NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1906-1907 (suite).

ANGLETERRE

Oxford ; *Université*. Lecture List for Hilary Term, 1907. (Course begin 21 jan.) — W. ESSON : Comparison of Analytic and Synthetic methods in the Theory of Conics, 2 h.; Synthetic Theory of Cubics, 1. — ELLIOTT : Elements of Elliptic Functions, 2 ; Theory of Numbers (continued). — TURNER : Elementary Mathematical Astronomy, 2. — PLUMMER : Practical Work. — LOVE : Theory of the Potential, 2 ; Elements of the Differential and Integral Calculus, 2. — KIRKBY : Higher Plane Curves, 2. — DIXON : Calculus of Finite Differences, 1. — CAMPBELL : Differential Equations (continued), 2. — SAMPSON : Higher Solid Geometry (continued), 2. — THOMPSON : Dynamics of a Particle, 3. — GERRANS : Hydrodynamics, 2. — HASELFOOT : Geometrical Optics, 2. — RUSSELL, Determinants, 2. — PEDDER : Trigonometry, 1. — LEUDESDORF : Geometry (Maxima and Minima, Inversion, etc.), 2. — JOLLIFFE : Analytic Geometry (continued), 2. — Mc NEILE : Integral Calculus, 2. — HAYES : Elementary Mechanics, 3.

FRANCE

Paris ; *Collège de France* (1er semestre 1906-07). — Mécanique analytique et mécanique céleste ; M. HADAMARD traitera des trajectoires réelles de la dynamique (2 h. par semaine). — Mathématiques ; M. HUMBERT étudiera quelques applications de l'analyse à la théorie des nombres (2 h. par semaine). — Physique générale et mathématique ; M. BRILLOUIN étudiera la théorie de l'élasticité des solides homogènes et hétérogènes (2 h. par semaine). — Mathématiques. Fondation Claude-Antoine Peccot. Cours de M. Pierre Boutroux.

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire pour l'an 1907, publié par le Bureau des Longitudes. — 1 vol. in-16 ; prix : 1 fr. 50 (franco 1 fr. 85) ; Gauthier-Villars, Paris.

On sait que l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* apporte chaque année une foule de renseignements utiles à l'ingénieur et à l'homme de science. Ce nouveau volume contient en outre deux Notices de M. A. BOUQUET DE LA GRYE : I, *Diamètre de Vénus ;* II, *Note sur la XVe Conférence de l'Asso-*

ciation géodésique internationale; et une notice de M. H. Deslandres sur l'*Histoire des idées et des recherches sur le Soleil. Révélations récentes de l'atmosphère entière de l'astre.*

Carlo Bourlet. — **Cours abrégé de Géométrie**; *I. Géométrie plane.* — 1 vol. cart. 404 p., 2 fr. 50 ; Hachette & Cie, Paris.

Après les manuels de MM. Borel et Grévy, voici encore un excellent ouvrage de géométrie élémentaire rédigé d'après les nouveaux programmes français du 27 juillet 1905. L'auteur s'est inspiré de la méthode de M. Méray ; on sait que celle-ci présente le grand avantage d'être plus intuitive, et, par suite, plus accessible à de jeunes intelligences ; elle permet, en outre, de réaliser une union plus intime entre l'enseignement du dessin et celui de la géométrie.

Le livre commence par une introduction du dessin géométrique, destinée à donner aux élèves la notion expérimentale du parallélisme fondée sur la translation et celle des angles fondée sur la rotation. On y trouve une foule de renseignements sur les instruments du dessinateur, leur vérification et leur emploi, sur la manière d'inscrire les cotes, de préparer et d'appliquer une teinte, etc.

La géométrie proprement dite n'est abordée qu'au deuxième chapitre. L'auteur définit d'abord la translation rectiligne dont il déduit la théorie des parallèles ; tout ce qui concerne la mesure des angles et la symétrie par rapport à un point est basé sur l'idée de rotation ; les théorèmes relatifs aux angles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires se démontrent alors immédiatement et l'on arrive ainsi très vite au théorème de la somme des angles d'un triangle qui permet de résoudre plusieurs exercices intéressants.

Dans le troisième chapitre, l'idée de symétrie par rapport à une droite facilite bien des démonstrations (propriétés du triangle isocèle, lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés, arcs de cercle interceptés par deux parallèles, diamètre perpendiculaire à une corde, etc.). — Les cas d'égalité des triangles sont suivis immédiatement des constructions correspondantes ; quant aux triangles rectangles, il ne nous semble pas nécessaire de considérer comme spécial le cas de l'hypoténuse et de l'angle aigu, puisqu'on a déjà prouvé que les deux angles aigus sont complémentaires.

Le chapitre IV traite des lignes proportionnelles et de la similitude. M. Bourlet a eu l'heureuse idée de donner la première place à l'homothétie, dont le pantographe donne des exemples concrets. La similitude se définit alors très simplement : « Si deux figures sont homothétiques et que l'on déplace l'une d'elles, elles deviennent semblables ». — En cherchant les conditions suffisantes pour que deux triangles soient semblables, on arrive aux cas de similitude. A propos des triangles rectangles, on remarque que les rapports de deux côtés quelconques ne dépendent que de la grandeur d'un angle aigu, et l'on est ainsi amené tout naturellement à la définition des lignes trigonométriques.

Viennent ensuite les polygones réguliers, un chapitre relatif aux aires, et enfin quelques explications purement graphiques pour le tracé, par points et par tangentes, de quelques courbes usuelles (coniques, conchoïdes et cissoïdes).

Signalons, en terminant, un excellent choix d'exercices à la suite de chaque chapitre.

1° Exercices *pratiques :* dessins faciles ou exercices numériques ; l'auteur donne quelques méthodes générales pour la résolution des problèmes de construction.

2° Exercices *théoriques* devant habituer les élèves à faire quelques raisonnements d'eux-mêmes.

3° Exercices *graphiques :* dessins plus compliqués à exécuter avec soin.

Nous lirons avec plaisir la deuxième partie de cet intéressant ouvrage (Géométrie dans l'espace), qui doit paraître sous peu, ainsi que le « Cours complet » où M. Bourlet reviendra sur certains théorèmes qu'il se contente pour l'instant d'admettre ou de vérifier expérimentalement.

Souhaitons que ces manuels contribuent à la diffusion des méthodes nouvelles, même au delà des frontières françaises, et que, dans l'enseignement élémentaire, l'édifice euclidien soit remplacé définitivement par un système plus simple et tout aussi cohérent.

Louis Kollros (La Chaux-de-Fonds).

Claro C. Dassen. — **Tratado elemental de Geometria Euclidea**. — Tome II. *Geometria del espacio.* — 1 vol. in-12°, XV 470 pages, 382 figures, Coni Hermanos, Buenos-Ayres, 1905.

M. Dassen a fait paraître le tome II de son traité de géométrie[1], en s'inspirant des mêmes idées qui l'avaient précédemment guidé dans la composition de son premier volume; c'est dire qu'il a conservé le plan primitif, et par suite, rangé sous le titre de *Principes communs aux géométries non euclidiennes* toutes les propositions indépendantes du postulat des parallèles et constituant la géométrie générale. Cet ensemble forme la 1re partie du livre, pages 1-215. La 2me partie renferme l'exposé des principes spéciaux à la géométrie euclidienne. Il est évident que ce plan, mettant l'auteur dans la nécessité de fractionner les théories, peut l'exposer à des longueurs; mais, d'autre part, il y a d'incontestables avantages à mener de front, par exemple, l'étude du plan et de ses droites avec celle de la surface sphérique et de ses grands cercles.

Voici, sommairement, le contenu des divers chapitres :

Ire partie. — Chap. I. Les surfaces les plus usuelles, définitions et propriétés fondamentales : le plan, la surface conique de révolution, la sphère.

Chap. II. Perpendiculaires et obliques à un plan. Sections planes de la sphère, grands et petits cercles, plans tangents. Compas sphérique, construire le rayon d'une sphère solide. M. Dassen donne les deux constructions classiques de ce problème 1° par le petit cercle, 2° par le grand cercle. Il faudrait modifier la première pour la rendre applicable aux géométries non euclidiennes, et il suffit pour cela, P_1 étant le rabattement du pôle P du petit cercle autour de $A_1 D_1$ (page 51, fig. 46), de tracer la perpendiculaire au milieu de $A_1 P_1$. Son point de rencontre O_1 avec $P_1 D_1$ prolongé limite le segment $P_1 O_1$ égal au rayon demandé.

Chap. III. Plans perpendiculaires et obliques entre eux. Les dièdres. L'auteur a parfaitement raison d'exposer les théorèmes sur les dièdres dans l'ordre même qu'il a suivi pour les angles dans le plan. En vérité, il y a si

[1] Voir l'analyse du tome I, *E. M.*, 1905, pages 244-246.

peu de termes à changer pour aller d'une théorie à l'autre, et ce passage si simple présente tant d'avantages que l'on ne conçoit guère aujourd'hui la résistance si longtemps opposée à l'introduction des méthodes de M. Mèray dans l'enseignement.

Chap. IV. Géométrie sphérique et géométrie des étoiles de rayons. Principe de dualité. Correspondance entre les éléments constitutifs d'un système plan, ceux d'un système sphérique et ceux des étoiles de rayons. L'auteur donne, pages 88-104, un lexique des termes traduits du 1er système dans les deux autres, et le fait suivre, pages 104-142, des énoncés des théorèmes de géométrie plane également traduits ; il aurait pu quelque peu abréger, en laissant aux bons élèves le soin de faire eux-mêmes cet exercice extrêmement utile. Le chapitre se termine par la liste des théorèmes de géométrie sphérique et solide qui échappent à la loi de dualité.

Chap. V, VI, VII. Polyèdres réguliers et pyramides régulières. leurs rapports à la sphère et à la surface conique.

Chap. VIII. Dualité réciproque de points et plans dans l'espace.

IIme partie. — La seconde partie est divisée en trois livres.

Le livre I traite des droites parallèles, des droites et plans parallèles, des prismes et cylindres. M. Dassen y place ce théorème, qui rentre plutôt dans le cadre des propositions générales : Quatre points non coplanaires déterminent une surface sphérique et une seule.

Livre II. Aires et volumes des polyèdres et corps ronds.

Livre III. Polyèdres semblables.

L'ouvrage se termine par des résumés, un choix de problèmes théoriques et numériques, et quatre notes : Note 1, la définition du plan. — Note 2, la congruence et la symétrie. — Note 3, notions de topographie. Note 4, courbes et surfaces spéciales, notions très sommaires sur les courbes ellipse, hyperbole, parabole et sections coniques, sur l'hélice et les surfaces du 2me degré.

Le livre de M. Dassen, plein de mérites, est à recommander.

P. Barbarin (Bordeaux).

Dr Wilhelm Fœrster. — **Astrometrie** oder die Lehre der Ortsbestimmung im Himmelsraume zugleich als Grundlage aller Zeit-und Raummessung Erstes Heft, — 1 vol. in-8° de 160 p. ; Georg Reimer, Berlin, 1905.

On répartit ordinairement l'ensemble des sciences astronomiques en trois parties : l'Astronomie sphérique, l'Astronomie théorique et l'Astronomie physique. A ces vocables surannés, l'Auteur propose de substituer les dénominations plus précises d'Astrométrie, d'Astromécanique et d'Astrophysique. La première correspond à peu près à l'Astronomie sphérique ; elle se rapporte, d'une façon générale, à l'étude de la détermination des positions célestes. C'est cette étude que M. Fœrster se propose d'entreprendre.

Le présent fascicule comprend trois chapitres. Le premier, qui n'a qu'une vingtaine de pages, renferme des notions sur la vision, la mesure des angles et la trigonométrie sphérique. Le second, encore plus court, il n'a que quelques pages, est relatif aux définitions des divers systèmes de coordonnées. Enfin, le troisième, beaucoup plus étendu, est consacré aux mesures des coordonnées.

Le sujet est exposé d'une façon simple et originale. Il ne comporte pas de développements mathématiques compliqués ; aussi, est-il à la portée de tous ceux qui s'intéressent à l'Astronomie, soit pour satisfaire leur goût, soit en vue de leurs études. Aux uns et aux autres, le Traité de M. Fœrster rendra les meilleurs services. M. Godefroy (Marseille).

Dr Zoel G. de Galdeano. — **Tratado de Análisis matemático**. Tomo tercero : aplicación del Cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas. — 1 vol. in-8° de 320 p., 7 Pesetas; Casañal, Zaragoza, 1905.

Le tome III du Traité d'Analyse mathématique dont M. de Galdeano poursuit la publication depuis quelques années est consacré aux applications du calcul infinitésimal à l'étude des figures planes. Nous y constatons la même méthode, à la fois simple et solide, qui distingue les autres parties de ce bon ouvrage. Nous ne pourrions, à ce propos, que répéter, une fois de plus, les éloges que nous avons précédemment adressés au savant Professeur; il serait superflu d'y insister davantage.

Le présent volume débute par des notions générales sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non euclidienne. Voici, ensuite, l'ordre des matières traitées : Livre I, géométrie plane (*tangentes et normales, transformations par rayons vecteurs réciproques, coordonnées tangentielles, longueur d'un arc de courbe, contact, courbure, enveloppes, étude cinématique de quelques courbes planes*). — Livre II; singularités des courbes planes (*invariants, covariants, polaires, asymptotes, points singuliers*). — Livre III; étude systématique des figures planes (*propriétés numératives, Hessienne, formules de Plücker, transformations planes*).

Telle est la simple énumération de toutes les questions abordées par M. de Galdeano; elle suffit à faire saisir à la fois l'intérêt et la richesse du sujet traité. M. Godefroy (Marseille).

R. Gans. — **Einführung in die Vektoranalysis** mit Anwendungen auf die mathematische Physik. — 1 vol., VIII-98 p.; 2 Mk 80; B. G. Teubner, Leipzig.

L'utilité du calcul des vecteurs dans la Mécanique et dans presque toutes les parties de la Physique mathématique est dorénavant incontestable. Dans l'électro-dynamique spécialement l'analyse vectorielle constitue la seule méthode naturelle. Pour en faciliter l'accès, M. Gans donne dans les deux premiers chapitres de son petit traité, d'après la méthode américaine-anglaise, les premières notions sur les opérations élémentaires, les opérateurs différentiels et certaines intégrales, avec quelques applications bien choisies, empruntées à la Mécanique, à la Géométrie différentielle et à la Physique. La théorie des « dyadics » est exclue. Le troisième chapitre traite des coordonnées curvilignes orthogonales, des équations de Laplace et Poisson, de la décomposition d'un vecteur en parties potentielles et solenoïdales, et des déformations mécaniques. Le quatrième chapitre enfin, consacré à l'hydrodynamique et l'électrodynamique, contient des paragraphes intéressants sur les déplacements électrolytiques, sur l'induction dans une sphère tournante, la théorie des électrons et les potentiels retardés. Comme notation, M. Gans a cru devoir adopter celle de MM. Lorentz et Sommerfeld qui est aussi celle de l'Encyclopédie des sciences mathématiques. Le petit livre de M. Gans peut rendre de très réels services à tous ceux qui veulent s'initier au calcul des vecteurs et à la théorie mathématique des électrons, qui prend actuellement une place si importante dans la théorie de l'électricité. M. Fr. Daniëls (Fribourg, Suisse).

H. Lebesgue. — **Leçons sur les séries trigonométriques** professées au Collège de France. — 1 vol. in-8° de VII-128 pages ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce petit volume est un tableau de l'état actuel de la théorie des séries trigonométriques. Toujours les choses les plus importantes sont mises en lumière ou tout au moins signalées. Une introduction nous initie aux propriétés générales des fonctions de variables réelles et le premier chapitre nous montre le début historique de la théorie.

La sommation des séries étudiées est d'abord envisagée au point de vue d'Euler et de Lagrange, d'après lequel une série trigonométrique peut être considérée comme la partie réelle (ou la partie imaginaire) d'une fonction analytique représentée d'abord par une série de Taylor. Vient ensuite la méthode de Fourier. Signalons aussi une méthode récente due à M. Kneser d'un caractère absolument original et d'ailleurs de la plus haute importance, car cette même méthode s'applique aux séries formées non pas seulement de sinus et de cosinus, mais formées aussi d'intégrales d'équations linéaires du second ordre à coefficients quelconques. Et l'on sait que de telles séries jouent un grand rôle en physique mathématique, notamment dans le problème du refroidissement d'une barre hétérogène et dans d'autres du même genre résolus formellement depuis longtemps, mais inachevés cependant faute d'une démonstration suffisante de la convergence des séries obtenues. M. Lebesgue ne va pas si loin car il sortirait de son sujet, mais il a eu le mérite de développer, à propos des séries trigonométriques proprement dites, une méthode analogue à celle de M. Kneser. Il nous montre aussi, sur un exemple particulier fourni par l'équation de Laplace, que les développements en séries de polynômes des fonctions de variables réelles sont liés aux équations aux dérivées partielles à solutions analytiques.

Le chapitre III est, à mon avis, le plus élevé et le plus important. Il traite de la convergence en remplaçant d'abord la série trigonométrique par une intégrale définie bien connue, mais il ajoute beaucoup aux considérations élémentaires habituelles.

Il est assez malaisé de dire au premier abord quels sont les cas les plus généraux dans lesquels le procédé est valable. Pendant longtemps on s'était contenté des conditions dites de Dirichlet. Il y en a d'autres dues à MM. Dini, Lipschitz, Jordan. Et si l'on étudie l'intégrale définie en question indépendamment de son origine, elle donne des résultats qui, s'ils ne se rapportent plus immédiatement à des séries trigonométriques, n'en sont pas moins fort intéressants. C'est ainsi que M. Lebesgue est amené à parler des sommes de Gauss.

Signalons aussi l'étude des séries trigonométriques divergentes. Ces séries peuvent être sommables par des procédés remarquables. Il y a celui de Poisson qui transforme la série trigonométrique en une fonction harmonique et celui de M. Tejér qui n'est autre chose que la méthode de sommation de M. Borel convenablement appliquée.

Quant aux opérations sur les séries de Fourier, il est visible que M. Lebesgue a été un peu trahi par le sujet. Le plus clair est qu'on ne sait pas grand'chose, mais l'auteur fait des efforts pour montrer les difficultés du sujet et la nature des problèmes qui se posent.

Enfin le dernier chapitre intitulé : « Séries trigonométriques quelconques », revient sur la délicate question de savoir quelles peuvent être les séries trigonométriques représentant des fonctions données. C'est surtout une belle analyse des idées de Riemann et des recherches qu'elles ont entraînées. A ce propos, ajoutons que M. Lebesgue a fort bien montré les nombreuses analogies que les questions traitées dans ce nouvel ouvrage ont avec celles traitées dans celui qui a trait à l'intégration, et que j'ai déjà analysé dans ce Journal. La grande figure de Riemann domine ces œuvres.

A. Buhl (Montpellier).

M. Petrovitch. — **La Mécanique des Phénomènes fondée sur les Analogies.** (Collection Scientia.) — 1 vol. 95 p., 2 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Dans le *Discours préliminaire* aux *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (Paris, 1859), Lamé, après avoir fait ressortir les analogies entre la théorie du potentiel, l'hydrostatique et la théorie de la chaleur, analogies qui reposent sur des propriétés communes et sur l'identité des formules analytiques, a écrit que ce rapprochement « fait entrevoir l'avénement futur d'une science rationnelle unique, embrassant, par les mêmes formules, les trois branches des mathématiques appliquées que je viens de définir, et, en outre, la théorie des ondes sonores et celle des ondes lumineuses, qui ne sont autres que la théorie générale de l'élasticité dans l'état dynamique ».

Le petit livre de M. Petrovitch, qui fait partie de l'intéressante collection *Scientia,* est un premier pas vers la constitution de cette science, de cette mécanique générale, que Lamé entrevoyait.

L'analyse d'une analogie entre des phénomènes divers fait ressortir d'elle-même la raison intime et commune à toutes les analogies ; celle-ci réside dans l'identité des rôles joués par certains éléments dans les phénomènes analogues. Alors M. Petrovitch se demande avant tout s'il est possible de schématiser ces rôles, c'est-à-dire de les dégager en quelque sorte de ce qui les rattache spécialement à telle ou telle espèce de phénomènes et de les présenter sous une forme assez simple et assez générale pour qu'ils puissent s'adapter à tous les phénomènes embrassés par une même analogie ; et après cela si on peut aussi schématiser les phénomènes d'un même groupe.

C'est à ces questions, très clairement posées, que M. Petrovitch a consacré son petit ouvrage, plein d'érudition et qu'on lit avec beaucoup de plaisir.

Le livre comprend quatre chapitres ; dans le premier, l'auteur a fait une soigneuse et très intéressante étude des analogies déjà connues, et auxquelles il faut ajouter maintenant celle entre les problèmes d'équilibre des corps élastiques à connexion multiple et les mouvements d'un fluide à potentiel polidrome et qui a fait l'objet des recherches de M. Volterra. L'auteur a toujours soin de faire bien saisir la correspondance entre les éléments correspondants des phénomènes d'une même analogie.

Dans le chapitre II *(Esquisse d'une mécanique générale des causes et des effets)* est exposée la partie nouvelle et originale du livre. L'auteur considère les systèmes formés par des *objets;* chaque objet est défini par un certain nombre de variables qui déterminent à chaque instant sa position, sa vitesse, ses longueurs d'onde, les diverses radiations simples, etc. Les *causes* directes ou indirectes qui interviennent dans la production d'un phénomène sont, au fond, représentées par des vecteurs ; et la généralisation des principes fondamentaux de la dynamiqne permet de traduire en équations les relations entre les causes directes et les objets. On comprend que l'on peut, par conséquent, généraliser aussi quelques-uns des théorèmes de la mécanique : principe de l'impulsion, de D'Alembert, intégrale des forces vives, etc.

Le chapitre III s'occupe des schémas généraux représentant l'action des causes. L'auteur examine beaucoup de cas particuliers correspondant à l'action d'une cause d'intensité constante, ou à variation indépendante ; à l'action simultanée de deux causes particulières, etc. ; et il donne toujours de nombreux exemples de phénomènes où ces actions s'ppliquent.

Enfin le chapitre IV contient un aperçu, un peu vague il est vrai, de l'application de la mécanique générale aux cas où la nature des causes est exactement connue, comme dans les phénomènes purement mécaniques, ou bien n'est pas connue. En conclusion, l'auteur veut faire ressortir que certaines particularités de l'allure d'un phénomène peuvent s'expliquer par des mécanismes communs à un grand nombre de phénomènes divers — ce qui était connu depuis longtemps — et ces mécanismes seraient fournis par les schémas de la théorie ébauchée par l'auteur.

R. Marcolongo (Messine).

Salvatore Pincherle. — **Lezioni di Algebra complementare ; Analisi Algebrica,** 2me fascicule (p. 129-362). — Zanichelli, Bologna.

Dans ce deuxième et dernier fascicule, M. le professeur Pincherle étudie avec grand soin, avec la vraie rigueur, celle qui est sobre, les *séries,* puis, ce que l'on ne fait pas toujours dans les livres élémentaires, les *produits infinis* et les *fractions continues* arithmétiques.

Puis la notion générale de fonction est introduite : correspondance de deux ensembles. Viennent alors les propriétés fondamentales des fonctions *continues,* puis la théorie de la *dérivée* et ses applications à la variation des fonctions.

Les fonctions rationnelles sont étudiées avec soin, puis les séries entières. Les propriétés de e^x résultent de l'étude de la série $\sum \frac{x^n}{12 \ldots n}$.

La convergence de la série du binôme est étudiée, pour $|x| < 1$, quel que soit l'exposant m de $(1 + x)^m$.

Enfin la fonction *logarithme* est présentée tant pour la variable réelle que pour la variable complexe, ce qui permet, on le sait, de voir quel est le logarithme d'un nombre *réel négatif.*

En résumé, par sa limpidité, son élégance, le livre de M. Pincherle est une parfaite introduction à un cours d'Analyse savante, et l'on sera heureux de voir paraître le volume annoncé sur la Théorie des équations.

R. d'Adhémar (Lille).

René de Saussure. — **Théorie géométrique du mouvement des corps.** Fin de la 1re partie et commencement de la 2me partie : *La Géométrie des feuillets.* — 1 vol. 109 pages, avec deux tables. Librairie Kündig, Genève.

Dans le numéro de septembre 1905 de l'*Enseign. mathém.* nous avons fait une courte analyse d'un intéressant mémoire de M. de Saussure. Les *Archives des sciences physiques et naturelles* de Genève (tom. XXI, 1906) contiennent la suite des recherches de ce géomètre.

La symétrie par rapport à un point ou à un plan a conduit l'auteur aux notions générales des translations et des rotations à plusieurs paramètres. Dans la fin de la première partie du nouveau mémoire il s'occupe de la *torsion* ou de la symétrie par rapport à une droite. Les mouvements de torsion sont engendrés par un corps qui se déplace en restant symétrique par rapport à une série de droites ; et suivant que la droite mobile décrit une surface réglée, une congruence, un complexe ou enfin tout l'espace réglé, le mouvement de torsion est à 1, 2, 3, 4 paramètres. La torsion à un paramètre est celle qui définit, comme on sait, le mouvement à un paramètre le plus général d'un corps solide.

Mais, avant tout, l'auteur fait une digression très intéressante sur l'application de la géométrie des complexes linéaires à l'étude des mouvements infiniment petits d'un corps solide qui possède n degrés de liberté (§ 1). Il réussit à présenter d'une manière tout à fait géométrique et très heureuse bien des résultats de la théorie de R. S. Ball.

Il aborde ensuite l'étude des mouvements de torsion ; mais il n'est pas possible de résumer tous les résultats auxquels il arrive, en employant toujours la même méthode claire et élémentaire. Citons pourtant la conclusion plus importante qui découle des recherches de l'auteur, c'est-à-dire que les translations, les rotations et les torsions ne sont pas des mouvements assez généraux pour servir de type aux déplacements finis d'un corps solide avec plusieurs degrés de liberté. Ainsi, par exemple, la torsion à quatre paramètres n'est pas le mouvement le plus général d'un corps solide qui a quatre degrés de liberté. On voit déjà donc que les mouvements de torsion ne peuvent pas être pris comme base d'une théorie générale des mouvements finis à plusieurs paramètres.

L'exposition complète de ces mouvements exige donc quelque autre chose que M. de Saussure expose dans la seconde partie de son travail, qui a aussi le but de développer dans l'espace à trois dimensions la théorie des éléments fluides dans le plan. L'auteur a nommé cette seconde partie : *La géométrie des feuillets ;* et il en a publié seulement les deux premiers chapitres. Nous comptons la résumer et la faire connaître aux lecteurs de cette *Revue* dès que l'auteur aura publié la suite de ses recherches.

Pour terminer, nous croyons devoir faire observer que la théorie hydrocinétique des éléments fluides dans un plan a déjà eu une application ; car l'auteur a appliqué sa méthode à la construction des lignes de flux de l'atmosphère pour les directions du vent observées à la même date dans les principales villes des Etats-Unis, et il a obtenu des résultats qui correspondent aux observations.

M. Jean Bertrand, dans un article sur l'*Interpolation en Météorographie* (Bulletin de la Société belge d'Astronomie, n[os] 7-8, 1905), où il a même résumé les recherches de M. de Saussure, vient de faire des applications nouvelles.

Les recherches de M. de Saussure n'intéressent donc pas seulement les géomètres ; nous souhaitons les voir bientôt achevées et publiées.

R. Marcolongo (Messine).

P.-H. Schoute. — **Mehrdimensionale Geometrie**. Zweiter Teil : *Die Polytope* (T. XXXVI de la Collection Schubert). — 1 vol. relié, in-8°, IX-326 p., avec 90 fig. et 123 exercices ; J. G. Göschen, Leipzig, 1905.

Le second volume du savant professeur de Groningue est la suite naturelle et attendue de son premier ouvrage : *Die linearen Raume*, déjà publié sur la géométrie à n dimensions[1]. On y trouve les mêmes qualités caractéristiques de simplicité et de clarté, et le souci constant de mettre en lumière les points fondamentaux et essentiels par des exemples aussi nombreux que bien choisis, les uns résolus, les autres proposés comme exercices avec une indication relative à leur résultat.

---

[1] Voir l'analyse de cet ouvrage *E. M.*, 1903, pages 149-150.

Voici les matières renfermées dans les chapitres de l'ouvrage :

Ire partie. Introduction topologique — Notions fondamentales; le théorème d'Euler.

2me partie. Relations métriques — Congruence et similitude; considérations sur les volumes.

3me partie. Polytopes réguliers — Polygones réguliers; Polyèdres réguliers; cellules régulières; Polytopes réguliers de dimensions supérieures.

4me partie. Les Polytopes ronds. — Les espaces sphériques; les espaces cylindriques et coniques; les espaces généraux de révolution — Exercices.

L'ouvrage de M. Schoute est, croyons-nous, le premier traité complet et spécial écrit sur la géométrie à n dimensions. Il mérite d'être répandu et traduit.

P. Barbarin (Bordeaux).

H. Schubert. — **Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis,** t. III. — 1 vol. in-16°, 250 p. 4 M k. ; G.-J. Göschen, Leipzig.

Ce volume, comme les deux précédents, traite des questions les plus variées. Des déterminations de centres de gravité précèdent quelques propriétés élémentaires de la parabole. Viennent quelques remarques relatives à la loi de Descartes, sur les indices de réfraction; puis des recherches sur le volume de certains corps. Suit un exposé des principales formules de la trigonométrie sphérique. Celui-ci sert de point de départ au dernier chapitre, consacré à des triangles sphériques héroniques, c'est-à-dire dont les cosinus et sinus des angles et des côtés sont tous quantités rationnelles.

Si d'un bout à l'autre du recueil aucun excès d'originalité n'est à signaler, l'auteur n'en a pas moins fait œuvre utile. Son livre rendra service à ceux qui s'occupent d'enseignement, à ceux qui désirent avoir à disposition des sujets faciles à traiter, constituant un tout en eux-mêmes.

G. Dumas (Zurich).

G. Vivanti. — **Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.** Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers, deutsch herausgegeben von A. Gutzmer. — 1 vol. cart., 512 p. gr. in-8° ; 12 Mk. Leipzig, B.-G. Teubner.

On a quelque difficulté à se représenter cet ouvrage comme traduit de l'italien. Si l'on ne regardait pas le frontispice et le nom du véritable auteur on se croirait dans un fort beau monument de l'école allemande, monument élevé dans l'ombre gigantesque que projette toujours Weierstrass, et pour la plus grande gloire de cet illustre géomètre.

Des méthodes de Cauchy rien ou à peu près. Une fonction analytique est définie par un élément taylorien. Il est tout à fait en dehors de ma pensée de donner à cette constatation la forme d'une critique. L'auteur n'a point voulu davantage envisager le point de vue de Riemann et lier les fonctions analytiques à l'équation de Laplace. Il importe simplement d'avertir le futur lecteur de ce qu'il ne saurait trouver dans cet ouvrage et nous pourrons ensuite indiquer plus librement combien il est admirablement ordonné et rédigé dans les limites du plan d'abord tracé.

On n'y peut guère passer tout en revue, tant il y a de choses, tant il est au courant des recherches les plus récentes, et tant la bibliographie y est développée. Je me contenterai de mentionner quelques points particulièrement saillants.

Les premières pages sont consacrées à la théorie des ensembles, aux fonctions des points d'un certain domaine, aux séries de puissances.

Des développements très originaux et peu connus sont donnés sur la valeur moyenne d'une fonction. Il faut entendre par là le résultat obtenu en donnant à la variable d'une fonction analytique des valeurs prises en des points qui divisent une circonférence en 2^n parties égales, en faisant la somme de ces valeurs, en la divisant par 2^n et en passant à la limite pour n croissant indéfiniment. Au fond cela se ramènerait facilement à une certaine intégrale définie prise le long de la circonférence et, d'ailleurs encore, ce théorème de la moyenne intervient de façon bien connue dans la théorie des fonctions harmoniques, mais ce qui me fait précisément dire qu'il y a là quelque chose d'intéressant et qui paraîtra nouveau à beaucoup, c'est que les notions précédentes ne sont pas invoquées. Signalons l'étude de la dérivation et de l'intégration des séries entières, la définition des points singuliers, le théorème de Laurent, les séries de fonctions rationnelles désignées sous le nom d'*expressions arithmétiques*. Après quoi nous passons à l'étude proprement dite des fonctions analytiques, classées d'après la nature de leurs points singuliers. L'auteur en fait le tableau suivant :

A. Fonctions sans singularités.

B. Fonctions qui n'ont que des pôles.
   1. Un seul pôle. *a)* à l'infini. *b)* à distance finie.
   2. Fonction avec un nombre fini de pôles.
   3. » » » » infini » »

C. Fonction avec des singularités essentielles.
   1. Une seule singularité. *a)* à l'infini. *b)* à distance finie.
   2. Un nombre fini de points singuliers.
   3. Un nombre infini de points singuliers.
      a) Une infinité de pôles et un point essentiel.
      b) Une infinité de pôles et un nombre fini de points essentiels.
      c) Un nombre infini de points singuliers arbitraires.

Les A sont des constantes, les B 1a des polynômes, etc..., mais, une fois le tableau débarrassé des résultats évidents, toutes les autres classes de fonctions sont étudiées avec la plus méthodique et la plus grande clarté.

Les C 1 a sont des fonctions entières. Leur étude si importante présente, en outre, la plus grande élégance et de nombreux exemples à l'appui des théorèmes. La décomposition en facteurs est étudiée pour sin x et σx avec la méthode de Weierstrass ingénieusement complétée de façon à ne pas laisser subsister le facteur que le créateur de la théorie laissait indéterminé.

Dans une troisième et dernière partie du livre, qui, à vrai dire, en forme à peu près la seconde moitié, sont exposées les recherches récentes sur les sujets étudiés auparavant de façon plus classique.

C'est là que le travail d'analyse deviendrait prodigieusement difficile puisqu'il faudrait parler de plusieurs centaines de mémoires et de notes dont M. Vivanti a réussi à tirer un tout homogène.

Je n'essaierai pas une telle description. Je me bornerai à dire qu'il s'agit d'abord des nouvelles recherches sur les fonctions entières, du lemme de M. Picard et de ses généralisations et des tentatives nombreuses faites pour étendre à des fonctions non entières certaines propriétés des fonctions entières (fonction quasi-entières, etc.).

Signalons aussi les fonctions à espaces lacunaires dont un type intéressant est dû à M. Poincaré, les séries divergentes, le prolongement analytique, et la possibilité de comparer deux fonctions analytiques de façon à se renseigner sur les singularités de l'une connaissant celles de l'autre.

Admirable ouvrage au fond pour se mettre rapidement au courant des derniers résultats acquis à la science. La rédaction n'en est pas alourdie par l'emploi exagéré d'inégalités ni par le désir de remplacer l'évident par le rigoureux.

J'insiste encore sur la richesse de la bibliographie ; 672 mémoires sont cités et tout est merveilleusement arrangé pour la commodité des recherches.

Remercions M. Vivanti d'avoir eu tant de science et de patience et M. Gutzmer d'avoir traduit si bien et si à propos.

A. Buhl (Montpellier).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

1. Sommaires des principaux périodiques :

American Journal of Mathematics, edited by F. Morley. Vol. XXVIII, 1906 ; nos 3 et 4 ; The Johns Hopkins Press, Baltimore.

Edw. Kasner : The Geometry of differential Elements of second Order with Respect to Group of all donit Transformations. — Cordevio : Gyroscopes and Cyclones. — Manning : On the Primitive Groups of Class Ten. — Virgil Snyder : On certain Unicursal Troisted Curves. — H. Livingston Coar : Functions of three Real Independent variables. — Coble : An invariant Condition for certain Automorphic Algebraic Forms. — Kolosoff : On some Cases of Motion of a solid in Infinite Liquid. — V. Ragsdale : On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles. — 30me année 1905-1906. Louvain, 1906.

3me et 4me fascicules. — J. Neuberg : Sur les lieux discontinus ou suites itératives de points. — R. P. H. Bosmans : Le fragment du commentaire d'Adrien Romain, sur l'Algèbre de Mahumed Ben Musa El-Chowarezmi. — Ch. J. de la Vallée Poussin : 1o Continuité des intégrales des équations différentielles contenant un paramètre. — 2o Sur les équations aux différentielles totales. — J. Delemer : Etude sur la vibration des cordes de piano. — de Sparre : Sur la stabilité du mouvement du cerceau.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 303, 1906 série 5 ; Rendiconti, vol. XV, 1er semestre 1906 ; Rome.

L. Orlando : Alcune applicazioni dell'integrale di Fourier. — E. Almansi : Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito. — C. Arzela : 1o Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali. — 2o Sulle equazioni a derivate parziali. — E. Bortolotti : 1o Sopra una ricerca di limite ; — 2o Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insierni lineari. — G. Castelnuovo : Sulle serie Algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica. — H. Lebesgue : Sur les fonctions dérivées. — E. Lebon : Théorie et construction de tables permettant