**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 9 (1907)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES TROIS CONCEPTS GÉOMÉTRIQUES

**Autor:** Combebiac, G.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-10140

# LES TROIS CONCEPTS GÉOMÉTRIQUES

En remontant le cours des définitions logiques, on parvient nécessairement à des concepts *indéfinissables logiquement.* On peut les appeler *empiriques* en raison de ce qu'ils ne sauraient prendre naissance sans données fournies par l'expérience. Ce sont les concepts de cette sorte qu'il s'agit de spécifier pour la Géométrie.

Le point Géométrique. — La notion de *point matériel* est le *substratum* des conceptions géométriques ; un point matériel possède, à tout instant, une *qualité locale,* sa position ; les points géométriques sont, en définitive, les positions ponctuelles et, par suite, sont définis comme qualités des points matériels. La notion de point matériel joue donc, dans les conceptions géométriques, le même rôle latent que la notion d'ensemble dans la génération des concepts numériques, les nombres cardinaux (ou *puissances*) se définissant en effet comme qualités afférentes aux ensembles; l'idée de position, ou qualité locale, est subordonnée à celle de matière comme l'idée de nombre à celle d'ensemble.

L'ensemble des points géométriques est l'*espace ;* c'est la seule signification précise qui convienne à ce terme. On attribue à l'espace la puissance du continu et il n'a pas d'autres propriétés intrinsèques que celles qui appartiennent à tous les ensembles ayant cette puissance, de sorte que *la Géométrie n'est qu'une application de la théorie des ensembles ayant la puissance du continu.*

Les propriétés de ces ensembles ne trouvent évidemment leur application dans la Géométrie qu'autant qu'elles correspondent à des concepts réellement géométriques. Mais leur existence n'en est pas moins indépendante de toute considération géométrique.

On sait que tout ensemble M ayant la puissance du continu est susceptible d'être *appliqué*, et d'une infinité de manières, sur le continu numérique, sur la variété numérique à deux dimensions, etc. Ces représentations numériques donnent lieu à des notions plus générales qu'elles-mêmes, qu'il est nécessaire de dégager des concepts numériques. C'est ainsi qu'en ce qui concerne les représentations numériques simples, un même *ordre* est défini par toutes celles qui sont susceptibles d'être déduites de l'une d'entre elles au moyen de relations de la forme :

$$x' = f(x),$$

où $f(x)$ désigne une fonction uniforme, continue et toujours croissante de $x$. On sait d'ailleurs que l'idée d'ordre peut se définir en dehors de toute considération numérique.

Pour élucider complètement la question géométrique, il est nécessaire de réaliser une généralisation de l'idée d'ordre, suivant l'indication donnée d'ailleurs par G. Cantor; il suffit, pour cela, de considérer, outre les ordres simples, des ordres complexes, ceux-ci étant déterminés par les représentations numériques à plusieurs dimensions comme les premiers par les représentations numériques simples et un même ordre complexe correspondant, par suite, à une infinité de représentations numériques ou, ce qui revient au même, de systèmes coordonnés. On obtient ainsi la notion d'ordres continus à deux, trois, etc. dimensions. En définitive, ce qu'ont de commun toutes les représentations numériques afférentes à un même ordre continu, simple ou complexe, se réduit presque à une notion de continuité. Il est à signaler qu'un ordre complexe donne lieu à la notion de certains ensembles simplement ordonnés, qui suffisent à le caractériser et qui seront appelés ses *caractéristiques*.

Enfin les ordres se divisent, comme l'on sait, en catégories ou *types* d'après leurs particularités logiques. Il importe de signaler que les caractères des divers types d'ordre sont définissables logiquement (même sans l'intervention des concepts numériques), mais qu'un ordre déterminé ne saurait être défini sans données empiriques.

La continuité Géométrique. — Un point matériel possédant, à tout instant, une position, l'ensemble des positions qu'il occupe pendant un intervalle de temps se trouve ordonné suivant le même type d'ordre que cet intervalle de temps lui-même considéré comme ensemble d'instants, c'est-à-dire dans un ordre continu (simple). Mais la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que tout ensemble de points ordonné dans un ordre simple continu ne constitue pas une trajectoire possible pour les points matériels. Les seuls, parmi ces ensembles, qui jouissent de cette propriété sont les *lignes*, et l'on se trouve ainsi en présence d'un nouveau concept empirique.

Ce concept peut recevoir la désignation générale de *continuité géométrique*, en appelant *géométriquement continu* tout ensemble de points tels que deux quelconques d'entre eux soient susceptibles d'être réunis par une ligne formée de points appartenant tous à l'ensemble. On reconnaît facilement que le concept empirique de continuité géométrique définit, pour l'espace, un ordre complexe de la nature de ceux dont la possibilité a été signalée pour les ensembles ayant la puissance du continu ; les lignes sont les caractéristiques de cet ordre.

L'axiome de l'*Analysis sitûs*, c'est-à-dire de la partie de la Géométrie qui a pour objet l'étude de la continuité géométrique, doit simplement classer l'*ordre géométrique*, c'est-à-dire indiquer le type auquel il appartient. Ce type n'est autre, comme l'on sait, que celui qui est caractérisé par la variété numérique à trois dimensions, de sorte que, rationnellement, l'*Analysis sitûs* n'est qu'une application de la théorie de ce type d'ordre.

Les idées de localisation et d'ordre géométrique fournissent un nouvel exemple de la distinction à observer entre la notion d'un ensemble déterminé et celle d'un ordre qui lui est afférent. L'analogie est complète avec la dissociation actuellement réalisée des notions de nombre cardinal et de nombre ordinal. Dans les deux cas, de nouvelles données empiriques interviennent pour définir l'ordre ; pour l'ordre géométrique, elles résident dans la propriété de la matière de ne se déplacer qu'en observant certaines conditions et, quant à la grandeur relative des nombres cardinaux, elle se définit en faisant appel à la notion de « partie d'un ensemble », qui n'est nullement impliquée dans celle de nombre cardinal.

L'ordre géométrique a donc une existence objective, et il en est, par suite, de même de ses propriétés, notamment du nombre de ses dimensions. L'axiome de l'*Analysis sitûs,* exprime, en définitive, des qualités d'un concept empirique, savoir de l'ordre complexe dont les lignes sont les caractéristiques.

Comme la théorie de l'ordre, la théorie de la *mesure* doit, rationnellement, être établie en toute généralité et en dehors de toute considération de réalisation physique.

La notion de *grandeur continue* (le temps ou la température, par exemple) se réduit évidemment à celle d'ensemble ordonné dans un ordre continu. Elle est donc susceptible de la même généralisation que celle-ci, et rien n'empêche, dans cet ordre d'idées, de parler de grandeurs continues à deux, trois, etc. dimensions. On peut étendre à ce domaine l'idée de mesure, et il est facile de reconnaître que, dans tous les cas, un système de mesure se caractérise par une fonction numérique de deux éléments définie à un facteur numérique près à déterminer par le choix d'une unité. Dans tous les cas également, les fonctions caractéristiques des systèmes de mesure doivent satisfaire à certaines conditions, qui ne peuvent trouver place dans cette esquisse.

Les systèmes de mesure, ou *métriques,* se répartissent, d'après leurs propriétés (correspondant à celles de leurs fonctions caractéristiques), en catégories, dont l'existence est évidemment toute logique. Mais, conformément à ce qui a lieu pour les ordres, une métrique déterminée (ou sa fonction caractéristique) ne peut être définie sans l'intervention de nouveaux éléments empiriques.

LA MESURE GÉOMÉTRIQUE. — On sait que le concept fondamental de la Géométrie métrique réside dans la notion de figure invariable, à laquelle on peut substituer celle de déplacement sans déformation ou encore celle de distance, deux quelconques de ces trois notions se définissant très simplement en fonction de la troisième. A ces notions se rattachent, par des liens purement logiques, celles d'égalité géométrique, de ligne droite, de longueur, d'angle, d'aire, etc., toutes notions servant à édifier la Géométrie traditionnelle ou euclidienne. Celle-ci constitue, en définitive, la théorie d'un système de mesure, d'une métrique, dont la fonction caractéristique est la distance.

A ne considérer que l'enchaînement logique de ses propositions, cette doctrine n'est évidemment pas spéciale au système de mesure ainsi défini empiriquement et doit s'appliquer à toutes les métriques appartenant à une certaine catégorie, caractérisée par des propriétés purement logiques ; cette catégorie est constituée par les métriques dites *paraboliques* et *archimédiennes*. La doctrine euclidienne, ainsi interprétée, est applicable à la mesure géométrique en vertu d'un classement de celle-ci. On voit combien il est radicalement absurde d'appliquer le qualificatif « euclidien » au substantif « espace » ; ce qui est euclidien, c'est la mesure géométrique.

La notion de la mesure géométrique a manifestement son origine dans l'observation imparfaite des corps sensiblement indéformables ; mais une grande part de son individualité est due au rôle important qu'elle joue dans le domaine concret.

Elle a d'abord, comme tout système de mesure, un rôle de représentation. La qualité locale de la matière a, comme on l'a vu, une existence propre, indépendamment des autres concepts géométriques. Sa représentation numérique peut être conçue de bien des manières différentes, même en se bornant aux systèmes de coordonnées qui observent la continuité géométrique. Mais la définition d'un tel système de *topographie* (au sens étymologique) nécessite toujours l'intervention de données empiriques ; elle comporte en effet un système de repères et des instruments d'opération, qu'il faut bien trouver dans la nature. C'est pour cela qu'on est nécessairement conduit à recourir à l'emploi des notions métriques, notamment de la distance et de l'angle.

Mais le rôle principal des notions métriques est celui qu'elles jouent dans les lois physiques. On peut dire en effet, d'une manière générale, que la *qualité locale de la matière n'est reliée à ses autres qualités physiques que par l'intermédiaire des notions métriques.* Il suffit de citer les lois sur l'élasticité, la chaleur, l'électro-magnétisme, la gravité, etc. On pourrait objecter, il est vrai, que les notions physiques reçoivent peut-être, dans leur définition même, l'empreinte métrique, de sorte que la Physique ne serait que l'étude de certaines propriétés des corps par rapport aux notions métriques. Mais si cette observation pourrait être admissible en ce qui concerne les systèmes de mesure des grandeurs physiques, elle ne paraît pas applicable à certaines relations d'équivalence, telles que l'équilibre de température et l'égalité de pression entre deux corps.

Il paraît donc impossible d'éliminer les notions métriques (et, à plus forte raison, l'idée de la continuité géométrique qu'elles impliquent) des lois physiques où elles figurent, et elles reçoivent de ce fait une objectivité nouvelle.

La nature et le rôle de la Géométrie. — La question de la nature logique de la Géométrie ne pouvait être pleinement élucidée avant les travaux de G. Cantor sur les ensembles et de S. Lie sur les groupes continus de transformation, parce que ce sont ces travaux qui ont permis de spécifier les catégories logiques auxquelles appartiennent les concepts géométriques.

Il importe de distinguer : d'une part, des notions logiquement définies (ensembles ayant la puissance du continu, ordres simples ou complexes, métriques) ; d'autre part, des concepts d'origine empirique (espace, c'est-à-dire ensemble des points géométriques, ordre géométrique, mesure géométrique). Les catégories logiques doivent faire l'objet de doctrines fondées sur leurs définitions et édifiées, par conséquent, avec toute la généralité qu'elles comportent. Quant aux concepts empiriques, ils sont à classer, au moyen d'axiomes, dans les catégories logiques, et ne doivent pas, rationnellement, donner lieu à des doctrines spéciales ; mais, même considérés comme idéaux, ils sont parfaitement déterminés et il en est, par suite, de même de leurs propriétés initiales, telles qu'elles sont révélées par l'observation mentale, c'est-à-dire par l'*intuition.*

C'est dans ses concepts empiriques que réside le véritable intérêt de la Géométrie et son unique raison d'être. Son individualité est donc indépendante de son appareil logique et, par suite, la terminologie qui lui est propre ne saurait être reportée, sans abus de langage et sans équivoque, dans les théories générales dont la Géométrie n'est qu'une application. Ces théories sont d'ailleurs elles-même un objet parfaitement défini, bien que non géométrique, et elles n'ont rien à gagner à affecter la forme de ces jeux logiques où se combinent artificiellement des mots qui, selon la formule chère à certains néo-logiciens, ne doivent avoir aucune signification, comme si l'idéal mathématique consistait dans l'automatisme.

En ce qui concerne le rôle scientifique de la Géométrie, on a répété à satiété, sans que la moindre démonstration ait d'ailleurs jamais été tentée, que la Géométrie constitue, vis-à-vis de la réalité, un système de coordination, de représentation ou d'analyse et on en a finalement situé l'origine et la nature dans la physiologie humaine ; c'est ainsi qu'on en est venu à affirmer sérieusement que les trois dimensions de l'espace sont dues à l'existence, chez les vertébrés, de trois directions « cardinales ». On devrait alors rechercher dans la seule conformation de l'oreille les raisons de la diversité des sons et voir, dans les théories de l'acoustique, de la chaleur, de l'optique et de l'électro-magnétisme, des systèmes artificiels ne dépendant que de la nature des sens humains. L'unité de la Physique se réaliserait ainsi dans la Physiologie.

Il ne manque à ces conceptions, ou plutôt à ces formules, que d'avoir une signification ; on serait curieux, par exemple, de voir définir les choses à représenter ou à coordonner et celles qui doivent servir à représenter les premières. Contraires au bon sens, susceptibles de faire illusion, comme toutes les théories philosophiques, en raison du soin avec lequel elles évitent toute application aux faits concrets, ces divagations sans fondement procèdent de la théorie idéaliste ou subjectiviste de la Connaissance, qui devrait pourtant bien.

près d'un demi-siècle après les études réalistes de Helmholtz et de Taine, avoir perdu tout crédit dans le monde scientifique. N'est-il pas manifeste, par exemple, que l'idée de la troisième dimension s'imposerait rapidement, bien qu'inconsciemment, au spectateur d'une scène cinématographique, comme le serait un homme uniquement pourvu du sens de la vue ? C'est que les objets et les événements ne sont pas, comme le disent les subjectivistes, des « complexes de sensations » ; ce sont des « complexes de prévisions » (savoir, c'est prévoir). Tout objet de Connaissance est conçu comme source de faits, comme *cause ;* « Réalité » se résoud, en dernière analyse, en « Causalité ».

Les propriétés géométriques de la matière (car il doit bien être permis, même aux mathématiciens, de se souvenir, de temps à autre, que les figures sont des positions possibles pour la matière) n'ont ni plus ni moins de réalité que les qualités dites physiques. La Géométrie est donc, en définitive, une branche de la Physique ; seulement, une frondaison, peut être un peu abusivement luxuriante, en a masqué le point d'insertion, comme cela pourrait se produire pour la Mécanique, la Thermodynamique, etc. Les Mathématiques, pas plus que l'Art, n'ont rien à gagner à renier leur mère : la Nature.

G. Combebiac (Bourges).