection de O sur le plan P* (figure 15).

En effet la projection d'un point sur une droite ou sur un plan étant unique, le tracé précédent pourra être repris en ordre inverse de l'ordre précédent. Une démonstration directe serait d'ailleurs facile.

Corollaire. Tous les plans menés par un même point O perpendiculairement aux différentes droites XY d'un plan passent par une droite fixe OA.

THÉORÈME IV: *Si une droite* OI (Fig. 16) *coupant un plan* P *en* I *n'est pas perpendiculaire à ce plan, les projections de ses différents points sur* P, *c'est-à-dire les pieds des perpendiculaires abaissées de ses différents points sur P, forment une droite du plan* P.

Démonstration. En effet soit H la projection de O, menons HI et IX dans P perpendiculaire à HI; cette droite IX est perpendiculaire à OI; d'après les théorèmes précédents, un point quelconque O′ de OI se projètera dans le plan P sur la perpendiculaire à IX menée par I, c'est-à-dire sur IH en quelque point H′ de I H.

Autre énoncé: si on observe que IX est perpendiculaire au plan OHI on voit par le même raisonnement qu'un point M quelconque intérieur au triangle OHI se projètera encore sur le plan P en quelque point M′ de HI.

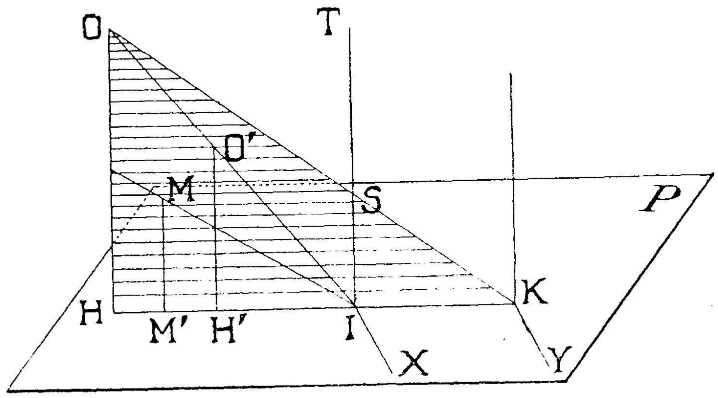

Fig. 16.

Autre conséquence: soit K un point de HI situé sur le prolongement de HI au delà de I; joignons KO, et dans le plan du triangle OKH traçons IT perpendiculaire à HI: cette droite devra, d'après une remarque déjà faite [III, chap. I], couper *le contour* du triangle OHK, mais elle ne peut couper OH qui est comme elle perpendiculaire à HK; donc elle coupera OK en un certain point S.

La droite OK n'étant pas perpendiculaire à HK, la perpendiculaire menée de S au plan P d'après le théorème précédent est contenue dans le plan OHK elle se confond donc avec SI.

Ainsi l'ensemble des projetantes des différents points de OI forme un plan qui contient aussi *une perpendiculaire au plan* P *élevée par I*, nous savons d'ailleurs que c'est la seule qui passe par I.

Définitions. On appelle *angle dièdre* la portion d'un solide comprise entre deux demi-plans réunis par leur frontière rectiligne commune ; cette droite se nomme *l'arête* du dièdre;

Les deux demi-plans se nomment les *faces* du dièdre ; si par un point A (Fig. 17) de l'arête on trace des droites Ax, Ay perpendiculaires à l'arête et dans chacune des faces, on obtient *un angle* xAy *qui est dit : un angle rectiligne* du dièdre.

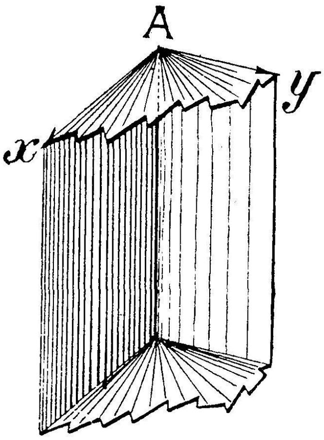

Fig. 17.

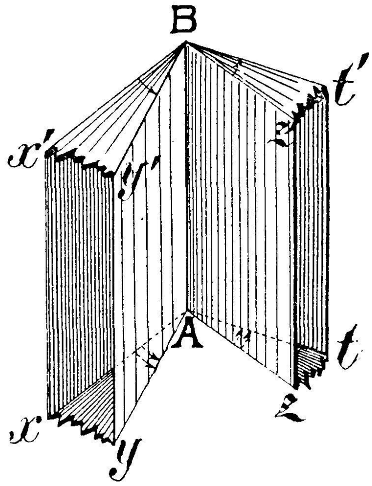

Fig. 18.

Théorème fondamental V. *Tous les angles rectilignes d'un dièdre sont égaux, quel que soit le point de l'arête d'où le rectiligne est tracé.*

Etablissons d'abord que si deux dièdres ont même arête, et que si leurs deux rectilignes d'un même sommet A (Fig. 18) sont égaux; il en sera de même de leurs deux rectilignes d'un autre sommet B en effet si $x\widehat{A}y = z\widehat{A}T$ on peut amener par une rotation autour de AB la trame xAy sur la trame ZAT mais quand ce déplacement a été obtenu les plans BAx, BAy étant venu coïncider respectivement avec les plans BAz, BAI ; les droites Bx', By', viendront respectivement sur BZ' et BT' puisqu'elles sont perpendiculaires sur AB .

On conclut de là que : si l'angle $x\widehat{A}y$ est la moitié, le quart, le huitième etc ; de deux droits, l'angle $x'By'$ sera égal en même temps que le précédent égal à la moitié, au quart, au huitième etc ; de 2 angles droits.

Les angles $x'By'$ et xAy seront donc égaux toutes les fois que le second est une fraction de 2 angles droits dont le dé nominateur est une puissance de 2.

Or, k et n désignant deux nombres entiers convenables, tout angle xAy est toujours compris entre deux angles égaux respectivement aux fractions suivantes de 2 angles droits savoir $\frac{k}{2^n}$ et $\frac{k+1}{2^n}$; or d'après ce qui précède l'angle $x'By'$ sera alors compris entre les mêmes deux angles, qui diffèrent d'aussi peu qu'on le voudra ; il est donc impossible que ces angles xAy et $x'By'$ soient différents.

Remarque. L'égalité des angles xAy et $x'By'$ dans le cas où le premier serait un angle droit résulte d'ailleurs évidemment du théorème sur la projection d'une droite établi tout à l'heure.

Ce théorème fondamental nous conduit à la notion du mouvement de translation d'un solide le long d'une droite donnée qu'il nous reste à définir :

la translation au guidage plan.

THÉORÈME VI. *Si dans le mouvement d'un solide, une droite glisse sur elle-même et si un point du solide qui n'appartient pas à la droite reste dans un plan passant par cette droite, tous les autres points respectifs du solide restent dans des plans passant par la même droite à laquelle on peut donner le nom d'axe central de glissement.*

Ce théorème résulte immédiatement de l'égalité des angles rectilignes d'un même dièdre.

Remarques. Ainsi la droite se présente maintenant à nous soit comme *un axe de rotation*, soit comme *un axe de translation* avec guidage du mouvement du solide par le maintien d'un autre point dans un plan fixe passant par l'axe du glissement, auquel cas tous les points du solide se meuvent dans les plans passant par le même axe de glissement.

On remarquera encore comme conséquence de la théorie du dièdre et de la notion de l'angle de rotation cette proposition.

THÉORÈME VII. *Quand un solide se déplace de manière qu'une trame du solide accomplisse un demi tour autour* *d'une droite de la trame, toutes les trames du solide qui passent par cet axe, accomplissent également un demi tour autour du même axe.*

Remarque. Il est facile de s'assurer que ce dernier fait, pourrait aussi bien que l'existence de l'intersection rectiligne de 2 plans ayant un point commun, servir de fait primitif, et remplacer le fait que nous avons pris comme point de départ savoir : la continuité du mouvement de rotation.

Seconde démonstration :

Le théorème établi plus haut sur la projection d'une droite sur un plan peut évidemment s'énoncer ainsi : *Si un angle dièdre possède un angle rectiligne droit tous ses rectilignes seront aussi égaux à un droit;* dès lors la démonstration que nous avons esquissée pour passer du cas d'un dièdre dont tous les rectilignes valent 2 droits au cas d'un dièdre quelconque pourra se reproduire et nous permettra de passer d'un dièdre dont tous les rectilignes valent un angle droit à un dièdre quelconque.

Si l'on veut enfin une démonstration exempte de toute considération arithmétique nous exposerons la suivante :

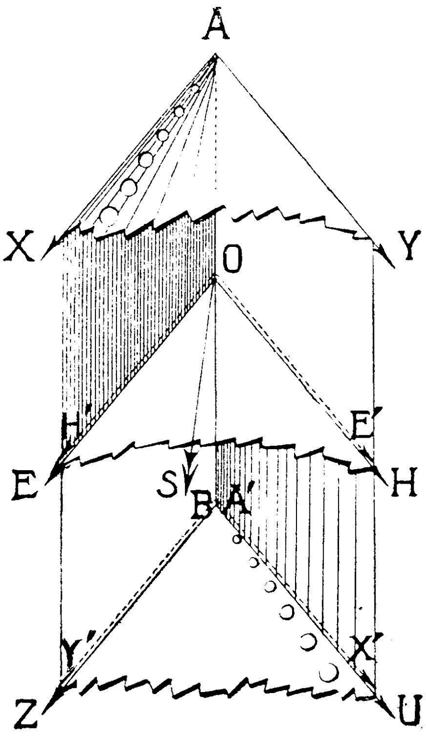

Fig. 19.

Troisième démonstration : (Fig. 19).

Pour démontrer que les deux angles rectilignes X A Y et Z B U sont égaux, nous considérons le milieu O de la droite qui joint les sommets A et B de ces deux angles rectilignes, puis nous traçons l'angle rectiligne du dièdre dont le sommet est en O soit l'angle E O H et nous allons *constater qu'un rabattement du plan E O H exécuté autour de la droite O S, bissectrice*[1] *de l'angle EOH, va faire coïncider l'angle X A Y sur l'angle UBZ envers* de l'angle $\widehat{ZBU}$.

En effet, par ce rabattement O E vient en O E′ recouvrir O H tandis que O H vient en O H′ recouvrir O E; le segment O A perpendiculaire à la trame E O H comme à la trame E′ O H′ devra donc, ou bien se retrouver sur lui-même, soit recouvrir le segment O B; le premier est inadmissible, car la fixité finale de la trame A O S fixerait le solide et par conséquent serait inconciliable avec le rabattement précédent; donc O A recouvre O B; A X vient alors en A′ X′ recouvrir B U, tandis que A Y vient alors en A′ Y′ recouvrir B Z donc enfin l'angle X A Y égal à l'envers de l'angle Z B U est aussi égal à ce dernier.

J. ANDRADE (Besançon).

(A suivre).

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME SUR LA DROITE DE SIMSON

Théorème I. — Soient une conique K de centre O et un triangle inscrit A B C ; a, b, c, les milieux des côtés BC, AC, AB. Joignons Oa, Ob, Oc. Par un point quelconque D de la conique menons des parallèles à Oa, Ob, Oc coupant les côtés du triangle en a_1, b_1, c_1 respectivement : Ces trois points a_1, b_1 c_1 seront en ligne droite (*fig.* 1). Si la conique est un cercle, ce théorème devient le théorème de Simson : *Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle sur les côtés d'un triangle inscrit sont en ligne droite.*

Théorème II. — Par un point quelconque S d'une conique menons des parallèles aux côtés AB, BC. CA du triangle inscrit ABC ; elles donnent sur la conique des points c, a, b. Soit D un point quelconque de la courbe, menons Dc, Da,

---

[1] La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux portions égales.