deux points différents B et P, deux perpendiculaires de même longueur l, BA et PM, puis de tracer la droite AM.

En effet, si un point mobile se déplace dans le plan de la figure et au-dessus de Δ de manière à rester toujours à la distance l de Δ, il passera nécessairement par A et par M; or il décrit une droite D, donc cette droite coïncide avec AM; dès lors les droites BA et PM, perpendiculaires à Δ, le sont à la droite AM; donc le quadrilatère ABPM est bien un rectangle.

Si on traçait la seconde diagonale BM il est facile de démontrer qu'elle est égale à la première. En outre leur point de rencontre est le milieu de chacune d'elles.

Somme des angles d'un triangle.

4. *1er cas.* Triangle rectangle. — On a le théorème suivant:

Théorème II. Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires.

Considérons en effet le rectangle ABPM (fig. 2). La diagonale PA le partage en deux triangles rectangles égaux ABP et PMA. L'angle BAP a pour complément l'angle PAM, lequel est égal à l'angle APB. Donc dans le triangle rectangle ABP les deux angles aigus sont complémentaires. Or, ce triangle étant donné, on pourrait construire comme on vient de l'indiquer le rectangle ABPM; donc, d'une manière générale on peut dire: Dans tout triangle rectangle les deux angles aigus sont complémentaires.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Dans tout triangle rectangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

En effet: L'un des angles est droit et la somme des deux autres est égale à un droit; donc la somme des trois angles est égale à deux droits.

C. Q. F. D.

2e cas. Triangle quelconque. — On a le théorème suivant:

Théorème III. Dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux droits.

Du sommet A par exemple d'un triangle ABC, concevons que l'on mène la perpendiculaire AP sur le côté opposé BC. Si le point P est entre B et C l'angle A se trouve partagé en deux parties A_1 et A_2 dont il est la somme. Dans le triangle rectangle APB l'angle A_1 est le complément de l'angle B et on a : $A_1 + B = 1^{dr}$; de même le triangle rectangle APC donne : $A_2 + C = 1^{dr}$. En ajoutant ces relations membre à membre et remarquant que $A_1 + A_2 = A$ on obtient: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{dr}$.

Si le point P est d'un même côté des points B et C, à droite de C par exemple, on aura : $A = A_1 - A_2$; et les triangles rectangles APB et APC donneront : $\widehat{A_1} + \widehat{B} = 1^{dr}$ puis $\widehat{A_2} + (2^{dr} - \widehat{C}) = 1^{dr}$. Donc : par différence on obtient: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 2^{dr} = 0$ et par conséquent $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{dr}$ C. Q. F. D.

Remarque. — Soit CF le prolongement du côté BC d'un triangle ABC ; l'angle ACF est appelé *angle extérieur* au point C ; il a pour supplément l'angle $\widehat{C}$ du triangle ; il est donc égal à la somme $\widehat{A} + \widehat{B}$ des deux autres ; ainsi : Dans tout triangle un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.

Corollaire. — Le théorème qui précède conduit au suivant:

Théorème. — Dans tout polygone convexe la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois 2^{dr} que le polygone a de côtés, moins deux.

Soit n le nombre des côtés, la somme en question aura pour expression $(n - 2)$ fois 2^{dr} ou $(2n - 4)^{dr}$. Nous nous bornons à l'énoncé du théorème en ajoutant que la somme des angles extérieurs est constante et toujours égale à 4^{dr}.

Remarque particulière. — On sait que dans la géométrie non-euclidienne la somme des angles d'un triangle est inférieure à 2^{dr}. Soit $\delta = 2^{dr} - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})$, et désignons par S l'aire du triangle ABC. La constante K d'une telle géométrie peut se représenter par le rapport $\frac{S}{\delta}$ (Voir la note B sur le Postulatum d'Euclide dans la géométrie de M. Hadamard). A cause de l'axiome du début, qui a donné naissance au *rec-*

tangle, nous avons $\delta = 0$ et par suite $K = \infty$, ce qui établit la différence essentielle entre la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne.

Deuxième partie.

1. En tenant compte du théorème I, nous nous servirons du mot *parallèle* en lui attribuant une signification spéciale qui nous permettra de tirer parti de la définition suivante :

Définition. — On dit qu'une droite D *est* PARALLÈLE *à une droite* Δ *quand les deux droites sont dans un même plan et que la première a tous ses points à la même distance de la seconde.*

Cette définition se justifie à l'aide du théorème suivant :

Théorème I. Si deux droites sont perpendiculaires à une 3ᵉ, l'une d'elles est parallèle à l'autre.

Démonstration. — Dans le plan de la figure 3 considérons deux droites D et Δ respectivement perpendiculaires à la droite LL', la première au point A, la seconde au point B, nous allons prouver que la droite D est parallèle à la droite Δ, c'est-à-dire, puisqu'elles sont déjà dans le même plan, que les divers points de la droite D sont à la même distance $AB = l$ de la droite Δ. Soit un point P quelconque de la droite Δ, menons par ce point, du côté de la droite D la perpendiculaire PM à la droite Δ et prenons $PM = BA = l$. Si on trace AM on formera un rectangle ABPM (3, 1ʳᵉ partie). Le côté AM de ce rectangle est par suite perpendiculaire sur LL' au point A et par suite se confond avec la droite D qui est la seule perpendiculaire possible en ce point à la droite LL'. Le point M est donc sur la droite D et sa distance MP à la droite Δ est égale à l ou AB. Or dans le rectangle ABPM on a $AM = BP$. On peut donc considérer le point M comme un point quelconque de la droite D, puisque le point P est un point quelconque de Δ. Donc :

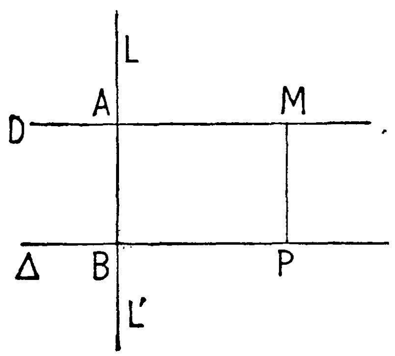

Fig. 3.