

# SUR UN PARADOXE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET SUR L'AXIOME ZERMELO

Autor(en): **Richard, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10139>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## SUR UN PARADOXE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET SUR L'AXIOME ZERMELO

---

J'ai signalé autrefois, dans la *Revue générale des sciences*, un paradoxe relatif à la théorie des ensembles. L'explication que j'en ai donné n'est pas entièrement exacte, comme l'a remarqué M. PEANO. Je voudrais reprendre la question ici, et la faire suivre de quelques réflexions sur ce qu'on nomme l'*axiome ZERMELO*.

Mon paradoxe concerne l'ensemble E des nombres susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots.

Cet ensemble est dénombrable. En effet, la définition d'un nombre par un nombre fini de mots est un arrangement avec répétition des 26 lettres de l'alphabet. Rangeons par ordre alphabétique, d'abord tous les arrangements un à un, puis à la suite tous ceux deux à deux, puis tous ceux trois à trois, etc. Puis, parmi ces arrangements conservons seulement ceux qui définissent des nombres, en biffant tous les autres.

Dans la suite des arrangements restant et définissant des nombres, toute définition de nombre occupera un rang. Ces définitions, ou les nombres correspondants forment donc un ensemble dénombrable.

Cet ensemble que je nomme E est défini par les mots qui précèdent. Mais, étant donné un ensemble dénombrable de nombres, on sait qu'on peut trouver un nombre n'appartenant pas à l'ensemble.

Pour définir un pareil nombre, aux chiffres

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

faisons correspondre respectivement

1 2 3 4 5 6 7 8 1 1

à chaque chiffre  $x$  correspond un autre chiffre  $\varphi(x)$  et  $\varphi(x)$  est distinct de  $x$ . En outre  $\varphi(x)$  n'est jamais égal à 9.

Formons alors un nombre  $N$  ayant zéro pour partie entière et pour  $n^{\text{me}}$  chiffre décimal le correspondant du  $n^{\text{me}}$  chiffre décimal du  $n^{\text{me}}$  nombre de l'ensemble  $E$ .

Le nombre  $N$  ainsi défini ne fait pas partie de  $E$ , car s'il était le  $n^{\text{me}}$  nombre de  $E$ , son  $n^{\text{me}}$  chiffre serait identique au  $n^{\text{me}}$  chiffre du  $n^{\text{me}}$  nombre de  $E$ , et cela n'est pas.

Voilà donc un nombre  $N$ , défini par un nombre fini de mots et n'appartenant pas à  $E$ , ce qui est contradictoire avec la définition de  $E$ .

Telle est la contradiction.

Il m'avait paru assez facile d'expliquer ce paradoxe. Soit  $G$  la phrase définissant  $N$ . Cette phrase est un arrangement de mots. Comme les éléments de  $E$  sont des arrangements de mots, en formant l'ensemble  $E$ , on rencontrera la phrase  $G$ . Supposons qu'on la rencontre au rang  $p$ . A ce moment elle n'a pas de sens, car à ce moment les  $p - 1$  premiers éléments de  $E$  sont seuls définis. La phrase  $G$  n'ayant pas de sens devra être biffée.

Voici l'objection de M. Peano. Dans la phrase  $G$  on peut remplacer les mots : *l'Ensemble E* par leur définition. La phrase  $G$  acquiert alors un sens et elle définit un nombre.

Le paradoxe subsiste donc.

Mais alors on peut remarquer ceci : la phrase  $G$  formule une contradiction. Soit  $p$  son rang dans l'ensemble  $E$  ; si la phrase  $G$  définit un nombre  $N$ , soit  $x$  son  $n^{\text{me}}$  chiffre. La phrase  $G$  exprime que le  $p^{\text{me}}$  chiffre de  $N$  est égal à  $\varphi(x)$ , elle exprime donc que :

$$\varphi(x) = x .$$

or par la définition de  $\varphi(x)$  on a  $\varphi(x) \neq x$ .

La phrase  $G$  exprime donc que le  $p^{\text{me}}$  chiffre du  $p^{\text{me}}$  nombre de  $E$  est différent de lui-même, ce qui est absurde. On devra donc la biffer.

Il reste encore une difficulté. M. Peano l'indique et la résout comme il suit : (Je cite textuellement en traduisant en français le latin sans flexion dont l'auteur fait usage).

« Si la phrase qui définit N n'exprime pas un nombre, comme il est démontré ci-dessus, alors dans le calcul de N je passe cette phrase qui ne définit pas un nombre, et la définition de N acquiert un sens. C'est-à-dire : si N n'existe pas, alors il existe ».

« La contradiction est dans l'ambiguïté de la phrase N. Il est nécessaire d'ajouter d'une manière explicite, « cette phrase non exclue » ou « cette phrase exclue ».

« Alors nous biffons la phrase ambiguë, et nous continuons au delà. Un peu plus loin nous trouvons les deux phrases :

« N' == (Phrase N) cette phrase exclue,

« N'' == (Phrase N) cette phrase non exclue.

« N'' n'existe pas, par la raison indiquée. N' représente un nombre déterminé, appartenant à E, et évidemment différent de tout autre nombre de E. »

Telle est l'explication de M. Peano. On pourrait encore y faire cette objection que l'ensemble E (qui contient N) est malgré tout dénombrable. Alors cet ensemble E étant formé, la phrase G aura un autre sens et définira un nombre qui n'est pas dans E. Cette fois le nombre n'est défini qu'après la formation totale de E et mon explication redevient bonne.

Je n'insiste pas plus longtemps sur ce sujet, de peur de patauger dans l'infini, selon l'expression de M. Poincaré.

Je vais parler de l'*axiome Zermelo*, ce qui n'est pas sans liaison avec ce qui précède, comme on pourrait le croire.

On est conduit à l'axiome en question, en cherchant à démontrer la proposition suivante :

Si A est un ensemble infini non dénombrable, on peut toujours trouver un ensemble dénombrable B contenu dans A.

Un ensemble infini, c'est un ensemble tel que si  $a_1 a_2 \dots a_p$  sont  $p$  éléments distincts de l'ensemble, on peut toujours trouver un élément distinct des premiers,  $a_{p+1}$  appartenant à l'ensemble.

D'après cela, dans l'ensemble A on peut toujours trouver une série d'éléments  $a_1 a_2 \dots a_n$  . aussi longue qu'on voudra contenue dans l'ensemble. Si on se contentait de celà la proposition énoncée serait démontrée.

Mais une suite *infinie*  $a_1 a_2 \dots a_n \dots$  n'est définie que si l'on peut calculer  $a_n$ . On dit cela dans les cours de mathématiques en commençant l'étude des séries. Pour démontrer complètement la proposition, il faudrait donc prouver l'*existence d'une règle* permettant de calculer  $a_n$  en fonction de  $n$ .

On peut il est vrai prendre arbitrairement  $a_n$ , mais on a l'embarras du choix. Cet embarras se répète une infinité de fois. C'est là la difficulté.

Dans les ensembles particuliers on a en général la possibilité d'une pareille règle. Soit par exemple l'ensemble des nombres transcendants. On pourra prélever dans cet ensemble un ensemble dénombrable

$$\pi, \pi^2, \pi^4, \dots, \pi^n, \dots, \text{etc.}$$

Mais la chose est-elle toujours possible ?

Pour plus de clarté nous énoncerons l'axiome Zermelo ainsi. Etant donné un ensemble infini  $A$ , il est toujours possible de faire correspondre à chaque entier  $n$  un objet  $a_n$  de l'ensemble, à deux entiers distincts correspondant deux éléments distincts.

On devra également admettre l'énoncé suivant un peu différent. Dans une suite d'ensembles rangés,  $A_1 A_2 \dots A_n \dots$  sans éléments communs, on peut prélever une suite d'éléments,  $a_1 a_2 \dots a_n \dots$  l'élément  $a_n$  étant dans  $A_n$ .

Ces propositions constitueront pour nous *l'axiome Zermelo*. Elles ne paraissent pas démontrables dans le cas le plus général, elles le sont dans un cas très étendu, le seul qu'on ait à considérer pratiquement. Envisageons la 1<sup>re</sup> proposition. Supposons ceci « Dans l'ensemble  $A$  il y a des éléments pouvant être définis par un nombre fini de mots ». En faisant cette hypothèse supplémentaire nous ne restreignons pas beaucoup la question. On ne peut en effet se faire aucune idée d'un ensemble ne possédant pas cette propriété.

Avec notre restriction *l'axiome Zermelo se démontre immédiatement*. En effet reprenons les arrangements de lettres dont j'ai parlé au début de ce travail. Parmi ces arrangements, rangés comme nous l'avons dit, *biffons tous ceux*

qui ne définissent pas des éléments de l'ensemble  $A$ . Ceux qui restent définiront des éléments de l'ensemble  $A$  rangés dans un certain ordre. Nous aurons donc bien une suite rangée  $a_1 a_2 \dots a_n \dots$  formée d'éléments de l'ensemble  $A$ .

La seconde partie se démontre de même. On peut supposer rangés des éléments des ensembles  $A_1 A_2 \dots A_n$ , par la règle précédente, et dans chacun d'eux on prendra le premier élément,  $a_n$  sera alors le premier élément de  $A_n$ .

Ces démonstrations laissent un peu à désirer. Il faut en effet bien préciser dans quel cas un arrangement de lettres définit un élément de l'ensemble  $A$ . Lorsqu'on arrive en effet à un arrangement de mots définissant un élément de l'ensemble  $A$  mais avec une incorrection de langage, par exemple en omettant les articles, doit-on le biffer ou non. Il faut faire à ce sujet des conventions précises, car pour bien démontrer l'axiome, il faut supprimer partout *l'embarras du choix*.

Je considère ces questions comme curieuses, mais absolument oiseuses en mathématiques. La vraie mathématique, celle qui nous fait connaître le monde extérieur, n'a que faire des ensembles non dénombrables, et des objets non susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots. Ces objets n'existent qu'en un sens : leur existence n'implique pas contradiction. Et encore n'est-ce pas sûr.

En géométrie il est vrai on considère des segments de droite, des arcs de courbe, etc. Ce sont des ensembles de points non dénombrables. Mais tous les points obtenus par une construction géométrique quelconque ont une position définie par un nombre fini de mots.

J. RICHARD (Dijon).

---