Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1907)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉNÉRATION DES COURBES ET DES SURFACES SUPÉRIEURES
Autor: Crelier, L.
Kapitel: I
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10141

GÉNÉRATION DES COURBES ET DES SURFACES SUPÉRIEURES

(NOTES DE GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE [1].)

I

Courbes du $(n+p)^e$ degré.

Nous appellerons *groupe du* $(n+p)^e$ *degré* deux faisceaux de rayons tels que tout rayon du premier correspond à p rayons du deuxième et tels encore que chaque rayon de celui-ci correspond à n du premier.

THÉORÈME. *Le lieu des points de coupe des rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe du* $(n+p)^e$ *degré est une courbe du* $(n+p)^e$ *degré. Le sommet du premier faisceau est un point multiple d'ordre* n *et celui de l'autre un point multiple d'ordre* p.

Courbes de la $(n+p)^e$ classe.

Un groupe de la $(n+p)^e$ *classe* est formé de deux ponctuelles dans lesquelles chaque point de l'une correspond à p de l'autre et chaque point de celle-ci à n de la première.

THÉORÈME. *L'enveloppe des droites joignant les points homologues de deux ponctuelles appartenant à un groupe de la* $(n+p)^e$ *classe est une courbe de la* $(n+p)^e$ *classe. La première base est une tangente multiple d'ordre* n *et l'autre, une d'ordre* p.

En désignant par α et β les coefficients angulaires de deux rayons homologues ou les abscisses de deux points homologues, ces valeurs α et β seront, en se basant sur les définitions précédentes, liées par l'équation :

$$\beta^p F_1^{(n)}(\alpha) + \beta^{p-1} F_2^{(n)}(\alpha) + \ldots + \beta F_p^{(n)}(\alpha) + F_{p+1}^{(n)}(\alpha) = 0 \qquad (1)$$

dans laquelle on a :

$$F_1^{(n)}(\alpha) = A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \ldots + L\alpha + P .$$

---

[1] Voir L. CRELIER : *C. R.*, 11 juin et 2 juillet 1906 ; et l'« Enseign. mathématique », 15 novembre 1906.

En prenant S_n, sommet du premier faisceau comme origine et S_p, sommet de l'autre sur l'axe des x avec une abscisse égale à k nous aurons pour les équations de deux rayons homologues :

$$y = \alpha x$$
$$y = \beta (x - k) .$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{y}{x-k} .$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation générale (1) et en posant :

$$Ay^n + By^{n-1} . x + \dots + Lyx^{n-1} + P^n x = F^{(n)}(xy)$$

nous aurons :

$$y^p F_1^{(n)}(xy) + y^{p-1}(x - k) F_2^{(n)}(xy) + \dots + y (x - k)^{p-1} F_p^{(n)}(xy) + (x - k)^p F_p^{(n)}(xy) = 0 .$$

Cette équation représente le lieu des points cherché. Elle est du $(n + p)^e$ degré et le terme inférieur du degré n. D'autre part $x = k$ entraîne

$$y^p F_1(xy) = 0$$

ou aussi

$$y^p = 0 .$$

Dans ces conditions la courbe est du $(n + p)^e$ degré. L'origine S_n est un point multiple d'ordre n et le point (k, o) est aussi un point multiple d'ordre p.

Nous prendrons les ponctuelles comme axes et nous utiliserons les coordonnées linéaires. Toute droite joignant deux points homologues sera définie par les équations :

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{\beta} .$$

On a donc :

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\nu} .$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation générale on obtient évidemment l'équation de l'enveloppe cherchée ; soit :

$$\frac{1}{\nu^p} F_1^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \dots + \frac{1}{\nu} F_p^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) + F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0 .$$

On en déduit de suite :

$$\nu^p F_{p+1}^{(n)}(\mu) + \nu^{p-1} F_p^{(n)}(\mu) + \dots + F_1^{(n)}(\mu) = 0 .$$

L'équation est bien de la $(p + n)^e$ classe.

La valeur $\nu = \infty$ entraîne

$$F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0 ;$$

en conséquence, la première base est une tangente multiple d'ordre n. D'un autre côté $\mu = \infty$ nous donne :

$$P_1 \frac{1}{\nu^p} + P_2 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \dots + P_p \frac{1}{\nu} + P_{p+1} = 0$$

CoROLLAIRE. *Quand les faisceaux ont deux rayons homologues confondus, la courbe se ramène à une courbe du* (n + p — 1)^e *degré. Le sommet du premier faisceau est un point multiple d'ordre* (n — 1) *et l'autre un d'ordre* (p — 1). *La droite formée par les rayons homologues s'est détachée de la courbe.*

La ligne des sommets est confondue avec les rayons homologues dont il est question. En la prenant comme axe des x, la solution $\alpha = 0$ entraînera $\beta = 0$.

Cette condition donne

$$P_{p+1} = 0 .$$

L'équation de la courbe devient :

$$y^p F_1^{(n)}(xy) + y^{p-1}(x-k)F_2^{(n)}(xy) + \dots + (x-k)^p y F_{p+1}^{(n-1)}(xy) = 0 .$$

A cause du dernier terme on trouve

$$y = 0 \quad \text{et}$$

$$y^{p-1} F_1^{(n)}(xy) + \dots + (x-k)^p F_{p+1}^{(n-1)}(xy) = 0 .$$

Celle-ci montre suffisamment que le degré de la courbe est $(n+p-1)$, puis que les points (o,o) et (k,o) sont des points

ou

$$\varphi^p\left(\frac{1}{\nu}\right) = 0 .$$

La deuxième base est une tangente multiple d'ordre p.

CoROLLAIRE. *Quand les deux divisions ont un point homologue commun la courbe est de la* (n + p — 1)^e *classe. La première base est tangente multiple d'ordre* (n — 1) *et l'autre d'ordre* (p — 1).

Le point commun est pris comme origine et la solution $\alpha = 0$ donne $\beta = 0$.

Ceci entraîne par conséquent:

$$P_{p+1} = 0 .$$

L'équation du lieu devient

$$\frac{1}{\nu^p} F_1^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \dots + \frac{1}{\mu} F_{p+1}^{(n-1)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0$$

ou

$$\nu^p F_{p+1}^{(n-1)}(\mu) + \dots + F_1^{(n)}(\mu) = 0 .$$

La classe de la courbe est $(n+p-1)$.

$$\nu = \infty \text{ donne } \frac{1}{\mu} F_{p+1}^{(n-1)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0 .$$

On a donc $(n-1)$ solutions en $\frac{1}{\mu}$ différentes de $\mu = \infty$; la première base est tangente multiples d'ordre, le premier $(n-1)$ et l'autre $(p-1)$.

multiple d'ordre $(n-1)$; $\mu = \infty$ donne :

$$P_1 \frac{1}{\nu^p} + P_2 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \ldots + P_p \frac{1}{\nu} = 0$$

ou

$$\frac{1}{\nu}\left(P_1 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \ldots + P_{p-1}\right) = 0 .$$

Il y a $(p-1)$ solutions en $\frac{1}{\nu}$ différentes de $\nu = \infty$; la deuxième base est tangente multiple d'ordre $(p-1)$. Comme $\mu = \infty$ donne également $\nu = \infty$, toute droite passant par l'origine serait une tangente et *l'origine devient un point isolé détaché de la courbe.*

Construction des courbes.

En coupant le faisceau S_n par un rayon issu de S_p puis S_p par un des rayons homologues du précédent issu de S_n, on obtient deux ponctuelles formant un groupe du $(n+p)^e$ ordre régi par le cas spécial.

En d'autres termes, la courbe du $(n+p)^e$ degré correspondant à deux faisceaux du $(n+p)^e$ degré également se déduira d'une courbe de la $(n+p-1)^e$ classe dépendant de deux ponctuelles ayant un point homologue commun.

Le choix des ponctuelles étant arbitraire, il y a une infinité de courbes analogues de la $(n+p-1)^e$ classe qui peuvent servir pour la construction de la courbe principale.

Etant donné un groupe de la $(n+p)^e$ classe formé par deux ponctuelles, nous pouvons former deux faisceaux ayant un rayon homologue commun et formant un groupe du $(n+p)^e$ degré régi par le cas spécial. Il suffit pour cela de joindre un point d'une ponctuelle avec tous ceux de l'autre puis un des points homologues de celle-ci avec tous ceux de la première. La courbe primitive de la $(n+p)^e$ classe dépend ainsi d'une courbe du $(n+p-1)^e$ degré. Le choix des sommets des faisceaux secondaires étant arbitraire, la courbe auxiliaire peut avoir une infinité de positions.

Quand on veut déterminer de nouvelles tangentes de la courbe

Pour obtenir les points de la courbe du $(n+p)^e$ degré engendrée par les deux faisceaux primitifs on peut remarquer que les tangentes à la courbe auxiliaire menées par un point quelconque d'une des ponctuelles considérées, donnent les points homologues sur l'autre. En outre, si l'on joint les points homologues des ponctuelles avec les sommets respectifs on obtient des rayons homologues des deux faisceaux. Les points de coupe des rayons homologues sont les points cherchés.

principale, on mène un rayon d'un des faisceaux secondaires, puis on joint ses points de coupe avec la courbe auxiliaire, avec le sommet du deuxième faisceau. Les divers rayons ainsi obtenus donnent des points homologues sur les deux bases, et les lignes de jonction de ces points homologues sont des tangentes nouvelles de la courbe primitive.

Dans un mémoire précédent (*L'Ens. math.* l. c.) nous avons montré que pour les courbes du $(n+1)^e$ degré ou de la $(n+1)^e$ classe, les courbes auxiliaires se ramenaient successivement par degré et par classe jusqu'à des coniques.

Remarque : Pour construire deux faisceaux ou deux divisions formant un groupe du $(n+p)^e$ ordre il faut

$$(n+1)(p+1) - 1 = np + p + n \text{ coefficients}$$

dans l'équation fondamentale (1), autrement dit, une courbe du $(n+p)^e$ degré ou de la $(n+p)^e$ classe dépendant d'un tel groupe peut être construite dès qu'on connaît $np+p+n$ paires d'éléments homologues.

Courbes du 4^e degré avec deux points doubles.

Ces courbes proviennent de deux faisceaux tels qu'à chaque rayon du premier en correspondent deux du deuxième et inversement. Il faut huit paires de rayons homologues pour les déterminer.

La courbe auxiliaire qui permet de les construire est une courbe de la troisième classe, courbe générale déterminée par un ensemble de neuf tangentes.

Courbes de la 4^e classe avec deux tangentes doubles.

Ces courbes proviennent de deux ponctuelles telles qu'à chaque point de l'une correspondent deux points de l'autre et inversement.

Elles demandent huit paires de points homologues pour être construites.

La courbe auxiliaire à laquelle on peut les rattacher est une courbe générale du troisième degré donnée par neuf points.

Nouvelle construction des courbes du 3^e^ degré par neuf points. La courbe est engendrée par un groupe du $(2 + 2)^e$ degré avec un rayon homologue commun aux deux faisceaux.

Au point de vue constructif, nous admettrons la courbe comme provenant d'un faisceau de coniques, homographique avec un faisceau de rayons.

Le faisceau de coniques est déterminé par quatre points; chacune d'elles passera par un autre des points connus. Considérons une nouvelle conique déterminée par les cinq derniers points. Un point quelconque de celle-ci donne une involution de rayons avec le faisceau de rayons fondamental.

D'autre part les tangentes des coniques du premier faisceau prises par l'un quelconque des quatre points constituent un faisceau de rayons homographique avec l'involution.

Comme on possède cinq paires d'éléments homologues de ces deux derniers faisceaux, on peut construire la cubique à point double correspondante et en déduire le faisceau simple puis la cubique cherchée.

Nouvelle construction des courbes de 3^e^ classe par neuf tangentes. On peut considérer cette courbe comme provenant d'un groupe de la $(2 + 2)^e$ classe avec un point homologue commun aux deux bases. Constructivement nous formerons avec les éléments connus, un faisceau de courbes de deuxième classe et une division de points simples qui lui est homographique.

Nous prendrons quatre tangentes pour déterminer le faisceau de coniques, chacune d'elles s'appuiera sur une autre des tangentes. Nous considérerons en outre une nouvelle conique déterminée par les cinq dernières tangentes. Une quelconque de ces tangentes coupera les paires de tangentes à cette dernière conique issues des points de la division fondamentale, suivant une involution. D'un autre côté les points de tangence des coniques du premier faisceau avec une des tangentes fondamentales formeront une division de points homographique avec l'involution précédente.

Comme on a cinq paires de points homologues de ce groupe nouveau, on peut d'après ce qui précède construire la courbe de troisième classe à tangente double correspondante et en déduire la base de la division simple puis la courbe générale cherchée.

En appliquant le raisonnement général à ces nouvelles courbes, considérées comme courbes auxiliaires dans des groupes du $(2 + 2)^e$ ordre, on obtiendra sans difficulté les courbes relatives à ces groupes.