FRANCE

Paris; *Faculté des sciences.* — G. DARBOUX, professeur, traitera des principes généraux de la géométrie infinitésimale. Il étudiera en particulier la déformation des surfaces (2 h.). — Des travaux pratiques afférents au certificat de géométrie supérieure seront dirigés par M. CARON. chef des travaux graphiques (1 h.). — GOURSAT, professeur, traitera des opérations du calcul différentiel et du calcul intégral. Eléments de la théorie des fonctions analytiques (2 h.). — Paul PAINLEVÉ, professeur de mathématiques générales, traitera des lois générales de l'équilibre et du mouvement (2 h.). — APPELL, professeur de mécanique rationnelle, et M. BLUTEL (voir aux conférences), exposeront la première partie du cours de mathématiques générales (1 h.). — L. RAFFY, professeur, étudiera, dans le développement de diverses théories inscrites au programme de l'agrégation, l'histoire et les méthodes de la géométrie analytique (1 h.). — H. POINCARÉ, professeur. traitera de la théorie de la lune (2 h.). — M. BOUSSINESQ, professeur, exposera la théorie analytique de la chaleur (1 h.). — G. KŒNIGS, professeur, traitera de l'étude thermo-dynamique des machines (2 h.), travaux pratiques (1 h.). —E. BOREL, professeur adjoint, chargé du cours, traitera, le lundi, de quelques applications de la théorie de la croissance des fonctions, et le mardi, du calcul des probabilités et de ses applications à la statistique et aux sciences expérimentales.

Conférences : L. RAFFY, professeur, conférences sur la géométrie supérieure ; conférences sur le calcul différentiel et le calcul intégral. — HADAMARD, professeur adjoint, conférences sur le calcul différentiel et intégral; conférences sur l'analyse supérieure. — P. PUISEUX, professeur adjoint, conférences sur la mécanique. — M. BLUTEL, chargé de conférences, conférences sur l'algèbre, en vue du certificat de mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques. — M. SERVANT. chef des travaux pratiques de mécanique physique. conférences sur les questions indiquées par le professeur et surveillera l'exécution des travaux pratiques.

BIBLIOGRAPHIE

R. BAIRE. — **Leçons sur les Théories générales de l'Analyse.** Tome I. — 1 vol. gr. in-8, X-232 pages ; 8 fr. Gauthier-Villars, Paris.

C'est à M. René Baire que revient l'honneur de combler le premier une lacune qui devenait tous les jours plus visible dans l'enseignement de l'Analyse. Les cours de nos facultés publiés dans ces dernières années ne s'appuyaient pas encore sur des théories récentes, telles que celle des ensembles, lesquelles ont cependant déplacé de façon considérable les prémisses sur lesquelles tout cours d'Analyse doit s'appuyer. Certes, les ouvrages dans lesquels on pouvait se familiariser avec ces points de vue nouveaux ne manquaient pas ; je n'en veux pour preuve que l'existence des *Monographies sur la Théorie des Fonctions* publiées par M. Borel ou sous sa direction, collection à laquelle M. Baire a précisément apporté une très intéressante collaboration, mais il semblait toujours que ce soient là des études accessoires que l'on ne devait s'imposer que lorsque l'on voulait aller au delà de ces connaissances classiques qui à l'heure actuelle forment encore le programme de la licence.

M. Baire n'hésite pas à transporter au seuil de son volume les connaissances nouvelles, qui permettent une rigueur parfaite tout en restant simples. Il définit le nombre irrationnel et l'ensemble en adjoignant immédiatement à cette dernière notion celle de borne supérieure ou inférieure. Ces définitions sont interprétées quelques pages plus loin au moyen d'exemples géométriques car l'auteur a pris grand soin de mettre en évidence le rôle de la géométrie quand elle complète de manière intuitive les exposés qui, sans cela, pourraient paraître trop abstraits ou trop détournés. Ainsi la longueur de la circonférence est considérée comme la borne supérieure (ou inférieure) de l'ensemble des périmètres des polygones réguliers inscrits (ou circonscrits).

On sait d'autre part combien les travaux personnels de M. Baire ont approfondi et perfectionné la notion de continuité. Les pages consacrées à ce sujet délicat sont remarquablement claires. Voici une fonction $f(x, y)$ de deux variables rationnelles ; existe-t-il une fonction $F(x, y)$ de variables quelconques égale à $f(x, y)$ en tout point rationnel et de plus continue ? La construction de F en partant de f constitue le *principe d'extension* après lequel nous voyons brièvement que les opérations arithmétiques élémentaires définies dans le champ rationnel sont valables pour les nombres quelconques. Il y a lieu ensuite d'examiner comment ces propriétés analytiques s'étendent aux grandeurs concrètes d'un caractère géométrique ou physique. C'est là que s'introduit la notion de *mesure* et l'étude des conditions nécessaires pour qu'une grandeur soit *mesurable*. Le premier chapitre de l'ouvrage se termine par l'étude des fonctions $\sqrt[m]{x}$, x^y, $\log x$ et par celle des séries, la notion de série étant considérée comme dérivant de celle de limite.

Dans le chapitre II intitulé *Dérivées et intégrales des fonctions de variables réelles*, les notions de dérivation et d'intégration sont étudiées simultanément. Il faut entendre par là que M. Baire a rapproché le plus qu'il lui a été possible l'étude des conditions de dérivabilité et d'intégrabilité en s'appuyant largement bien entendu sur les résultats acquis précédemment dans l'étude de la continuité. Après ces préliminaires il passe aux procédés d'intégration proprement dits puis étudie l'intégrale définie dans le cas où les limites deviennent infinies et les fonctions représentées par des intégrales définies. Après les fonctions implicites et les déterminants fonctionnels les paragraphes consacrés aux dérivées et aux différentielles d'ordre supérieur sont particulièrement dignes de remarque. Comme M. Baire le dit dans sa préface, il n'y a nullement avantage à rapprocher les différentielles d'ordre supérieur de celles de premier ordre en s'efforçant d'atténuer les différences très réelles qui existent entre ces expressions. Mieux vaut mettre rigoureusement et nettement ces différences en évidence car elles répondent à des nécessités analytiques qui peuvent être très diverses. Ainsi, partant de la formule

$$df = f_x' \, dx + f_y' \, dy + f_z' \, dz \; ,$$

M. Baire n'incite nullement le lecteur à se faire une idée préliminaire de ce que doit être la différentielle seconde $d^2 f$, idée d'après laquelle on devrait *calculer* cette nouvelle expression en considérant dx, dy, dz comme constants dans la formule précédente. En réalité, il y a là une double convention nettement mise en lumière. En premier lieu on attribue à dx, dy, dz des valeurs fixes et df n'est plus fonction que de x, y, z; en second lieu on donne à x, y, z dans la fonction df ainsi obtenue des accroissements respectivement égaux aux valeurs fixes choisies dans la première convention. Ceci est étendu à la formation de la différentielle d'ordre $n + 1$ en partant de la différentielle d'ordre n et l'extrême précision de l'exposé constitue sans doute une nouveauté en tant que forme didactique. Le chapitre se termine par l'étude de la genèse des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles et par l'intégration des différentielles totales.

Dans le chapitre III qui forme la dernière partie de ce premier volume, nous étudions les *Applications et extensions de la notion d'intégrale*. Il s'agit d'abord de l'évaluation des arcs et des aires. M. Baire montre d'abord rigoureusement dans quels cas l'arc et l'aire existent. L'aire notamment est définie indépendamment de la notion de limite ce qui, au premier abord, peut sembler paradoxal. L'aire d'un domaine quelconque est un nombre plus grand que l'aire de tout domaine polygonal contenu et plus petit que l'aire de tout domaine polygonal contenant le domaine considéré.

Dans ces conditions l'aire est bien une limite si l'on veut mais il y a cependant une distinction bien remarquable au point de vue philosophique. L'esprit humain a sans doute conçu une notion telle que l'aire avant d'en concevoir une telle que la limite, cette dernière n'étant venue que quand il a fallu *évaluer* l'aire.

Mais l'intérêt s'augmente encore singulièrement quand l'auteur arrive aux intégrales doubles et notamment à la question capitale du changement de variables dans de telles intégrales. Il étudie d'abord la transformation linéaire qui change un triangle en un triangle de telle sorte que l'aire du triangle transformé soit égale à celle du triangle primitif multipliée par un certain facteur constant $|D|$. A toute aire polygonale décomposable en triangles correspond une aire de même nature, le rapport de ces deux aires étant toujours $|D|$. Dans ces conditions, le changement de variables dans l'intégrale double revient à une semblable transformation de domaine et la présence du facteur $|D|$ dans l'intégrale transformée est ainsi justifiée. Ce résultat est ensuite étendu au cas d'un changement de variables quelconque, $|D|$ étant alors le déterminant fonctionnel habituellement considéré. Je connais des démonstrations plus courtes, mais je n'en connais pas de plus claires, ni de plus rigoureuses.

Dans l'étude des intégrales triples la marche suivie est la même. Le volume est défini dans l'espace par un procédé analogue à celui signalé tout à l'heure quant aux aires planes.

Le changement de variables est étudié d'abord dans le cas d'une transformation homographique changeant un tétraèdre en un tétraèdre, ces volumes jouant le même rôle que les triangles considérés plus haut à propos des intégrales doubles. Comme applications les centres de gravité et les moments d'inertie sont étudiés après les volumes. L'aire d'une surface courbe est aussi définie avec le plus grand soin. La surface est d'abord représentée au moyen de deux paramètres u et v, variables dans un domaine plan carrelé. Si ξ, η, ζ sont les développements tayloriens *arrêtés au premier ordre* des coordonnées x, y, z, on a ainsi des formules linéaires changeant un des carrés du domaine des u, v en un parallèlogramme susceptible de représenter une portion de la surface avec une approximation d'autant plus grande que cette portion est plus petite. Les derniers paragraphes sont consacrés aux intégrales de ligne et de surface ; on retrouve partout la même homogénéité, les mêmes procédés qui montrent combien M. Baire a réfléchi aux fondements de la science du continu et avec quel art délicat il a disséqué cette notion. Attendons nous a retrouver dans le second volume qui sera consacré aux fonctions analytiques toutes les qualités si heureusement réunies dans le premier quant aux fonctions de variables réelles.

A. Buhl (Montpellier).

P. Duhem. — **Etudes sur Léonard de Vinci.** Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. *Première série.* — 1 vol. in-8°, 355 p. ; 12 fr.; Hermann, Paris.

Avant de reposer dans les bibliothèques de Paris, de Milan ou de Windsor, les manuscrits de Léonard de Vinci ont éprouvé des vicissitudes sans nombre. Après la mort de leur auteur, dispersés par des héritiers insouciants, ils tombent entre des mains ignorantes ou habiles ; les unes les négligent, les autres savent les exploiter au profit d'un nouvel auteur.

Les précieuses feuilles voyagent en Europe, d'Italie en Espagne et en Angleterre, les collectionneurs se les disputent, des Mécènes en font cadeau aux bibliothèques et aux musées tandis que les rois les classent dans leur cabinet particulier ; elles servent même de trophée aux vainqueurs et passent d'un pays à l'autre suivant le sort des armes. Enfin, au moment où l'ère des tribulations semblait close, d'autres pillards autrement plus dangereux que les hommes de guerre, arrachaient des manuscrits les plus beaux feuillets qu'il fallut racheter à prix d'or quand le moment fut venu.

C'est le citoyen Venturi qui en 1797, fit connaître par des extraits des manuscrits de Léonard, la valeur des trésors scientifiques cachés sous l'écriture renversée lisible au miroir. Venturi et plus tard Guillaume Libri montrèrent que beaucoup de découvertes attribuées à des savants relativement modernes, tels que Palissy, Tartaglia, Cardan et même Pascal, se trouvaient sinon complètes, du moins en germe dans les œuvres de Vinci. La tradition semblait avoir été rompue entre Léonard et ses successeurs et péniblement, certains principes avaient été redécouverts par la postérité ignorante des œuvres du précurseur. Et peu à peu l'opinion se répandit que le progrès des sciences en Europe avait été retardé de plusieurs siècles, du fait que les travaux de Léonard étaient tombés dans l'oubli. La méconnaissance de ses œuvres aurait stérilisé le génie qui éclate à chaque page des fameux carnets et l'histoire des sciences se bornerait à enregistrer l'avortement de cet effort colossal.

C'est cette opinion que M. P. Duhem s'attache à réfuter dans une série d'études parues dans le *Bulletin italien* et réunies ici en un fort volume de 350 pages.

Ces notices sont consacrées à l'étude des rapports de Léonard avec ses prédécesseurs, ses contemporains et ses sneccesseurs.

Albert de Saxe d'abord, puis l'auteur du *Tractatus Ponderibus* que