Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1907)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DÉMONSTRATIONS EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Autor: Lehr, George

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10142

restant dans deux plans homologues, elle est bien une surface réglée. D'autre part tout plan passant par l'axe ox

$$z = my \quad \text{ou} \quad \frac{z}{y} = m = \text{constante}$$

donne comme intersection avec la surface :

$$x^p \cdot A + x^{p-1}(My + N)B + x^{p-2}(My + N)^2 C + \dots + (My + N)^p \cdot I = 0$$

Il en résulte que l'axe est une droite multiple d'ordre n et l'on démontrerait de la même manière que la droite $k_1 y + k_2 z + k_3 = 0$ est une droite multiple d'ordre p.

L. Crelier (Bienne).

SUR LES DÉMONSTRATIONS EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On n'a pas l'habitude, pour démontrer les théorèmes qui appartiennent spécialement à la Géométrie descriptive, de recourir aux moyens fournis par cette dernière.

On s'impose ainsi des considérations inutilement compliquées et on méconnaît le but général de cette science, au moment même de la développer. Les démonstrations suivantes de trois théorèmes, dont deux sont bien connus et le troisième peut-être *nouveau*, montreront l'avantage de faire autrement. Cette manière de procéder placerait la Géométrie descriptive à doubles projections naturellement avant la méthode des plans cotés, contrairement à ce que suppose le programme officiel des lycées de France.

Théorème I. — *Pour que deux droites* AB, CD, *soient perpendiculaires, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de leurs* *projections sur un plan* P *parallèle à la direction de l'une* AB *et non perpendiculaire à l'autre* CD.

Pour le démontrer je prendrai P pour plan horizontal de projections et $a\,b$ pour ligne de terre. AB sera une horizontale, par conséquent parallèle à la direction de $a\,b$ ou de la ligne de terre XX.

1° La condition est *nécessaire:* CD étant perpendiculaire à AB l'est à XX et est donc soit de bout soit de profil. Dans les deux cas $c\,d$ est perpendiculaire à XX ou $a\,b$.

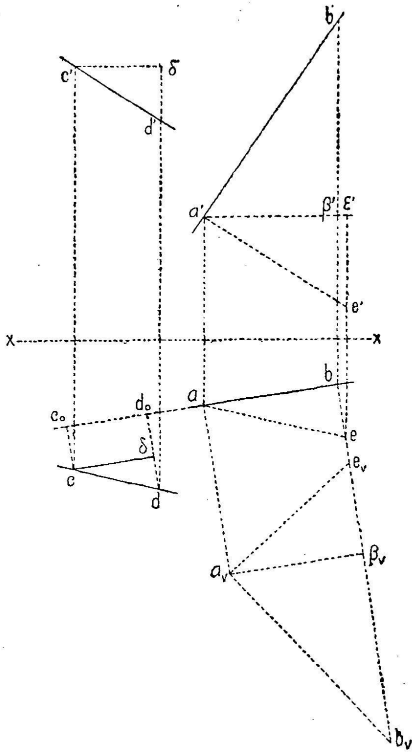
2° Elle est *suffisante: $c\,d$* étant perpendiculaire à $a\,b$ ou XX, CD est soit de bout soit de profil, par conséquent perpendiculaire à XX et à sa parallèle AB.

Théorème II. — *Pour que les projections de deux droites perpendiculaires* AB, CD, *soient deux droites perpendiculaires il faut et il suffit que le plan de projection* P *soit parallèle à la direction de l'une des droites sans être perpendiculaire à l'autre.*

Ici la condition suffisante revient à la condition nécessaire du théorème précédent. Pour démontrer la nécessité je prends encore P pour plan horizontal de projections et $a\,b$ par exemple pour ligne de terre XX. Par hypothèse $c\,d$ est perpendiculaire à $a\,b$ ou XX, donc CD est soit de bout soit de profil. Dans le premier cas elle est parallèle à la direction du plan horizontal P. Dans le second cas, comme AB est frontale et que CD lui est perpendiculaire, $a'b'$ sera perpendiculaire à $c'd'$ et par conséquent parallèle à la direction de XX; AB est donc horizontale ou parallèle à la direction de P.

Théorème III. — *Pour que deux droites* AB *et* CD, *non parallèles aux directions des plans de projections, soient perpendiculaires, il faut et il suffit que les cotes réduites de leurs secondes extrémités* B *et* D, *par rapport respectivement à leurs premières extrémités* A *et* C, *soient inversément et négativement proportionnelles aux segments $a\;b$, $c_0\,d_0$, obtenus en projetant orthogonalement les projections horizontales $a\,b$, $c\,d$ des deux droites sur l'une quelconque d'entre elles et choisissant les origines a et c_0 d'après les premières extrémités* A et C.

$$\overline{\beta' b'} \,.\, \overline{\delta' d'} = -\,\overline{ab} \,.\, \overline{c_0 d_0}\,. \tag{1}$$



Le théorème reste vrai si l'on remplace les cotes par les ordonnées et les projections horizontales par les projections verticales.

Pour le démontrer je mène par A la parallèle AE à CD et j'emploie un second plan vertical de projections parallèles à AB. On remarque que ae et $a'e'$ sont parallèles respectivement à cd et à $c'd'$. Les secondes projections verticales de AB et AE sont $a_v b_v$, $a_v e_v$ telles que

$$\overline{\beta_v b_v} = \overline{\beta' b'} \text{ et } \overline{\beta_v e_v} = \overline{\varepsilon' e'} \ .$$

Le parallélisme de AE et CD, celui des côtés dans les triangles $\alpha' e' \varepsilon'$ et $c'd'\delta'$ ainsi que dans les triangles aeb et $cd\delta$ où $c\delta$ est parallèle à ab, donne

$$\frac{\overline{ae}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{a'e'}}{\overline{c'd'}}$$

$$\frac{\overline{a'e'}}{\overline{c'd'}} = \frac{\overline{\varepsilon'e'}}{\overline{\delta'd'}}$$

$$\frac{\overline{ae}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{c\delta}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{c_0 d_0}} \ , \quad \text{donc}$$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{c_0 d_0}} = \frac{\overline{\varepsilon'e'}}{\overline{\delta'd'}} \ . \tag{2}$$

1° La condition est nécessaire: De ce que CD et par conséquent AE sont perpendiculaires à AB, il résulte d'abord que $a_v e_v$ l'est à $a_v b_v$ et ensuite qu'il a été possible de choisir e sur la seconde ligne de rappel bb_v; cette dernière particularité ne serait irréalisable que si ae était perpendiculaire à ab, ce qui est contraire à notre hypothèse, puisque l'une des deux droites AB, AE ou AB, CD serait horizontale. Le triangle $a_v b_v e_v$, rectangle en a_v, donne

$$\overline{a_v\beta_v}^2 = - \overline{\beta_v b_v} \times \overline{\beta_v e_v} \ , \quad \text{d'où} \quad \overline{ab} \times \overline{ab} = - \overline{\beta'b'} \times \overline{\varepsilon'e'} \tag{3, 4}$$

Cette relation est homogène par rapport au second facteur ab et au facteur $\varepsilon' e'$, on peut donc remplacer ces segments par les grandeurs dont (2) constate la proportionnalité. On trouve ainsi

$$(5) \qquad \overline{ab} \times \overline{c_o d_o} = - \overline{\beta' b'} \times \overline{\delta' d'} \text{ , ce qui est (1).}$$

2° La condition est suffisante: La relation (1) est vraie par hypothèse. Donc d'abord on peut choisir e comme précédemment: en effet, le premier membre de (1) est significatif donc $c_o d_o \gtrless o$ et par suite cd n'est pas perpendiculaire à ab. Ensuite (5), qui est une forme de (1) devient (4) par la substitution inverse de la précédente, et par conséquent (3). Celle-ci prouve que $\widehat{b_v a_v e_v}$ est droit, donc $a_v e_v$ est perpendiculaire à $a_v b_v$, donc AE ou CD l'est à AB.

Corollaire. — La condition de perpendicularité de deux droites AB, CD, se simplifie si l'on choisit les extrémités de celle CD, qui ne fournit pas l'axe de projections ab, de manière que la projection orthogonale correspondante $\overline{c_o d_o}$ soit égale à la cote réduite $\overline{\beta' b'}$ relative à l'autre droite: il faut alors et il suffit que la seconde cote réduite $\delta' d'$ ne diffère que par le signe de la valeur de la projection horizontale ab de cette autre droite.

George Lehr (Montauban).