FRANCE

Paris; *Faculté des sciences*. — G. Darboux, professeur, traitera des principes généraux de la géométrie infinitésimale. Il étudiera en particulier la déformation des surfaces (2 h.). — Des travaux pratiques afférents au certificat de géométrie supérieure seront dirigés par M. Caron. chef des travaux graphiques (1 h.). — Goursat, professeur, traitera des opérations du calcul différentiel et du calcul intégral. Eléments de la théorie des fonctions analytiques (2 h.). — Paul Painlevé, professeur de mathématiques générales, traitera des lois générales de l'équilibre et du mouvement (2 h.). — Appell, professeur de mécanique rationnelle, et M. Blutel (voir aux conférences), exposeront la première partie du cours de mathématiques générales (1 h.). — L. Raffy, professeur, étudiera, dans le développement de diverses théories inscrites au programme de l'agrégation, l'histoire et les méthodes de la géométrie analytique (1 h.). — H. Poincaré, professeur. traitera de la théorie de la lune (2 h.). — M. Boussinesq, professeur, exposera la théorie analytique de la chaleur (1 h.). — G. Kœnigs, professeur, traitera de l'étude thermo-dynamique des machines (2 h.), travaux pratiques (1 h.). —E. Borel, professeur adjoint, chargé du cours, traitera, le lundi, de quelques applications de la théorie de la croissance des fonctions, et le mardi, du calcul des probabilités et de ses applications à la statistique et aux sciences expérimentales.

Conférences : L. Raffy, professeur, conférences sur la géométrie supérieure ; conférences sur le calcul différentiel et le calcul intégral. — Hadamard, professeur adjoint, conférences sur le calcul différentiel et intégral ; conférences sur l'analyse supérieure. — P. Puiseux, professeur adjoint, conférences sur la mécanique. — M. Blutel, chargé de conférences, conférences sur l'algèbre, en vue du certificat de mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques. — M. Servant. chef des travaux pratiques de mécanique physique. conférences sur les questions indiquées par le professeur et surveillera l'exécution des travaux pratiques.

BIBLIOGRAPHIE

R. Baire. — **Leçons sur les Théories générales de l'Analyse.** Tome I. — 1 vol. gr. in-8, X-232 pages ; 8 fr. Gauthier-Villars, Paris.

C'est à M. René Baire que revient l'honneur de combler le premier une lacune qui devenait tous les jours plus visible dans l'enseignement de l'Analyse. Les cours de nos facultés publiés dans ces dernières années ne s'appuyaient pas encore sur des théories récentes, telles que celle des ensembles, lesquelles ont cependant déplacé de façon considérable les prémisses sur lesquelles tout cours d'Analyse doit s'appuyer. Certes, les ouvrages dans lesquels on pouvait se familiariser avec ces points de vue nouveaux ne manquaient pas ; je n'en veux pour preuve que l'existence des *Monographies sur la Théorie des Fonctions* publiées par M. Borel ou sous sa direction, collection à laquelle M. Baire a précisément apporté une très intéressante collaboration, mais il semblait toujours que ce soient là des études accessoires que l'on ne devait s'imposer que lorsque l'on voulait aller au delà de ces connaissances classiques qui à l'heure actuelle forment encore le programme de la licence.

M. Baire n'hésite pas à transporter au seuil de son volume les connaissances nouvelles, qui permettent une rigueur parfaite tout en restant simples. Il définit le nombre irrationnel et l'ensemble en adjoignant immédiatement à cette dernière notion celle de borne supérieure ou inférieure. Ces définitions sont interprétées quelques pages plus loin au moyen d'exemples géométriques car l'auteur a pris grand soin de mettre en évidence le rôle de la géométrie quand elle complète de manière intuitive les exposés qui, sans cela, pourraient paraître trop abstraits ou trop détournés. Ainsi la longueur de la circonférence est considérée comme la borne supérieure (ou inférieure) de l'ensemble des périmètres des polygones réguliers inscrits (ou circonscrits).

On sait d'autre part combien les travaux personnels de M. Baire ont approfondi et perfectionné la notion de continuité. Les pages consacrées à ce sujet délicat sont remarquablement claires. Voici une fonction $f(x, y)$ de deux variables rationnelles ; existe-t-il une fonction $F(x, y)$ de variables quelconques égale à $f(x, y)$ en tout point rationnel et de plus continue ? La construction de F en partant de f constitue le *principe d'extension* après lequel nous voyons brièvement que les opérations arithmétiques élémentaires définies dans le champ rationnel sont valables pour les nombres quelconques. Il y a lieu ensuite d'examiner comment ces propriétés analytiques s'étendent aux grandeurs concrètes d'un caractère géométrique ou physique. C'est là que s'introduit la notion de *mesure* et l'étude des conditions nécessaires pour qu'une grandeur soit *mesurable*. Le premier chapitre de l'ouvrage se termine par l'étude des fonctions $\sqrt[m]{x}$, x^y, $\log x$ et par celle des séries, la notion de série étant considérée comme dérivant de celle de limite.

Dans le chapitre II intitulé *Dérivées et intégrales des fonctions de variables réelles*, les notions de dérivation et d'intégration sont étudiées simultanément. Il faut entendre par là que M. Baire a rapproché le plus qu'il lui a été possible l'étude des conditions de dérivabilité et d'intégrabilité en s'appuyant largement bien entendu sur les résultats acquis précédemment dans l'étude de la continuité. Après ces préliminaires il passe aux procédés d'intégration proprement dits puis étudie l'intégrale définie dans le cas où les limites deviennent infinies et les fonctions représentées par des intégrales définies. Après les fonctions implicites et les déterminants fonctionnels les paragraphes consacrés aux dérivées et aux différentielles d'ordre supérieur sont particulièrement dignes de remarque. Comme M. Baire le dit dans sa préface, il n'y a nullement avantage à rapprocher les différentielles d'ordre supérieur de celles de premier ordre en s'efforçant d'atténuer les différences très réelles qui existent entre ces expressions. Mieux vaut mettre rigoureusement et nettement ces différences en évidence car elles répondent à des nécessités analytiques qui peuvent être très diverses. Ainsi, partant de la formule

$$df = f_x' \, dx + f_y' \, dy + f_z' \, dz \; ,$$

M. Baire n'incite nullement le lecteur à se faire une idée préliminaire de ce que doit être la différentielle seconde $d^2 f$, idée d'après laquelle on devrait *calculer* cette nouvelle expression en considérant dx, dy, dz comme constants dans la formule précédente. En réalité, il y a là une double convention nettement mise en lumière. En premier lieu on attribue à dx, dy, dz des valeurs fixes et df n'est plus fonction que de x, y, z; en second lieu on donne à x, y, z dans la fonction df ainsi obtenue des accroissements respectivement égaux aux valeurs fixes choisies dans la première convention. Ceci est étendu à la formation de la différentielle d'ordre $n + 1$ en partant de la différentielle d'ordre n et l'extrême précision de l'exposé constitue sans doute une nouveauté en tant que forme didactique. Le chapitre se termine par l'étude de la genèse des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles et par l'intégration des différentielles totales.

Dans le chapitre III qui forme la dernière partie de ce premier volume, nous étudions les *Applications et extensions de la notion d'intégrale*. Il s'agit d'abord de l'évaluation des arcs et des aires. M. Baire montre d'abord rigoureusement dans quels cas l'arc et l'aire existent. L'aire notamment est définie indépendamment de la notion de limite ce qui, au premier abord, peut sembler paradoxal. L'aire d'un domaine quelconque est un nombre plus grand que l'aire de tout domaine polygonal contenu et plus petit que l'aire de tout domaine polygonal contenant le domaine considéré.

Dans ces conditions l'aire est bien une limite si l'on veut mais il y a cependant une distinction bien remarquable au point de vue philosophique. L'esprit humain a sans doute conçu une notion telle que l'aire avant d'en concevoir une telle que la limite, cette dernière n'étant venue que quand il a fallu *évaluer* l'aire.

Mais l'intérêt s'augmente encore singulièrement quand l'auteur arrive aux intégrales doubles et notamment à la question capitale du changement de variables dans de telles intégrales. Il étudie d'abord la transformation linéaire qui change un triangle en un triangle de telle sorte que l'aire du triangle transformé soit égale à celle du triangle primitif multipliée par un certain facteur constant $|D|$. A toute aire polygonale décomposable en triangles correspond une aire de même nature, le rapport de ces deux aires étant toujours $|D|$. Dans ces conditions, le changement de variables dans l'intégrale double revient à une semblable transformation de domaine et la présence du facteur $|D|$ dans l'intégrale transformée est ainsi justifiée. Ce résultat est ensuite étendu au cas d'un changement de variables quelconque, $|D|$ étant alors le déterminant fonctionnel habituellement considéré. Je connais des démonstrations plus courtes, mais je n'en connais pas de plus claires, ni de plus rigoureuses.

Dans l'étude des intégrales triples la marche suivie est la même. Le volume est défini dans l'espace par un procédé analogue à celui signalé tout à l'heure quant aux aires planes.

Le changement de variables est étudié d'abord dans le cas d'une transformation homographique changeant un tétraèdre en un tétraèdre, ces volumes jouant le même rôle que les triangles considérés plus haut à propos des intégrales doubles. Comme applications les centres de gravité et les moments d'inertie sont étudiés après les volumes. L'aire d'une surface courbe est aussi définie avec le plus grand soin. La surface est d'abord représentée au moyen de deux paramètres u et v, variables dans un domaine plan carrelé. Si ξ, η, ζ sont les développements tayloriens *arrêtés au premier ordre* des coordonnées x, y, z, on a ainsi des formules linéaires changeant un des carrés du domaine des u, v en un parallèlogramme susceptible de représenter une portion de la surface avec une approximation d'autant plus grande que cette portion est plus petite. Les derniers paragraphes sont consacrés aux intégrales de ligne et de surface ; on retrouve partout la même homogénéité, les mêmes procédés qui montrent combien M. Baire a réfléchi aux fondements de la science du continu et avec quel art délicat il a disséqué cette notion. Attendons nous a retrouver dans le second volume qui sera consacré aux fonctions analytiques toutes les qualités si heureusement réunies dans le premier quant aux fonctions de variables réelles.

A. Buhl (Montpellier).

P. Duhem. — **Etudes sur Léonard de Vinci.** Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. *Première série.* — 1 vol. in-8°, 355 p. ; 12 fr.; Hermann, Paris.

Avant de reposer dans les bibliothèques de Paris, de Milan ou de Windsor, les manuscrits de Léonard de Vinci ont éprouvé des vicissitudes sans nombre. Après la mort de leur auteur, dispersés par des héritiers insouciants, ils tombent entre des mains ignorantes ou habiles ; les unes les négligent, les autres savent les exploiter au profit d'un nouvel auteur.

Les précieuses feuilles voyagent en Europe, d'Italie en Espagne et en Angleterre, les collectionneurs se les disputent, des Mécènes en font cadeau aux bibliothèques et aux musées tandis que les rois les classent dans leur cabinet particulier ; elles servent même de trophée aux vainqueurs et passent d'un pays à l'autre suivant le sort des armes. Enfin, au moment où l'ère des tribulations semblait close, d'autres pillards autrement plus dangereux que les hommes de guerre, arrachaient des manuscrits les plus beaux feuillets qu'il fallut racheter à prix d'or quand le moment fut venu.

C'est le citoyen Venturi qui en 1797, fit connaître par des extraits des manuscrits de Léonard, la valeur des trésors scientifiques cachés sous l'écriture renversée lisible au miroir. Venturi et plus tard Guillaume Libri montrèrent que beaucoup de découvertes attribuées à des savants relativement modernes, tels que Palissy, Tartaglia, Cardan et même Pascal, se trouvaient sinon complètes, du moins en germe dans les œuvres de Vinci. La tradition semblait avoir été rompue entre Léonard et ses successeurs et péniblement, certains principes avaient été redécouverts par la postérité ignorante des œuvres du précurseur. Et peu à peu l'opinion se répandit que le progrès des sciences en Europe avait été retardé de plusieurs siècles, du fait que les travaux de Léonard étaient tombés dans l'oubli. La méconnaissance de ses œuvres aurait stérilisé le génie qui éclate à chaque page des fameux carnets et l'histoire des sciences se bornerait à enregistrer l'avortement de cet effort colossal.

C'est cette opinion que M. P. Duhem s'attache à réfuter dans une série d'études parues dans le *Bulletin italien* et réunies ici en un fort volume de 350 pages.

Ces notices sont consacrées à l'étude des rapports de Léonard avec ses prédécesseurs, ses contemporains et ses sncccesseurs.

Albert de Saxe d'abord, puis l'auteur du *Tractatus Ponderibus* que

M. Duhem appelle le Précurseur, Villalpand, Bernardino Baldi, Thémon, le fils du Juif, Cardan, Roberval et Descartes, Bernard Palissy et tant d'autres. Selon M. Duhem, Léonard n'est pas le grand solitaire autodidacte sans relation avec la science du Moyen-Age et sans influence sur la postérité.

« Léonard » dit l'auteur « ne nous apparaît donc plus comme un génie isolé dans le temps, sans lien avec le passé comme avec l'avenir, sans ancêtres intellectuels comme sans postérité scientifique, nous voyons sa pensée se nourrir des sucs de la science des siècles précédents pour féconder à son tour la science des siècles futurs ; maillon admirablement solide et brillant, il reprend sa place dans la chaîne de la tradition scientifique. »

Certes, si ce résultat est intéressant, la sagacité avec laquelle l'auteur l'établit est digne d'éloge. On se rend compte de la profondeur d'érudition nécessaire pour établir des comparaisons entre les auteurs de cette époque encore si obscure. Les bellcs publications de Ravaisson Mollien ou de l'Académie des Lyncei nous ont donné les manuscrits de Vinci dans toute leur véracité, la correspondance et les œuvres du P. Mersenne à l'affut de toutes les nouveautés scientifiques de son temps, nous renseignent il est vrai sur beaucoup d'événement oubliés. Mais le travail de M. Duhem met en évidence cette continuité latente qui existe dans le développement de la science et cet enchaînement des découvertes scientifiques. Un exemple des plus frappants est cité dans la partie du volume consacrée aux relations de Léonard avec Baldi, Roberval et Descartes. Des idées puisées par Léonard dans les œuvres d'Aristote, de Saint-Thomas d'Aquin ou d'Albert de Saxe, sont commentées à leur tour par Bernardini Baldi. Le P. Messenne provoque les efforts et les recherches de Roberval et de Descartes en leur faisant connaître les travaux de Baldi ; il attire l'attention du jeune Huggens sur certain problème de mécanique que celui-ci résoudra dans son célèbre traité de l'horloge à pendule. Les travaux d'Huggens sont donc issus par filliation directe, à deux siècles de distance, des pensées fécondes de Léonard.

Chacune des études fournit au lecteur un nouvel exemple de cet enchaînement de théories et de découvertes. Voici Cardan, l'auteur *De la Subtilité*, où M, Duhem découvre des analogies et rapprochements avec les notes du Vinci plagiées effrontément. Le livre de Cardan permet à Salomon de Caus d'établir ce grand principe : en aucune machine, le travail résistant ne peut excéder le travail moteur. « Lors donc » dit M. Duhem, ce que nous remontons jusqu'à l'origine des théories qui régissent la mécanique industrielle, nous les voyons naître de ce que Cardan a pris au Vinci.

En Paléontologie, même enchaînement, Cardan démarque Léonard et Bernard Palissy en polémiquant contre Cardan lui emprunte les principes fondamentaux de la Paléontologie.

Et voici la morale de l'histoire. « Comme Villalpand, comme Bernardino Baldi, comme tant d'autres de nos contemporains, Cardan fut un plagiaire ; mais en plagiant les idées de Léonard de Vinci, il les sauva de l'oubli ; grâce à la grande vogue de son livre étrange, il les sema partout et son manque de scrupules leur fit produire les découvertes dont elles portaient le germe. Celui qui mène les pensées humaines fait servir au progrès de la Science les plus petites faiblesses des savants. »

Les « Etudes » de M. Duhem sont remplies de remarques, de faits, d'analogies et constituent un document historique de premier ordre ; c'est un manuel pourrait-on dire, aux fins de s'orienter dans le dédale des auteurs et des plagiaires de la fin du moyen-âge et du commencement des temps modernes. Le lecteur éprouve le délicat plaisir de voir défiler les sophismes, paradoxes, erreurs et vérités que les savants des temps passés ont manié et se sont opposés les uns aux autres.

D'un coup d'œil embrassant plusieurs siècles de recherches, on assiste au développement de la théorie scientifique ; l'enchaînement des idées, la répercussion des œuvres les unes sur les autres, le triomphe des principes que l'expérience a établit provoquent un intérêt croissant de page en page.

Au premier plan, apparaît la figure de Léonard de Vinci et l'on admire cet homme qui s'est assimilé toute la science de son époque, qui a contrôlé et développé les quelques expériences des anciens que la doctrine arabe avait sauvé de l'oubli, qui a pratiqué plus qu'un autre la recherche expérimentale et l'observation des faits et dont le génie a jeté les bases de plusieurs sciences ; il se tient au seuil des temps modernes, pratiquant la méthode scientifique avant la lettre et réunissant dans son vaste cerveau comme dans une lentille, tout les rayons épars, qu'il réunit en un puissant faisceau dont l'éclat nous éblouit encore à quatre siècles de distance.

Alph. Bernoud, (Genève).

P. Treutlein. — **Mathematische Aufgaben** aus den Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen. I. Teil : *Aufgaben*. — 1 vol. in-8°, 158 p., 2 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Comme le titre l'indique, ce livre est un recueil de problèmes ayant été proposés aux élèves des gymnases du Grand Duché de Bade à leurs examens de maturité. Il a été écrit à l'instar de ce qui s'est fait en Prusse, en Bavière, en Wurtemberg et en Autriche où des ouvrages analogues ont déjà paru.

Non seulement ce volume pourra rendre de réels services aux instituteurs et aux élèves des écoles supérieures, par l'abondance et la variété des problèmes qu'il renferme, mais encore son importance en ce qui concerne l'histoire de l'enseignement mathématique dans les gymnases badois est manifeste. A une époque où l'on parle tant de la réforme de cet enseignement, ce point de vue là n'est certes pas l'un des moins essentiels. En consultant les plans d'étude et programmes se rapportant à divers collèges, on peut se rendre compte du but qu'on se propose d'atteindre, et, jusqu'à un certain point, des méthodes d'instruction en vigueur ; mais c'est en examinant les questions et problèmes proposés aux examens que l'on saura si ce but a été réellement atteint, et que l'on sera à même de juger de l'efficacité des méthodes employées.

Ce ne fut pas sans difficultés que l'auteur parvint à rassembler toutes ces questions proposées aux diverses épreuves de maturité. Dans les autres écoles allemandes, il était d'usage d'inscrire ces questions dans les rapports scolaires annuels ; mais ce n'était pas le cas pour les établissements badois. Cependant, après un travail de plusieurs années, l'auteur parvint à réunir 1663 problèmes proposés aux examens de diverses écoles. Pour certaines d'entre elles ces problèmes datent de 1870, pour d'autres de 1880 et pour d'autres enfin de 1890 seulement. En tête de chacun se trouvent indiqués la date de l'examen et le genre d'école où il a été proposé (Gymnasium, Realgymnasium ou Oberrealschule).

Il est à remarquer qu'avant 1868 on ne trouvait dans le Grand Duché de Bade que des « Gymnasien ». C'est de cette époque que datent les « Realgymnasien » qui depuis 1879 sont devenus analogues aux « Gymnasien ».

Quant aux « Oberrealschulen » elles n'apparaissent qu'en 1893. Ces trois sortes d'établissements ont à peu près les mêmes attributions et sont au nombre de 29 (1906). Les personnes qui désirent se renseigner au sujet des programmes et plans d'études de ces écoles trouveront des indications détaillées dans la préface du présent ouvrage.

Voici du reste la matière sur laquelle roulent les problèmes proposés :

I. *Arithmétique et Algèbre :* Equations du 1er, 2me et 3me degré; Equations de degré supérieur au 3me ; Analyse indéterminée ; Equations exponentielles ; Progressions arithmétiques et géométriques ; Intérêts composés, amortissements, rentes, etc. ; Fractions continues ; Analyse combinatoire ; Probabilités ; Binome de Newton ; Nombres complexes ; Séries ; Maxima et minima ; Expressions indéterminées.

II. *Géométrie :* Géométrie plane ; Goniométrie ; Trigonométrie plane ; Trigonométrie sphérique ; Géométrie de l'espace ; Géométrie analytique (droite, cercle, sections coniques).

Les questions sont cataloguées autant que possible d'après le sujet qu'elles traitent.

Les solutions seront publiées en un volume à part formant la seconde partie de cet ouvrage.

J.-P. Dumur (Genève).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

1. Sommaires des principaux périodiques :

Bulletin de la Société Française de Philosophie, publié par X. Léon et André Lalande, 7e année, 1907. — Colin, Paris.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von Emil Lampe. Bande 36. Jahrgang 1905. — G. Reimer, Berlin.

Heft 1 (p. 1 à 528). — Geschichte, Philosophie und Pädagogik. — Algebra. — Niedere und höhere Arithmetik. — Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Reihen. — Differential- und Integralrechnung. — Funktionentheorie. — Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Intermédiaires des mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Em. Lemoine, Ed. Maillet, A. Grevy. Tome XIV, 1907. — Gauthier-Villars, Paris.

Nieuw Archief vor Wiskunde, revue publiée par la Société scientifique d'Amsterdam et dirigée par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et P.-H. Schoute. 2me série, VII, 4e fasc., 1907. — Delsman et Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik, revue dirigée par C. Juel et V. Trier ; série A, 18me année ; série B, 18me année ; 1907. — Jul. Gjellerup, Copenhague.