Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1907)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PARALLÉLISME ET TRANSLATION RECTILIGNE
Autor: Hioux, V.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10157

PARALLÉLISME ET TRANSLATION RECTILIGNE

Première Partie.

1. Quand un plan mobile glisse sur un plan fixe de manière que la droite qui joint deux points A et B du plan mobile soit constamment assujettie à coïncider avec une droite fixe Δ du plan fixe, on dit que le plan mobile est animé d'un mouvement de *translation rectiligne*, dont la direction est celle de la droite Δ, soit dans un sens, soit dans le sens contraire.

Soit M un point du plan mobile non situé sur AB. En tra-

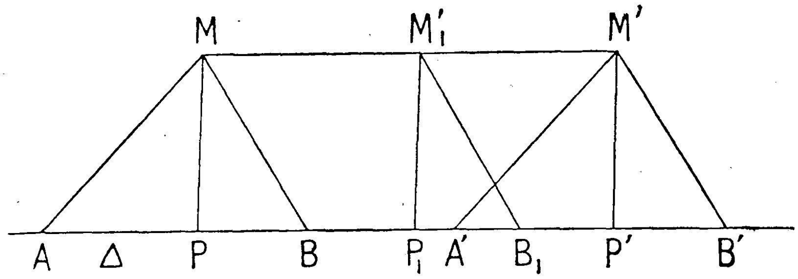

FIG. 1.

çant MA et MB on forme un triangle *invariable* que sa base entraîne par suite de son glissement sur la droite Δ. Soit MP la hauteur issue du point M. Dans le déplacement considéré du triangle MAB le sommet M décrit une *ligne* dont tous les points sont à la même distance $MP = l$ de la droite Δ.

Mais *a priori* on ne peut affirmer que le point M décrit une *ligne droite*.

Mais on peut vérifier facilement, au moins dans une *petite étendue*, que si le triangle a été amené de la position MAB à la position M'A'B' (fig. 1), le point M s'est déplacé, dans ses diverses positions sur le *segment* de droite MM'.

Supposons en effet que Δ soit une arête d'une règle maintenue fixe sur une feuille de dessin ; que le triangle MPB soit une face d'une équerre appliquée sur la même feuille et que l'on fait glisser en appuyant le côté PB de l'angle droit contre la règle. Après avoir déplacé l'équerre pour l'amener de la position MPB à la position M'P'B', traçons la droite MM' ; si nous amenons l'équerre dans une autre position quelconque M_1 P_1 B_1 entre les deux premières, nous constatons que le sommet M_1, autre position quelconque du sommet mobile M se trouve sur le *segment* de droite MM'.

Cette vérification expérimentale ayant lieu sur des segments de droite de longueurs différentes, on se trouve conduit à l'axiome suivant :

Axiome. — Dans un mouvement de translation rectiligne *on considère comme évident* qu'un point quelconque M du plan mobile décrirait une *droite indéfinie* si le mouvement se continuait indéfiniment soit dans un sens, soit en sens contraire.

2. Comme première conséquence de cet axiome nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème I. Quand un point mobile se meut dans un plan fixe de manière à rester constamment à la même distance l d'une droite Δ de ce plan, si l'on considère *comme évident* que le point mobile décrit une *droite indéfinie* D, la *perpendiculaire* menée à la droite Δ de chacune des positions du point mobile est également perpendiculaire à la droite D. — Démonstration : Soit M une certaine position du point mobile (fig. 2) ; menons MP perpendiculaire à la droite Δ, et d'une autre position *quelconque* A du point mobile menons AB perpendiculaire à la droite Δ. On a par hypothèse AB $=$ MP $= l$. Autour de MP, considérée comme une droite indéfinie, faisons tourner le demi-plan situé à sa gauche pour l'appliquer sur le demi-plan situé à sa droite. Le point B prendra sur la droite Δ une position B', symétrique de B par rapport à la perpendiculaire MP sur la droite Δ ; le seg-

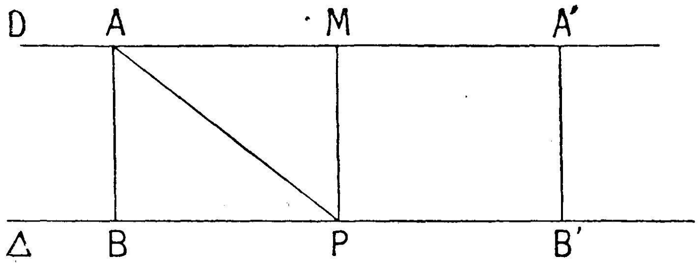

Fig. 2.

ment de droite BA se placera en B'A' perpendiculairement à la droite Δ et le point A' se confondra avec une nouvelle position du point mobile.

Mais, *si l'on considère comme évident* que les diverses positions A, A', M etc., etc. du point mobile appartiennent à une même droite D, le segment MA' est le prolongement du segment AM de cette droite D. Or les deux angles adjacents PMA et PMA' sont égaux par symétrie ; donc la droite PM, perpendiculaire sur la droite Δ, est aussi perpendiculaire sur la droite D.

Pour démontrer qu'il en est de même de BA par exemple, traçons la droite PA ; nous formons deux triangles PMA et PBA qui sont rectangles l'un au point M et l'autre au point B ; ils ont la même hypoténuse PA et un côté de l'angle droit égal : PM = BA = l ; donc ces triangles sont égaux et on a d'abord AM = BP. On a en outre : $\widehat{APB} = \widehat{PAB}$ et $\widehat{PAM} = \widehat{APB}$. Or la somme des deux angles aigus au point P vaut un droit ; donc il en est de même de la somme des angles aigus au point A. Donc : la droite AB, perpendiculaire à la droite Δ, l'est également à la droite D. On peut donc conclure que :

La perpendiculaire menée à la droite Δ de chacune des positions du point mobile est également perpendiculaire à la droite D.

C. Q. F. D.

Remarque. — Puisque les segments BA, PM, etc., sont perpendiculaires sur la droite D et ont tous la même longueur l, on voit que les distances à la droite D des divers points de la droite Δ sont les mêmes que les distances à la droite Δ des divers points de la droite D. Il y a donc, à ce point de vue, *réciprocité* entre les droites D et Δ.

3. RECTANGLE. — Le quadrilatère ABPM de la figure précédente a ses quatre angles droits ; on l'appelle un *rectangle*. On vient de prouver que la diagonale PA le partage en deux triangles rectangles égaux et que les côtés opposés de ce rectangle sont égaux 2 à 2. Pour construire un rectangle il suffit donc de mener à une droite Δ, d'un même côté, en

deux points différents B et P, deux perpendiculaires de même longueur l, BA et PM, puis de tracer la droite AM.

En effet, si un point mobile se déplace dans le plan de la figure et au-dessus de Δ de manière à rester toujours à la distance l de Δ, il passera nécessairement par A et par M; or il décrit une droite D, donc cette droite coïncide avec AM; dès lors les droites BA et PM, perpendiculaires à Δ, le sont à la droite AM; donc le quadrilatère ABPM est bien un rectangle.

Si on traçait la seconde diagonale BM il est facile de démontrer qu'elle est égale à la première. En outre leur point de rencontre est le milieu de chacune d'elles.

Somme des angles d'un triangle.

4. *1er cas.* Triangle rectangle. — On a le théorème suivant:

Théorème II. Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires.

Considérons en effet le rectangle ABPM (fig. 2). La diagonale PA le partage en deux triangles rectangles égaux ABP et PMA. L'angle BAP a pour complément l'angle PAM, lequel est égal à l'angle APB. Donc dans le triangle rectangle ABP les deux angles aigus sont complémentaires. Or, ce triangle étant donné, on pourrait construire comme on vient de l'indiquer le rectangle ABPM; donc, d'une manière générale on peut dire: Dans tout triangle rectangle les deux angles aigus sont complémentaires.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Dans tout triangle rectangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

En effet: L'un des angles est droit et la somme des deux autres est égale à un droit; donc la somme des trois angles est égale à deux droits.

C. Q. F. D.

2e cas. Triangle quelconque. — On a le théorème suivant:

Théorème III. Dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux droits.

Du sommet A par exemple d'un triangle ABC, concevons que l'on mène la perpendiculaire AP sur le côté opposé BC. Si le point P est entre B et C l'angle A se trouve partagé en deux parties A_1 et A_2 dont il est la somme. Dans le triangle rectangle APB l'angle A_1 est le complément de l'angle B et on a : $A_1 + B = 1^{dr}$; de même le triangle rectangle APC donne : $A_2 + C = 1^{dr}$. En ajoutant ces relations membre à membre et remarquant que $A_1 + A_2 = A$ on obtient: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{dr}$.

Si le point P est d'un même côté des points B et C, à droite de C par exemple, on aura : $A = A_1 - A_2$; et les triangles rectangles APB et APC donneront : $\widehat{A_1} + \widehat{B} = 1^{dr}$ puis $\widehat{A_2} + (2^{dr} - \widehat{C}) = 1^{dr}$. Donc : par différence on obtient: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 2^{dr} = 0$ et par conséquent $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{dr}$ C. Q. F. D.

Remarque. — Soit CF le prolongement du côté BC d'un triangle ABC ; l'angle ACF est appelé *angle extérieur* au point C ; il a pour supplément l'angle $\widehat{C}$ du triangle ; il est donc égal à la somme $\widehat{A} + \widehat{B}$ des deux autres ; ainsi : Dans tout triangle un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.

Corollaire. — Le théorème qui précède conduit au suivant:

Théorème. — Dans tout polygone convexe la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois 2^{dr} que le polygone a de côtés, moins deux.

Soit n le nombre des côtés, la somme en question aura pour expression $(n - 2)$ fois 2^{dr} ou $(2n - 4)^{dr}$. Nous nous bornons à l'énoncé du théorème en ajoutant que la somme des angles extérieurs est constante et toujours égale à 4^{dr}.

Remarque particulière. — On sait que dans la géométrie non-euclidienne la somme des angles d'un triangle est inférieure à 2^{dr}. Soit $\delta = 2^{dr} - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})$, et désignons par S l'aire du triangle ABC. La constante K d'une telle géométrie peut se représenter par le rapport $\frac{S}{\delta}$ (Voir la note B sur le Postulatum d'Euclide dans la géométrie de M. Hadamard). A cause de l'axiome du début, qui a donné naissance au *rec-*

tangle, nous avons $\delta = 0$ et par suite $K = \infty$, ce qui établit la différence essentielle entre la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne.

Deuxième partie.

1. En tenant compte du théorème I, nous nous servirons du mot *parallèle* en lui attribuant une signification spéciale qui nous permettra de tirer parti de la définition suivante :

Définition. — On dit qu'une droite D *est* PARALLÈLE *à une droite* Δ *quand les deux droites sont dans un même plan et que la première a tous ses points à la même distance de la seconde.*

Cette définition se justifie à l'aide du théorème suivant :

Théorème I. Si deux droites sont perpendiculaires à une 3e, l'une d'elles est parallèle à l'autre.

Démonstration. — Dans le plan de la figure 3 considérons deux droites D et Δ respectivement perpendiculaires à la droite LL′, la première au point A, la seconde au point B, nous allons prouver que la droite D est parallèle à la droite Δ, c'est-à-dire, puisqu'elles sont déjà dans le même plan, que les divers points de la droite D sont à la même distance $AB = l$ de la droite Δ. Soit un point P quelconque de la droite Δ, menons par ce point, du côté de la droite D la perpendiculaire PM à la droite Δ et prenons $PM = BA = l$. Si on trace AM on formera un rectangle ABPM (3, 1re partie). Le côté AM de ce rectangle est par suite perpendiculaire sur LL′ au point A et par suite se confond avec la droite D qui est la seule perpendiculaire possible en ce point à la droite LL′. Le point M est donc sur la droite D et sa distance MP à la droite Δ est égale à l ou AB. Or dans le rectangle ABPM on a $AM = BP$. On peut donc considérer le point M comme un point quelconque de la droite D, puisque le point P est un point quelconque de Δ. Donc :

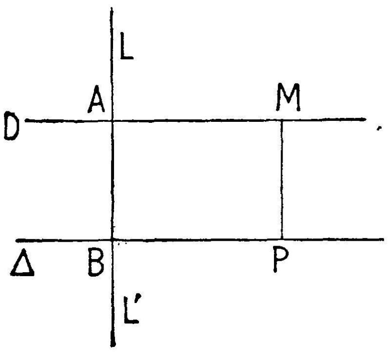

FIG. 3.

La droite D a ses divers points à la même distance l de la droite Δ; elle est donc parallèle à cette droite. C. Q. F. D.

Remarque. — Il est bon d'observer que BA, PM, etc., etc. peuvent être considérées comme des perpendiculaires menées des divers points de Δ à la droite D ; elles ont d'ailleurs toutes la même longueur BA $= l$. On voit ainsi, qu'au point de vue de la distance à l'une des deux droites des divers points de l'autre, il y a *réciprocité* entre les deux droites D et Δ.

Il suit de là que : Si la *première* est parallèle à la *seconde*, réciproquement la *seconde* est parallèle à la *première*.

On peut donc, conformément à l'usage, énoncer comme il suit le théorème précédent:

Théorème I. — Si deux droites, situées dans le même plan, sont perpendiculaires à une 3e, ces droites sont parallèles.

Corollaire. — Chacun des segments de droite AB, MP, etc. est à la fois perpendiculaire à la droite D et à la droite Δ, et de plus ils ont la même longueur l ; on est ainsi conduit à la double propriété suivante :

1° *Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre ;*

2° *Deux droites parallèles sont partout également distantes.*

On fait fréquemment usage de cette double propriété.

2. *Théorème II. — Si deux droites D et D′ sont parallèles à une même droite Δ, ces droites sont parallèles.*

Démonstration. — Dans le plan de la figure, qui est celui des trois droites, soit LL′ une perpendiculaire quelconque à la droite Δ. Cette droite LL′ est perpendiculaire à chacune des droites D et D′ qui sont parallèles à Δ. Donc, en vertu du théorème précédent les droites D et D′ sont parallèles.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si deux droites parallèles D et D′ ont un point commun M, ces droites se confondent.

Démonstration. — En effet soit LL′ la perpendiculaire à la droite D par exemple au point M, elle est aussi perpendiculaire à sa parallèle D′. Les deux droites D et D′ étant perpendiculaires à LL′ au même point M, se confondent.

C. Q. F. D.

Autrement: Les divers points de D′ par exemple sont, comme le point M, à une distance nulle de la droite D et réciproquement; donc ces deux droites ont tous leurs points communs et par suite se confondent.

C. Q. F. D.

3. *Théorème III. Par un point extérieur à une droite on peut mener une parallèle à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.*

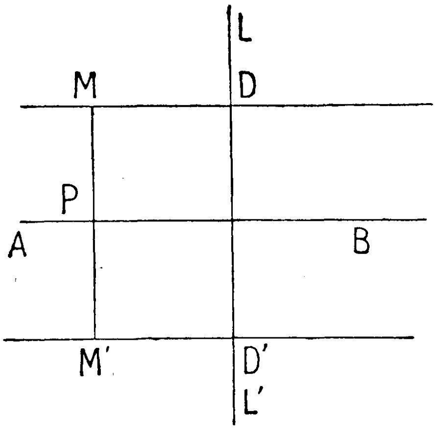

Fig. 4.

Démonstration. — Soit M un point extérieur à la droite AB (fig. 4). Menons à cette droite une perpendiculaire LL′, et du point M menons la perpendiculaire MD sur LL′. Cette droite sera parallèle à AB puisque l'une et l'autre sont perpendiculaires sur LL′. Donc :

1° On peut mener par le point M une parallèle à AB.

Imaginons par le point M une autre parallèle à AB ; on aurait deux droites parallèles à AB et par suite ces deux droites seraient parallèles ; mais à cause de leur point commun M elles se confondraient. Donc :

2° On ne peut mener par le point M qu'une seule parallèle à la droite AB.

C. Q. F. D.

Remarque. — Soit MP $= l$ la distance du point M à la droite AB : si du même côté de AB on se donne un point arbitraire du plan, sa distance à la droite AB sera supérieure à l s'il est au-dessus de MD, et inférieure à l s'il est placé entre MD et AB. On voit ainsi que :

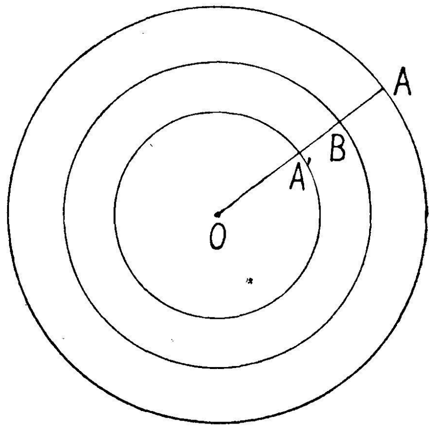

Fig. 5.

La parallèle menée par le point M à la droite AB est, d'un côté de cette droite le *lieu* des points qui en sont à la distance MP $= l$.

Soit M′ le symétrique du point M par rapport à la droite AB. La parallèle M′D′ à cette droite menée par le point M′ est évidemment de l'autre côté de cette droite le *lieu* des points qui en sont à la distance l. Le lieu complet des points situés à la distance l de la droite AB est donc l'ensemble des deux parallèles MD et M'D'.

Il en résulte immédiatement que le lieu des points équidistants des deux parallèles MD et M'D' est la droite AB, c'est-à-dire la parallèle menée aux deux premières par un point P qui en est équidistant.

Une question analogue se présente quand on considère le lieu des points situés à une distance $l < R$ d'une circonférence de centre O et de rayon $OB = R$. On *augmente* ou on *diminue* chaque rayon, c'est-à-dire chaque *normale* à la courbe d'une même longueur l. On obtient ainsi deux circonférences de rayon $OA = R + l$, et $OA' = R - l$, concentriques à la première.

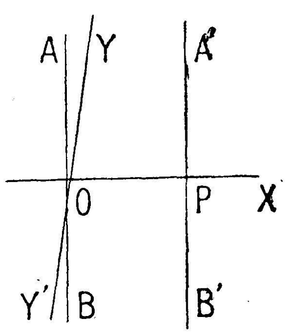

FIG. 6.

De pareilles courbes sont appelées *courbes parallèles*.

Dans l'exemple choisi on peut constater que la circonférence proposée est le lieu des points qui sont situés à la distance l des deux autres.

Théorème IV. — Si deux droites AB et A'B' sont parallèles, toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.

Soit Y'Y (fig. 6) une droite qui rencontre AB au point O et qui fait avec elle l'angle aigu AOY. Menons au point O la perpendiculaire OX sur AB. Cette droite est perpendiculaire sur A'B', soit P leur point de rencontre. L'angle YOX est le complément de l'angle aigu AOY, donc cet angle est aigu.

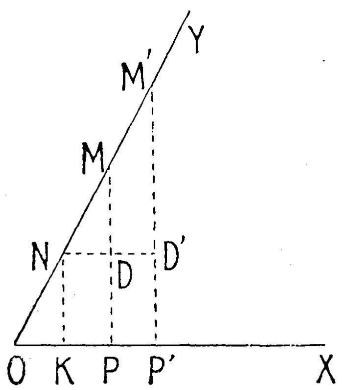

FIG. 7.

Nous sommes donc conduits à démontrer le théorème suivant :

Théorème V. — Toute droite perpendiculaire à un côté d'un angle aigu rencontre l'autre.

Lemme préliminaire. — Soit (fig. 7) un angle aigu ayant pour côtés les demi-droites OX et OY. Sur le côté OY par exemple prenons un segment ON de longueur l et soit $NK = d$ la distance de son extrémité N au côté OX ; si l'on prend sur OY des segments OM, OM′, etc. de même origine O et de longueurs

$$2l\,,\ 3l\,,\ 4l$$

les distances MP, M′P′, etc. de leurs extrémités au côté OX seront respectivement

$$2d\,,\ 3d\,,\ 4d\,,\ \text{etc., etc.}$$

Démonstration. — Soit OM $= 2\,l$; prouvons d'abord que MP $= 2\,d$. Pour cela menons MD perpendiculaire sur MP et par suite parallèle à OX. On observe que dans les deux triangles rectangles MPO et NKO les angles aigus en M et en N ont le même complément : l'angle aigu YOX ; donc si on considère les deux triangles rectangles MDN et NKO, on constate qu'ils ont leurs hypoténuses égales, MN $=$ NO $= l$ et un angle aigu égal ; donc ces triangles sont égaux et l'on a par suite MD $=$ NK $= d$. Mais dans le rectangle MKPD on a DP $=$ NK $= d$; donc MP $= 2\,d$. On verrait de même que si OM′ $= 3\,l$ on a M′P′ $= 3\,d$ et ainsi de suite. De sorte que si un segment OM pris sur le côté OY croît indéfiniment il en sera de même de la distance de son extrémité M à l'autre côté de l'angle aigu. Cela posé soit (fig. 8) un angle aigu YOX, nous allons montrer qu'une perpendiculaire quelconque au côté OX par exemple a deux points de part et d'autre du côté OY. Menons la demi-droite OZ perpendiculaire sur OX, du côté de OY. L'angle ZOY est le complément de l'angle YOX, c'est donc un angle aigu.

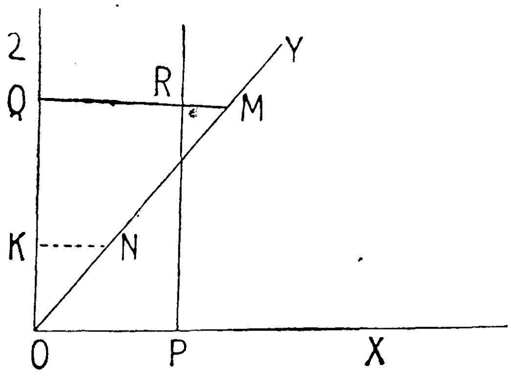

Fig. 8.

Prenons sur OY un segment ON $= l$ et soit NK $= d$ la distance de son extrémité N au côté OZ. Sur OX prenons une longueur *arbitraire* OP. Nous aurons soit OP $= nd$, soit $nd <$ OP $< (n + 1)\,d$, n désignant un nombre entier. Dès lors, si sur OY nous prenons un segment OM égal ou supérieur à $(n + 1)\,l$, ce qui est toujours possible, quelque grand que soit le nombre entier n, la distance MQ du point M au côté OZ de l'angle aigu ZOY sera égale ou supérieure à $(n + 1)\, d$. On aura par suite $QM > OP$. Soit sur QM un segment $QR = OP$, le point R sera entre le point Q et le point M. Or la perpendiculaire en P sur OX est parallèle à OZ et, comme à droite de OZ, c'est le lieu des points situés à la distance PO de OZ, elle passe par le point R situé dans l'angle ZOY. Donc :

La perpendiculaire en un point quelconque P au côté OX a deux points P et R de part et d'autre du côté OY ; donc cette perpendiculaire doit rencontrer OY. C. Q. F. D.

Corollaire. — Si deux droites AB et A′B′ sont parallèles, toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.

Démonstration. — Soit Y′Y (fig. 6) une droite qui rencontre AB au point O, il faut prouver qu'elle rencontre sa parallèle A′B′. Pour cela menons en O la perpendiculaire OX sur A′B′. Cette droite qui est aussi perpendiculaire sur AB fait avec la demi-droite OY un angle aigu YOX complémentaire de l'angle aigu AOY. Soit P le point de rencontre de OX avec A′B′ ; la droite PA′ perpendiculaire au côté OX de l'angle aigu YOX doit rencontrer le côté OY.

Donc la droite Y′Y qui rencontre AB en O doit rencontrer sa parallèle A′B′. C. Q. F. D.

Remarque. — L'angle P est droit et l'angle POY est aigu ; leur somme est donc inférieure à deux droits ; si on remplace POY par son supplément POY′ on aura une somme supérieure à deux droits. La rencontre aura lieu du côté de OP où cette somme est inférieure à 2 droits.

On appelle *sécante* une droite qui rencontre deux droites parallèles.

Angles formés par deux droites parallèles coupées par une sécante.

Théorème VI. — Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante :

1° Deux angles correspondants sont égaux ;

2° Deux angles alternes-internes sont égaux;

3° Deux angles intérieurs d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

Démonstration. — Considérons (fig. 9) les deux parallèles AB et A'B' coupées en C et C' par la sécante SS'. Nous allons prouver d'abord que les angles correspondants $\widehat{SCB}$ et $\widehat{SC'B'}$ sont égaux. Pour cela, d'un point arbitraire M de CS menons MP perpendiculaire sur AB et par suite sur sa parallèle A'B' qu'elle rencontre en P'. Les deux triangles rectangles MPC, MP'C' ont un angle aigu commun au point M. Cet angle a pour complément d'une part $\widehat{SCB}$ et d'autre part $\widehat{SC'B'}$; donc ces deux angles correspondants sont égaux. C. Q. F. D.

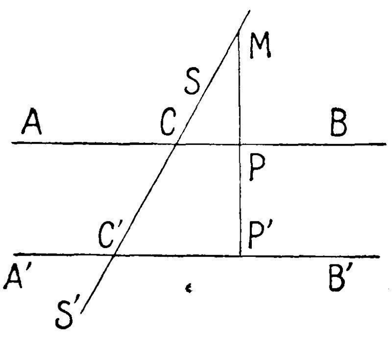

Fig. 9.

Les deux autres parties de l'énoncé sont des conséquences immédiates de la première.

Théorème VII. — Réciproquement: Deux droites coupées par une sécante sont parallèles:

1° Si deux angles correspondants sont égaux;

2° Si deux angles alternes-internes sont égaux;

3° Si deux angles intérieurs d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

Démonstration. — Supposons (fig. 13) que la sécante SS' rencontre en C et C' les deux *droites* AB et A'B' de manière que les angles correspondants SCB et SC'B' soient égaux. D'un point M de CS menons MP' perpendiculaire sur A'B' et soit P son point de rencontre avec AB. Dans le triangle rectangle MP'C' l'angle en M a pour complément l'angle MC'B'. Or, par hypothèse $\widehat{SCB} = \widehat{SC'B'}$; donc dans le triangle MPC la somme des angles aigus en M et en C vaut un droit; donc l'angle P est droit. Donc MP' perpendiculaire sur A'B' est aussi perpendiculaire sur AB. Il en résulte que les droites AB et A'B' perpendiculaires sur une même droite sont parallèles. C. Q. F. D.

Les deux autres réciproques se ramènent à la première.

Corollaire. — Si deux angles ont leurs côtés parallèles deux à deux, soit de même sens, soit de sens contraires, ces angles sont égaux.

Si deux des côtés sont parallèles et de même sens et les deux autres parallèles de sens contraires, les deux angles sont supplémentaires.

Enfin, comme autre conséquence on démontre que :

Si deux angles ont leurs côtés perpendiculaires ils sont égaux s'ils sont de même nature, et ils sont supplémentaires quand ils sont de nature différente.

Translation rectiligne d'une figure plane. Composition de deux translations.

6. Parallélogramme. — Si on coupe un système de deux droites parallèles AB, A′B′, par deux sécantes parallèles AA′ et BB′, on forme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles 2 à 2; un tel quadrilatère s'appelle un *parallélogramme.*

On démontre facilement qu'une diagonale AB′ par exemple la partage en deux triangles égaux. On a par suite : $AB = A'B'$ et $AA' = BB'$. Donc :

Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux 2 à 2. On dit habituellement*:* Les portions de deux droites parallèles comprises entre parallèles sont égales.

On voit de même que dans un parallélogramme deux angles opposés sont égaux et que deux angles consécutifs sont supplémentaires. Enfin, signalons encore la propriété suivante :

Si dans un quadrilatère deux côtés sont à la fois égaux et parallèles la figure est un parallélogramme.

Cela posé, reportons-nous au début de la *première partie.* Par une translation rectiligne de direction Δ le triangle MAB a passé de sa première position a une 2e M′A′B′. Si on considère les côtés AM et A′M′ on constate qu'ils forment avec la sécante Δ deux angles correspondants égaux $\widehat{A'} = \widehat{A}$. Donc AM et A′M′ sont deux droites parallèles. Il en est de même de BM et de B′M′. D'ailleurs, dans le déplacement considéré, le sommet M est resté constamment à la même distance MP de la droite Δ ; il a donc décrit un segment de droite MM′ parallèle à la droite Δ.

On voit par conséquent que le quadrilatère AA′M′M est un parallélogramme ainsi que le quadrilatère BB′MM′.

On a donc $AA' = MM'$ et de même $BB' = MM'$.

Un point quelconque de la figure mobile, non situé sur la directrice Δ forme avec le segment AB de cette droite un triangle invariable analogue au triangle MAB ; son déplacement s'effectue par conséquent dans les mêmes conditions que celui du point M. On peut donc énoncer le théorème suivant :

7. *Théorème.* — Dans la translation rectiligne d'une figure plane dans son plan :

1° Les divers points de la figure mobile décrivent des droites parallèles à la directrice Δ de la translation et par suite parallèles entre elles ;

2° Quand la figure a été amenée d'une première position à une deuxième ses divers points ont décrit des segments de droites de même longueur ;

3° D'une manière générale : Deux positions quelconques d'un segment de droite, non parallèle à la directrice Δ, sont deux côtés opposés d'un parallélogramme.

Corollaire. — Quand deux droites D et D′ sont parallèles on peut toujours amener l'une d'elles en coïncidence avec l'autre par une translation tout à fait arbitraire.

Démonstration. — En effet coupons le système des deux parallèles par deux sécantes parallèles quelconques AA′ et BB′ ; nous obtenons un parallélogramme AA′B′B. Faisons subir à la droite D une translation égale et parallèle à AA′ ; le segment AB se déplacera parallèlement à lui-même et comme $AA' = BB'$ les points A et B viendront simultanément coïncider, le premier avec A′ et le second avec B′ ; dès lors, la droite D coïncidera avec sa parallèle D′.

C. Q. F. D.

Certains auteurs invoquent cette propriété pour *définir* le parallélisme de deux droites ; ils utilisent en outre la composition de deux translations rectilignes, propriété par laquelle nous allons terminer cette étude.

8. Composition de deux translations rectilignes de directions différentes.

Par une translation parallèle à la direction Δ et de grandeur AA' un segment de droite AB de la figure mobile est venu en $A'B'$, ce qui donne le parallélogramme $AA'B'B$. Par une autre translation de directrice Δ' égale à $A'A''$ le segment de droite $A'B'$ est venu en $A''B''$ et on a le parallélogramme $A'A''B''B'$.

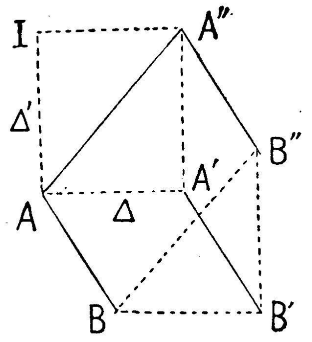

Fig. 10.

Or on sait que $A''B''$ est égal et parallèle à AB, donc la figure $AA''B''B$ est également un parallélogramme. On pourra par conséquent par une translation *unique* égale et parallèle à AA'' amener le segment de droite AB sur $A''B''$.

Or le déplacement du segment AB entraîne celui des divers points de la figure et on peut observer que : *La translation unique AA'' est la diagonale du parallélogramme $AA'A''I$ dont les côtés AA' et AI représentent les directions et les grandeurs des translations rectilignes composantes.*

V. Hioux (Paris).

SUR LES CONGRUENCES DU TROISIÈME DEGRÉ[1]

Dans le chapitre IX de son Etude des fonctions arithmétiques M. Arnoux établit, à l'aide de sa méthode graphique, les propriétés caractéristiques des congruences du troisième degré. Ces propriétés ne sont pas nouvelles, mais je les crois peu connues ; et il ne serait peut-être pas inutile de rappeler qu'elles se déduisent très simplement d'un théorème impor-

[1] A propos du livre de M. G. Arnoux : « Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques ». — (Voir l'analyse de l'ouvrage dans le précédent n°, p. 326-329. *Réd.*).