Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1907)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DISCUSSION ET LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU PREMIER DEGRÉ

Autor: Méray, Ch.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10156

SUR LA DISCUSSION ET LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU PREMIER DEGRÉ

1. — Cette théorie est capitale dans toute l'Analyse mathématique, et cependant son exposition n'a jamais eu une limpidité suffisante pour ne laisser aucune obscurité dans l'esprit des élèves. C'est ainsi que dès le Baccalauréat, le cas de deux inconnues, le seul exigé, est presque toujours évité par les candidats quand il est laissé à leur choix parmi trois sujets de composition, et que, pendant les 38 années de ma carrière d'examinateur, je n'en ai pour ainsi dire pas rencontré un seul qui ait pu me faire sur cette question des réponses ne soulevant aucune objection.

Ce manque de netteté tient d'abord à la nature synthétique presqu'à l'excès, des moyens employés. On commence, en effet, par construire des expressions spéciales, les déterminant, au gré de règles ne laissant apercevoir avec la question, aucun rapport même éloigné, et on poursuit à l'aventure, par des passes de prestidigitation exécutées sur ce matériel dont rien, en dehors de la réussite, ne vient expliquer la nécessité et l'exacte adaptation. D'autre part, et c'est en bonne partie une conséquence de ces vues artificielles, on s'obstine à prendre pour thème du sujet, un système où le nombre des équations est égal à celui des inconnues (comme si l'égalité de ces deux nombres était une donnée imposée par quelque fatalité), et *dont la nature n'a pas été précisée autrement ;* c'est à peu près comme si l'on voulait faire la théorie de l'équation du deuxième degré, sans distinger le cas où le coefficient de x^2 est nul, de celui où il ne l'est pas. Une telle marche conduit à des formules de résolution exigeant une discussion dont les incidents sont très variés, dont il est quasi-impossible de renfermer les résultats dans un seul énoncé bref et précis.

Mais l'obscurité disparait, dès que l'on consent à raisonner sur les systèmes *réduits* ; j'y vais revenir [1], en simplifiant toute la question dans une mesure et sous une lumière qui me paraissent ne laisser plus rien à désirer.

2. — Etant donné un système quelconque d'équations simultanées du premier degré, dans chacune desquelles tous les termes ont été reportés au premier membre, on marque les rôles relatifs joués dans la question par les coefficients, en les écrivant en *abaque*, c'est-à-dire en inscrivant leurs notations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, disposées par *files* horizontales ou *lignes*, et simultanément par files verticales ou *colonnes*, cela de manière que les coefficients des diverses inconnues x, y, z,... et le terme indépendant d'elles dans chaque équation, soient toujours placés sur une même ligne, et que, dans les diverses équations du système, ceux de chaque même inconnue, les termes indépendants aussi, le soient toujours sur une même colonne.

S'il existe quelque groupe de solutions x', y', z',... chaque équation montrera que son terme indépendant est la somme des produits des coefficients de x, y, z,... par les mêmes quantités $-x'$, $-y'$, $-z'$..., ce que nous exprimerons en disant que, dans l'abaque du système, la colonne des termes indépendants est *composée homolinéairement de celles des coefficients de x, y, z,... au moyen des multiplicateurs $-x'$, $-y'$, $-z'$,... afférents à ces dernières colonnes.*

Si, d'autre part, quelque ligne de l'abaque est pareillement composée de ses autres lignes, le premier membre de l'équation correspondante est une fonction linéaire et homogène de ceux des autres équations, *homolinéaire* dirons-nous pour abréger ; il s'annule ainsi en même temps qu'eux tous simultanément, cette équation est satisfaite par tout groupe de solutions appartenant aux autres équations seulement ;

---

[1] V. mon *Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants.* — 1884 Gauthier-Villars.

on peut donc la supprimer en réduisant au système de ces dernières seulement, tout le proposé dont le sort est le même.

Ces premières observations font pressentir le rôle dominant joué dans la question par cette notion de composition d'une file, de nom, ou *sens*, quelconque, relativement à ses homonymes, ou *parallèles ;* nous commencerons donc par développer tout ce qui s'y rattache immédiatement.

3. — Nous écrirons l'abaque

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1\ ,\ b_1\ ,\ c_1\ ,\ \ldots\ ,\ g_1\ ,\ h_1\ , \\ a_2\ ,\ b_2\ ,\ c_2\ ,\ \ldots\ ,\ g_2\ ,\ h_2\ , \\ a_3\ .\ b_3\ ,\ c_3\ ,\ \ldots\ ,\ g_3\ ,\ h_3\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_M,\ b_M,\ c_M,\ \ldots\ ,\ g_M,\ h_M. \end{array}\right.$$

notation montrant d'elle-même ce que nous entendrons par *les lignes* 1, 2, 3,..., M, par *les colonnes* a, b, c..., g, h, et nous nommerons : *ses éléments,* toutes les quantités a_1, b_1, c_1..., g_1. h_1, a_2, ..., ..., a_M, b_M, c_M, ..., g_M, h_M, indistinctement, qui le composent, *sa hauteur,* le nombre M de ses lignes, *sa largeur,* le nombre de ses colonnes que nous représenterons par N, ce qui donne MN pour le nombre total des éléments. Des éléments en nombre quelconque sont *enfilés* s'ils appartiennent à quelque même file, *enlignés* ou *encolonnés* suivant le cas.

D'après cela, si la colonne a est composée (homolinéairement) des autres (**2**), c'est qu'il existe entre a_1, a_2, a_3, ..., a_M et tous leurs enlignés dans les autres colonnes, les relations uniformes

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 = \beta b_1 + \gamma c_1 + \ldots + \varkappa g_1 + \eta h_1\ , \\ a_2 = \beta b_2 + \gamma c_2 + \ldots + \varkappa g_2 + \eta h_2\ , \\ a_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_M = \beta b_M + \gamma c_M + \ldots + \varkappa g_M + \eta h_M, \end{array}\right.$$

où β, γ, ..., $\varkappa$, η sont les multiplicateurs afférents aux colonnes dont la première est composée. La composition de la ligne 1 au moyen des autres s'exprimerait par

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \dots + \lambda_M a_M\ , \\ b_1 = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 + \dots + \lambda_M b_M\ , \\ c_1 = \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ h_1 = \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3 + \lambda_4 h_4 + \dots + \lambda_M h_M\ , \end{array}\right.$$

les multiplicateurs afférents à ces dernières lignes étant ici λ_2, λ_3, ..., λ_M.

4. — Nous faciliterons beaucoup le langage en disant que, pour certaines valeurs des éléments, l'abaque est *vanescent* ou *invanescent, par ses files d'un sens donné,* selon que quelqu'une de ces files est composée de ses parallèles, (2), (3), ou qu'aucune d'elles ne l'est.

Il est utile de noter les observations suivantes.

I. *La vanescence de l'abaque, comme son invanescence, est indépendante des ordres dans lesquels ses lignes et colonnes peuvent être écrites.* Car une modification dans ces dispositions ne fait que changer l'ordre de succession des équations dans le système (2) ou (3), et celui des termes du second membre dans chaque équation.

II. *Par ses files du sens donné, l'abaque est toujours vanescent :*

1° *Quand une de ces files contient des éléments tous nuls* Car s'il s'agit des colonnes par exemple et de la première, les relations (2) auront lieu en y prenant

$$\beta = \gamma = \dots = \varkappa = \eta = 0\ .$$

2° *Quand l'abaque partiel laissé par l'ablation de quelques-unes de ces files est lui-même vanescent de la manière indiquée.* Car si l'on a par exemple

$$\begin{array}{l} a_1 = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3\ , \\ b_1 = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3\ , \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ h_1 = \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3\ , \end{array}$$

on rendra les relations (3) exactes en y prenant

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \dots = \lambda_M = 0 .$$

3° *Quand les éléments sont tous nuls dans quelques files de l'autre sens, si l'abaque partiel laissé par l'enlèvement de ces dernières est vanescent de la manière considérée.* Car s'il en est ainsi pour les lignes montrant les indices 1, 2, et si les M — 2 dernières relations (2) ont lieu, les 2 premières ont lieu d'elles-mêmes, toutes forcément ainsi, puisque

$$a_1 = b_1 = c_1 = \dots = h_1 = 0 ,$$

et

$$a_2 = b_2 = c_2 = \dots = h_2 = 0 .$$

III. *La vanescence de l'abaque par les files d'un sens, entraîne celle de l'abaque partiel qu'y laisse la suppression de files quelconques de l'autre sens.*

5. — La question qui nous occupe ramène à chaque instant, des polynomes entiers par rapport aux MN éléments de l'abaque, regardés comme autant de variables indépendantes, qui, *non nuls identiquement, le deviennent chaque fois que ces variables prennent des valeurs pour lesquelles l'abaque est vanescent par ses files d'un sens donné*, (**4**), qui présentent en outre le caractère particulier *d'être homolinéaire par rapport aux éléments de chacune de ces files, considérés isolément.* Nous les nommerons des *covanescents* de l'abaque, *pour ses files du sens indiqué.*

Nous commencerons par étudier leur structure, en supposant qu'il *s'agit des lignes* pour fixer les idées, en représentant par **L** un polynome indéterminé parmi ceux qui ont la forme précisée ci-dessus relativement aux éléments *des lignes,* puis en cherchant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit un covanescent *pour les lignes.*

I. *Soit*

$$\mathbf{L} = A_1 a_1 + B_1 b_1 + \dots + G_1 g_1 + H_1 h_1 \tag{4}$$

l'ordination de ce polynome par rapport aux éléments de la ligne 1 de l'abaque, par exemple, où

$$A_1 , B_1 , \dots , G_1 , H_1 \tag{5}$$

sont indépendants des éléments de cette ligne,

$$(6) \qquad a_1, b_1, \dots, g_1, h_1 .$$

Si M $=$ 1, *les quantités* (5) *se réduisent à des constantes.*

Si M $>$ 1, *il faut que* A_1, *soit indépendant des éléments de la colonne aussi de* a_1, *covanescent en outre (pour les lignes) de l'abaque partiel* $\{a_1\}$ *laissé dans* (1) *par la suppression de ces deux files non parallèles contenant* a_1 ; *et de même pour* $B_1, \dots, G_1, H_1$, *relativement aux colonnes de* $b_1, \dots, g_1, h_1$, *et aux abaques partiels* $\{b_1\}, \dots, \{g_1\}, \{h_1\}$.

1° Quand M $=$ 1, les éléments (6) sont les seuls composant l'abaque, et les quantités (5), qui n'en dépendent pas, sont ainsi des constantes.

2° Quand M $>$ 1, ces polynomes (5) sont, comme **L**, homolinéaires par rapport aux éléments d'une autre ligne quelconque i,

$$(7) \qquad a_i, b_i, \dots, g_i, h_i ,$$

et, pour A_1, on a ainsi

$$(8) \qquad A_1 = A_{1,a} a_i + A_{1,b} b_i + \dots + A_{1,g} g_i + A_{1,h} h_i .$$

où $A_{1,a}, \dots, A_{1,h}$ ne dépendent d'aucun des éléments des lignes (6), (7).

En attribuant maintenant la valeur commune 0 à tous les éléments de ces deux lignes, autres que a_1, a_i, l'une au moins de celles-ci devient composée de l'autre (**3**) quels que soient a_1, a_i, ce qui rend l'abaque vanescent (par les lignes), donne en conséquence **L** $= 0$. Car, si a_1 est nul aussi, ou bien a_2, tous les éléments d'une même ligne s'évanouissent (**4**, II, 1°). Sinon, $a_1 = (a_1 : a_i)\, a_i$ par exemple, et la ligne d'indice 1 est composée de celle d'indice i, le multiplicateur de celle-ci étant $a_1 : a_i$. Or ces attributions numériques réduisent A_1 à $A_{1,a} a_i$ (8), **L** par suite à $A_{1,a} a_1 a_i$ (4) ; d'où $A_{1,a}\, a_1\, a_i = 0$, quels que soient a_1, a_i, ceci exigeant $A_{1,a} = 0$.

L'indice i étant arbitraire, on voit que A_1 est bien indépendant de tout élément de la colonne des a.

3° Quand l'abaque partiel $\{a_1\}$, à M — 1 lignes et N — 1 colonnes, savoir

$$(9)\quad \left\{\begin{matrix} b_2\,, & c_2\,, & \ldots\,, & g_2\,, & h_2\,, \\ b_3\,, & . & . & . & h_3\,, \\ . & . & . & . & . \\ b_M, & c_M, & \ldots\,, & g_M, & h_M\,. \end{matrix}\right.$$

devient vanescent, le suivant à M — 1 lignes et N colonnes,

$$\begin{matrix} 0\,, & b_2\,, & c_2\,, & \ldots\,, & g_2\,, & h_2\,, \\ 0\,, & b_3\,, & . & . & . & h_3\,, \\ . & . & . & . & . & . \\ 0\,, & b_M\,, & c_M\,, & . & . & h_M, \end{matrix}$$

le devient aussi (**4**, II, 3°), et encore, quel que soit a_1, cet autre

$$\left.\begin{matrix} a_1, & 0\,, & 0\,, & \ldots\,, & 0\,, & 0\,, \\ 0\,, & b_2\,, & c_2\,, & \ldots\,, & g_2\,, & h_2\,, \\ 0\,, & b_3\,, & . & . & . & h_3\,, \\ . & . & . & . & . & . \\ 0\,, & b_M, & c_M, & \ldots\,, & g_M, & h_M, \end{matrix}\right\}\quad (Ib.,\ 2°)\,,$$

auquel le proposé (1) se réduit, pour

$$b_1 = c_1 = \ldots = g_1 = h_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = a_3 = \ldots = a_M = 0\,.$$

Or ces attributions numériques réalisées dans (4) réduisent **L** à $A_1 a_1$, puisque A_1 est indépendant, tant de ces 2 (M — 1) éléments, que de a_1 (2°). Quel que soit a_1, on a donc

$$A_1 a_1 = 0\,, \quad \text{d'où} \quad A_1 = 0\,,$$

ceci montrant que A_1 est un covanescent de l'abaque $\{a_1\}$ figuré en (9).

4° Pour les autres polynomes du groupe (5), les raisonnements sont les mêmes, sauf des notations différentes.

II. Désormais, nous supposerons > 1, la hauteur M de l'abaque, ainsi que sa largeur N, et nous dirons *défilés*, des éléments en nombre quelconque, dont deux ne sont jamais enfilés (**3**). Tels sont : a_1, b_2, ou a_2, b_1, ou a_1, b_2, c_3, ou b_1, a_2,

c_3, ou a_1, b_2 c_3, d_4, etc., ou..., groupes dans chacun desquels deux éléments quelconques ne sont, ni enlignés, ni encolonnés.

Dans le développement général (en termes élémentaires dissemblables) du polynome **L** *ordonné par rapport à la totalité des éléments de l'abaque, il faut que tout terme de coefficient* $q \neq 0$, *soit le produit de* q *par* M *élément défilés.*

Car si un tel terme contenait deux facteurs variables enlignés, le polynome **L** ne serait pas linéaire par rapport aux éléments de la ligne de ces facteurs *(supr.)*. S'il contenait deux facteurs variables encolonnés, l'ordination de **L** par rapport aux éléments de la ligne de l'un d'eux, e_i, donnerait à e_i un coefficient non indépendant de tous les éléments de la colonne des e (I). S'il contenait moins de M facteurs de ce genre, le même polynome ne serait pas homogène par rapport aux éléments de quelque même ligne *(supr.)*

En d'autres mots, il faut que les notations des M éléments facteurs d'un tel terme, montrent les M indices différents 1, 2, 3, ..., M, affectant M lettres différentes aussi.

III. — On forme les *arrangées* de ν objets différents, de nature quelconque, en les concevant simultanément (avec ou sans figuration par l'écriture) dans tous les ordres de succession réalisables. Deux arrangées sont *identiques,* quand chacun des ν objets est au même rang dans l'une et dans l'autre, *différentes* quand il n'en est pas ainsi. On sait que le nombre des arrangées différentes est 1. 2. 3.... ν.

Une *permutation* de ces objets dans une arrangée est un déplacement simultané de tout ou partie seulement d'entre eux, qui la change en un autre (identique parfois, à la rigueur). Elle prend le nom spécial de *transposition* de deux objets, dans le cas très remarquable, où, ν étant > 1, elle consiste à déranger deux objets seulement, pour remettre chacun d'eux à la place que l'autre occupait.

La transposition de deux files parallèles de l'abaque (1) est leur transposition définie à l'instant, moyennant conception préalable de l'abaque comme une arrangée de toutes les files de ce sens, considérées chacune comme un seul objet. Cela posé :

Il faut que la transposition de deux lignes quelconques, i, j, dans la notation du polynome **L**, *change son signe sans modifier sa valeur, c'est-à-dire plus proprement, qu'elle équivaille à sa multiplication par* — 1, *changeant ainsi* **L** *en* — **L**.

1° L'ordination de **L** par rapport aux éléments de ces deux lignes, considérés indistinctement, ne donne que des termes de la forme

$$Q e_i f_j \ ,$$

où les éléments ordonnateurs mis en évidence sont notés par deux lettres différentes, comme leurs indices, le coefficient Q ne dépendant que des éléments de l'abaque, étrangers, tant aux colonnes de lettres e, f, qu'aux lignes considérées, d'indices i, j. Car si l'un de ces deux éléments manquait, **L** ne serait pas homogène par rapport à tous ceux de sa ligne ; si leurs lettres étaient identiques, le développement général de **L** contiendrait des termes $\neq 0$ dont les facteurs e_i, e_j seraient encolonnés (II) ; si le polynome Q dépendait de quelque élément appartenant à une des quatre files exclues, un fait analogue impossible se présenterait d'une manière ou de l'autre. Cette ordination donne donc

$$\text{(10)} \qquad \mathbf{L} = (\mathrm{P}' a_i b_j + \mathrm{P}'' b_i a_j) + (\mathrm{Q}' a_i c_j + \mathrm{Q}'' c_i a_j) + \dots \\ + (\mathrm{T}' g_i h_j + \mathrm{T}'' h_i g_j) \ ,$$

le nombre total des termes étant N(N — 1), les coefficients tels que Q, ayant été représentés par

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{P}', \ \mathrm{P}'', \ \mathrm{Q}', \ \dots , \ \mathrm{T}'' \ ,$$

et les deux termes dont les éléments ordonnateurs appartiennent à chaque paire de colonnes, ayant été toujours groupés entre parenthèses pour plus de clarté.

2° En donnant ensuite les noms α, β, γ, ..., $\varkappa$, η, à N quantités absolument indéterminées, puis faisant

$$a_i = a_j = \alpha \ , \ b_i = b_j = \beta \ , \ \dots \ , \ g_i = g_j = \varkappa \ , \ h_i = h_j = \eta \ ,$$

et représentant par Λ ce que **L** devient ainsi, il vient, d'après le développement précédent,

$$\Lambda = (P' + P'')\alpha\beta + (Q' + Q'')\alpha\gamma + \ldots + (T' + T'')\varkappa\eta ,$$

parce que les polynomes (11) sont tous indépendants des éléments des lignes dont les indices sont i, j, et tous les termes du second nombre sont dissemblables. Mais, en même temps, l'abaque est devenu vanescent, parce que, les deux lignes considérées ayant été rendues identiques. l'une d'elles prise à volonté est composée de l'autre au moyen du multiplicateur 1. On a donc par définition $\Lambda = 0$, quelles que soient $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa, \eta$; ceci entraîne

$$P' = -P'' = P , \; Q' = -Q'' = Q , \; \ldots , \; T' = -T'' = T ,$$

où P, Q, ..., T représentent les valeurs communes des deux membres de chaque égalité, donne par suite au développement (10), la forme

$$L = P(a_i b_j - b_i a_j) + Q(a_i c_j - c_i a_j) + \ldots + T(g_i h_j - h_i g_j) .$$

3° Or la transposition des lignes considérées modifie cette expression, de la même manière que celle des indices i, j seulement, change donc **L** en

$$\begin{aligned} & P(a_j b_i - b_j a_i) + Q(a_j c_i - c_j a_i) + \ldots + T(g_j h_i - h_j g_i) \\ = & -P(a_i b_j - b_i a_j) - Q(a_i c_j - c_i a_j) - \ldots - T(g_i h_j - h_i g_j) \\ = & -\mathbf{L} . \end{aligned}$$

IV. *Quand* M $= 1$, *le polynome* **L** *est toujours un covanescent de l'abaque considéré.*

Quand M > 1, *il suffit pour qu'il en soit ainsi, que* **L** *soit changé en* — **L** *par la transposition de deux lignes quelconques.*

1° Si M $= 1$, l'abaque ne peut devenir vanescent que par l'attribution de la valeur commune 0 à tous les éléments de sa ligne unique. Or cette attribution annule **L** puisqu'il est homolinéaire par rapport à tous ces éléments.

2° Si M > 1, **L** s'évanouit:

α. — Quand les éléments de quelque même ligne de l'abaque prennent tous la valeur 0, puisqu'il est linéaire et homogène par rapport à eux.

β. — Quand deux lignes sont identiques; car en nommant $'\mathbf{L}$ ce en quoi $\mathbf{L}$ est changé par la transposition de ces deux lignes, l'hypothèse donne

$$'\mathbf{L} = -\mathbf{L},$$

outre

$$'\mathbf{L} = \mathbf{L}$$

en fait, à cause de l'identité de ces lignes, et ces deux relations entraînent bien $\mathbf{L} = 0$.

γ. — Quand quelque ligne, la première pour fixer les idées est composée des autres. Car on a, pour les éléments de cette ligne, des expressions telles que les seconds membres de (3), expressions dont la substitution dans $\mathbf{L}$, homolinéaire par rapport à ces éléments, donne

$$\mathbf{L} = \lambda_2 . \mathbf{L}_2 + \lambda_3 . \mathbf{L}_3 + \ldots + \lambda_M . \mathbf{L}_M ,$$

où $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, ... , $\mathbf{L}_M$ représentent respectivement ce que devient $\mathbf{L}$ par la substitution à sa première ligne, de celles d'indices 2, 3, ... , M successivement. Or, ayant par ce qui précède $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_3 = \ldots = \mathbf{L}_M = 0$ (β), on a aussi $\mathbf{L} = 0$.

Comme l'abaque est vanescent dans le premier des trois cas ci dessus (α), dans le dernier (γ) [renfermant le second (β)], et ne peut l'être dans aucun autre, le polynome $\mathbf{L}$ en est bien un covanescent.

V. *Quand* M $>$ N, *l'abaque ne possède aucun covanescent.*

Car, s'il en existait un, son ordination par rapport à tous les éléments de l'abaque contiendrait quelque terme de la forme $qa_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots g_\varkappa h_\eta$, le coefficient constant q étant $\neq 0$, et les M lettres étant toutes différentes, ainsi que les indices (II). Or ceci est impossible pour les lettres, puisque leur nombre N est supposé $<$ M.

[Si la détermination $\mathbf{L} = 0$ identiquement, n'avait été exclue (*supr.*) comme dénuée d'intérêt, on pourrait dire ici que cette détermination est le seul covanescent de l'abaque (*Cf.* **11**, *inf.*)].

En conséquence, *nous supposerons désormais* M $\leqq$ N.

VI. *Avec les colonnes de l'abaque* (1), *associées de toutes les manières possibles en groupes de* M *chacun, formons les abaques partiels*

(12) $$\{ \mathbf{a}' \}, \ \{ \mathbf{a}'' \}, \ \{ \mathbf{a}''' \}, \ldots ;$$

dans le développement général du polynome **L** *supposé covanescent de l'abaque proposé, nommons*

(13) $$\mathbf{l}', \ \mathbf{l}'', \ \mathbf{l}''', \ldots ,$$

la somme des termes dont les notations impliquent exclusivement les lettres des M *colonnes de* $\{ \mathbf{a}' \}$ (11), *puis semblablement, celles des termes analogues relativement à* $\{ \mathbf{a}'' \}$, $\{ \mathbf{a}''' \}$,... *successivement. Les polynomes* (13) *sont des covanescents des abaques* (12) *respectivement, du proposé aussi, et la somme de tous,*

(14) $$\mathbf{l}' + \mathbf{l}'' + \mathbf{l}''' + \ldots ,$$

reproduit **L**.

Inversément. si (13) *sont des covanescents quelconques des abaques* (12), *leur somme* (14) *en est un du proposé.*

1° Le groupe $\mathbf{l}'$ par exemple, est un covanescent de $\{\mathbf{a}'\}$, parce que les attributions, aux éléments des colonnes de $\{\mathbf{a}'\}$, de valeurs le rendant vanescent, à ceux des autres colonnes de (1), de la valeur commune 0, rendent ce dernier vanescent, (**4**, II, 3°), annulent ainsi **L**, en même temps que la seconde réduit ce polynome à $\mathbf{l}'$.

2° Le même groupe est un covanescent de (1), parce que la vanescence de cet abaque entraîne celle de $\{\mathbf{a}'\}$ en particulier (**4**, III), annule par suite son covanescent $\mathbf{l}'$.

3° La somme (14) est égale à **L**, parce que tout terme de ce polynome, a été placé dans une des parties de cette somme et dans une seule.

4° Si les polynomes (13) sont des covanescents des abaques partiels (12), la nullité de tous, celle de leur somme (14) par suite, sont assurées par la vanescence de l'abaque (1), entraînant celle de chacun des abaques (12) (**4**, III). Donc cette somme est un covanescent du proposé.

6. Ce théorème ayant ramené la construction des covanescents de l'abaque (1), à M lignes et N ($\geqq$ M) colonnes, à la recherche de ceux des abaques partiels (12), dans chacun desquels les lignes et les colonnes sont en nombre tous deux $=$ M, il nous reste à nous occuper de ces derniers, que nous dirons *carrés* et *d'ordre* M. Nous raisonnerons sur le type

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1\ ,\ b_1\ ,\ c_1\ ,\ \dots\ ,\ e_1\ ,\ f_1\ , \\ a_2\ ,\ b_2\ ,\ c_2\ ,\ \dots\ ,\ e_2\ ,\ f_2\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_M,\ b_M,\ c_M,\ \dots\ ,\ e_M,\ f_M, \end{array} \right.$$

noté au moyen de M lettres, a, b, c,..., e, f, dont nous représentons par $\mathbf{l}$ un covanescent hypothétique, *pour ses lignes*, toujours.

I. *L'ordre* M *étant supposé* $>$ 1, *et une colonne de l'abaque carré* (15) *ayant été choisie arbitrairement, ainsi qu'un élément dans celle-ci,* a_1 *pour fixer les idées, tout covanescent* $\mathbf{l}$ *de cet abaque est de la forme.*

$$(16) \qquad \mathbf{l} = a_1\mathbf{l}_{1,a} - a_2\mathbf{l}_{2,a} - \dots - a_M\mathbf{l}_{M,a}$$

où ont été représentés : par $\mathbf{l}_{1,a}$ *quelque covanescent de l'abaque partiel, encore carré mais d'ordre* M — 1,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_2\ ,\ c_2\ ,\ \dots\ ,\ e_2\ ,\ f_2\ , \\ b_3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ f_3\ , \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_M,\ c_M,\ \dots\ ,\ e_M,\ f_M, \end{array} \right.$$

que laisse dans le proposé la suppression simultanée de la ligne et de la colonne de a_1; *par* $\mathbf{l}_{2,a}$, $\mathbf{l}_{3,a}$, ..., $\mathbf{l}_{M,a}$, *ce que devient* $\mathbf{l}_{1,a}$ *quand on y substitue* b_1, c_1, ..., e_1, f_1, *à ses éléments figurant dans les lignes* 2, 3, ..., M *de l'abaque* (17), *enlevées tour à tour.*

Réciproquement, si $\mathbf{l}_{1,a}$ *est un covanescent de l'abaque partiel* (17), *cette formule donne pour* $\mathbf{l}$ *un covanescent du proposé* (1).

1° *Le polynome* $\mathbf{l}$ *est homolinéaire, par rapport aux éléments*

$$(18) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_M$$

de la colonne considérée.

Dans la formule (4), l'élément a_1 n'entrant ni dans A_1, ni dans aucune partie du second membre autre que $A_1 a_1$, le terme en a_1 de l'ordination de **L** par rapport à cet élément *seulement* est précisément $A_1 a_1$, et ceux de provenances analogues relativement à $a_2, \ldots, a_M$ sont, de même. $A_2 a_2, \ldots, A_M a_M$, empruntés aussi aux ordinations successives de **L** par rapport aux éléments des lignes 2, 3, ..., M.

L'application de ces observations à l'ordination de **l** par rapport aux (18) conduit donc à

$$(19) \qquad \mathbf{l} = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_M a_M + A_0 ,$$

et on remarquera : que $A_1, A_2, \ldots, A_M, A_0$ sont, comme **l**, des polynomes tous homolinéaires par rapport aux éléments d'une ligne quelconque de l'abaque (15) ; que le dernier A_0 ne dépend que de ceux de l'abaque partiel

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_1, c_1, \ldots, e_1, f_1, \\ b_2, c_2, \ldots, e_2, f_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_M, c_M, \ldots, e_M, f_M, \end{array} \right.$$

restant de (15) après suppression de la colonne considérée (18) ; que tout autre A_i ne dépend que des éléments laissés dans celui-ci (20) par la suppression de sa ligne i (**5**, I).

Si maintenant on rend l'abaque (20) vanescent par les lignes, avec attribution simultanée de la valeur 0 aux quantités (18), on rend vanescent aussi l'abaque considéré (15) (**4**, II 3°). ce qui annule **l**, et on réduit à A_0 le second membre de (19). Il en résulte que A_0 prend alors la valeur 0, ceci montrant que ce polynome est un covanescent de l'abaque partiel (20) pour ses lignes, puisque nous avons remarqué tout à l'heure qu'il est homolinéaire par rapport aux éléments de chacune de ses files de ce sens.

Mais le même abaque n'a aucun covanescent de ce sens qui ne soit nul identiquement, parce que ses colonnes et lignes sont en nombre $M - 1 < M$ (5, V). D'où $A_0 = 0$ identiquement, puis

$$1 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_M a_M \qquad (19), \tag{21}$$

ce que nous voulions prouver.

2° *On a*

$$A_1 = l_{1,a}\ ,\ A_2 = -\, l_{2,a}\ ,\ A_3 = -\, l_{3,a}\ ,\ \dots\ ,\ A_M = -\, l_{M,a}\ . \tag{22}$$

Là première de ces formules résulte de ce que, dans l'ordination (4), A_1 est un covanescent de l'abaque partiel (9) se réduisant ici à (17).

Pour établir la seconde, transposons dans (21) les lignes 1, 2, ce qui donne

$$'1 = 'A_1 a_2 + 'A_2 a_1 + 'A_3 a_3 + 'A_4 a_4 + \dots + 'A_M a_M\ ,$$

en représentant par $'1$, $'A_1$, ... ce que $1, A_1, \dots$ sont devenus, et ajoutons les deux relations membre à membre. A cause de $1 + '1 = 0$ (5, III), il vient ainsi

$$0 = (A_1 + 'A_2)\, a_1 + (A_2 + 'A_1)\, a_2 + (A_3 + 'A_3)\, a_3 + \dots$$
$$+ (A_M + 'A_M)\, a_M\ ,$$

puis

$$A_1 + 'A_2 = 0\ ,\ A_2 + 'A_1 = 0\ ,\ \dots \tag{23}$$

parce que l'identité précédente a lieu quels que soient les éléments (18).

Comme A_1 ne dépend que des éléments des $M - 1$ dernières lignes de l'abaque partiel (20), la transposition exécutée a pour effet d'y remplacer seulement b_2, c_2, ..., e_2, f_2 par b_1, c_1,... e_1, f_1. On en conclut $'A_1 = l_{2,a}$ à cause de la première des formules (22), déjà établie, puis $A_2 = -\,'A_1 = -\, l_{2,a}$ à cause de la seconde identité (23), c'est-à-dire la seconde des mêmes formules ; et les transpositions de la même ligne 1 avec celles d'indices 3, 4, ..., M successivement, conduisent semblablement à toutes les autres.

3° La combinaison de ce qui précède (1°), (2°) montre que 1 ne peut avoir que la forme donnée par la formule (16).

4° Si $l_{1,a}$ désigne maintenant un covanescent quelconque de l'abaque (17), $\mathfrak{l}_{2,a}$, $\mathfrak{l}_{3,a}$, ..., $\mathfrak{l}_{M,a}$ rempliront visiblement la même fonction pour les abaques partiels $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, ..., $\{a\}_M$ dérivés de celui-ci $\{a_1\}$ par la substitution de la ligne b_1, c_1, ..., e_1, f_1, à ses lignes d'indices 2, 3,..., M successivement; et ces M polynomes, celui $\mathfrak{l}$ que fournit la formule (16) par suite, sont homolinéaires par rapport aux éléments de toute ligne de l'abaque total considéré (15), comme on l'apercevra facilement.

Ensuite, représentons généralement par *(i, j)*, la transposition des lignes *i, j* de cet abaque (15) et, sur la formule (16), exécutons cette opération en supposant d'abord, $i = 1$, en considérant par exemple (1, 2). Si l'on note les résultats par les mêmes lettres accentuées, il vient ainsi

$$
\begin{aligned}
{}'\mathfrak{l} &= a_2{}'\mathfrak{l}_{1,a} - a_1{}'\mathfrak{l}_{2,a} - a_3{}'\mathfrak{l}_{3,a} - \cdots - a_M{}'\mathfrak{l}_{M,a} \\
&= -(a_1\,\mathfrak{l}_{1,a} - a_2\,\mathfrak{l}_{2,a} - a_3\,\mathfrak{l}_{3,a} - \cdots - a_M\,\mathfrak{l}_{M,a}) = -\mathfrak{l}\,.
\end{aligned}
$$

Car ${}'\mathfrak{l}_{1,a} = \mathfrak{l}_{2,a}$, ${}'\mathfrak{l}_{2,a} = \mathfrak{l}_{1,a}$ ce qu'on apercevra immédiatement, et ${}'\mathfrak{l}_{3,a} = -\mathfrak{l}_{3,a}$, ..., ${}'\mathfrak{l}_{M,a} = -\mathfrak{l}_{M,a}$, comme résultats de la même transposition opérée dans $\mathfrak{l}_{3,a}$, ..., $\mathfrak{l}_{M,a}$ covanescents des abaques $\{a_3\}$,..., $\{a_M\}$, qui tous contiennent les lignes dérivées des deux transposées par la suppression de leurs éléments a_1, a_2 (5, III). Et les mêmes moyens montreront que $\mathfrak{l}$ est encore changé en $-\mathfrak{l}$ par les autres transpositions analogues (1, 3), ..., (1, M).

Enfin, la transposition quelconque *(i, j)* où $i \neq 1, j \neq 1$, équivaut aux trois (1, *i*), (*i*, *j*), *j*, 1) opérées successivement, la première sur $\mathfrak{l}$, la seconde sur ${}'\mathfrak{l}$ résultat de la première, la troisième sur ${}''\mathfrak{l}$ résultat de la seconde, conduisant à un résultat final ${}'''\mathfrak{l}$. Après ces dernières, la ligne 1 est effectivement revenue à la première place, et chacune de celles d'indices *i, j* se fixe à la place de l'autre. Or, d'après ce qui précède, ${}'\mathfrak{l} = -\mathfrak{l}$, ${}''\mathfrak{l} = -{}'\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$, ${}'''\mathfrak{l} = -{}''\mathfrak{l} = -\mathfrak{l}$, parce que, chaque fois, la transposition a déplacé la première ligne de l'abaque laissé par la précédente, ceci montrant que la transposition quelconque *(i, j)*, comme (1, 2), (1,3), ..., (1, M), change $\mathfrak{l}$ en $-\mathfrak{l}$.

L'expression (16) de $\mathfrak{l}$ est donc un covanescent de l'abaque considéré (15) puisqu'elle remplit les deux conditions requises à cette fin (**5**, IV).

II. *Quel que soit son ordre* M, *l'abaque carré* (15) *possède une infinité de covanescents s'obtenant tous en multipliant un seul d'entre eux par une constante indéterminée* Γ ($\neq 0$).

1° Ceci est vrai pour $M = 1$, car l'abaque se réduit à a_1 et Γa_1 en est un covanescent évident, le seul possible, en outre, puisqu'il doit être linéaire et homogène par rapport à l'unique élément a_1 de sa ligne unique.

2° Pour $M > 1$, le théorème subsiste s'il a lieu pour la valeur $M - 1$ de l'ordre. Car, dans la formule (16), $\mathfrak{l}_{1,a}$ covanescent de l'abaque (17), carré aussi et d'ordre $M - 1$ seulement, est déterminé par hypothèse, à un facteur constant près ; $\mathfrak{l}_{2,a}$, $\mathfrak{l}_{3,a}$, ... , $\mathfrak{l}_{M,a}$ et $\mathfrak{l}$ par suite le sont donc, au même facteur près.

3° Il est donc général, puisqu'il est vrai pour $M = 1$ (1°), puis de là pour $M = 2, 3, \ldots$, (2°).

III. Il est utile d'appliquer ce qui précède au calcul des covanescents $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, des abaques carrés d'ordres 1, 2, 3.

1° $$M = 1 .$$

(24) L'abaque est $\left\{ a_1 \right\}$; $\mathfrak{l}_1 = \Gamma a_1$. (II, 1°).

2° $$M = 2 .$$

(25) L'abaque est $\left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\}$; $\mathfrak{l}_2 = a_1 . \Gamma b_2 - a_2 . \Gamma b_1$ (*Ib.* 2°), (1°)

$$= \Gamma (a_1 b_2 - a_2 b_1) .$$

3° $$M = 3 .$$

$$\text{L'abaque est} \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{l}_3 = a_1 . \Gamma (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 . \Gamma (b_1 c_3 - b_3 c_1) - a_3 . \Gamma (b_2 c_1 - b_1 c_2) \quad \text{(II, 2°), (2°)}$$
$$= \Gamma [a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) - a_3 (b_2 c_1 - b_1 c_2)] .$$

On apercevra facilement que le développement général de $\mathfrak{l}_M$ contient le terme $\Gamma a_1 b_2 c_3 \ldots f_M$ dont les facteurs éléments sont notés par des lettres de rangs égaux à leurs indices. On dit que ces éléments appartiennent à la *diagonale principale* de l'abaque considéré (15), allant de son angle supérieur gauche à son angle inférieur droit, et on nomme *principal* le terme en question.

IV. *Tout covanescent d'un abaque carré* (15), *pour ses lignes, l'est aussi pour ses colonnes. Et réciproquement.*

1° Dans l'alinéa I, nous avons constaté que $\mathbf{l}$, covanescent pour les lignes, est homolinéaire par rapport aux éléments d'une colonne quelconque.

2° Pour $\mathrm{M} = 1$, les deux points en question résultent immédiatement de la nature de la formule (24).

3° *Pour* $\mathrm{M} = 2$, *la transposition des deux colonnes change* $\mathbf{l}$ *en* $-\mathbf{l}$. Car cette opération change le dernier membre de la formule (25) en

$$\Gamma(b_1 a_2 - b_2 a_1) = -\Gamma(a_1 b_2 - a_2 b_1) .$$

4° *Pour* $\mathrm{M} > 2$, *la transposition de deux colonnes quelconques change* $\mathbf{l}$ *en* $-\mathbf{l}$, *s'il en est ainsi pour la valeur* $\mathrm{M}-1$, *de l'ordre.*

Construisons une formule telle que (16), en ordonnant $\mathbf{l}$ par rapport aux éléments $a_1, \ldots, a_{\mathrm{M}}$ d'une colonne autre que les deux en question; la transposition de celles-ci ne fait, par hypothèse, que multiplier par -1, $\mathbf{l}_{1,a}$, $\mathbf{l}_{2,a}$, ..., $\mathbf{l}_{\mathrm{M},a}$, covanescents d'abaques dont l'ordre commun est $\mathrm{M}-1$ seulement; elle change donc $\mathbf{l}$ en $-\mathbf{l}$.

5° Ceci a lieu pour toute valeur de M, puisque c'est vrai pour $\mathrm{M} = 2$ (3°), 4°).

6° Comme ainsi (1°), (5°), $\mathbf{l}$ remplit pour les colonnes, les conditions reconnues suffisantes au n° **5**, IV, la partie directe de notre théorème est actuellement démontrée.

7° La réciproque résulte immédiatement de ce que l'abaque reste carré quand on prend, pour lignes et colonnes, les files qui étaient auparavant des colonnes et des lignes.

V. A cause de cette identité des rôles joués dans un abaque carré par les colonnes et par les lignes, un covanescent est multiplié par -1 à chaque transposition de deux files parallèles quelconques, par $(-1)^k$ en conséquence, après de telles transpositions, faites dans l'un et l'autre sens indistinctement, en nombre total k.

VI. Parmi les covanescents des abaques carrés, il est naturel de préférer la considération de ceux dont les notations sont les plus simples ; ils sont donnés par les formules de l'alinéa III quand on y prend $\Gamma = 1$. On les a nommés les *déterminants* de leurs abaques, et on les représente par les notations de ceux-ci, renfermées entre deux filets verticaux. On a ainsi

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} & |a_1| = a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1, \\ & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

On peut dire que chacun d'eux est celui des covanescents de son abaque, dont le terme principal *(Ib.)* est pourvu du coefficient $+1$.

VII. La réciprocité entre les lignes et les colonnes (IV) permet de construire tout aussi bien les déterminants par ordinations relatives aux lignes, celles-ci étant substituées aux colonnes maniées dans l'alinéa III. Au lieu des formules (26), on aurait ainsi

$$|a_1| = a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Ces formules montrent en passant, que le déterminant d'un abaque carré (15) est identique à celui de l'abaque symétrique au proposé par rapport à sa diagonale principale *(Ib.)* c'est-à-dire déduit de lui par transposition de chaque paire d'éléments symétriques par rapport à cette diagonale.

Pour éviter des fautes de signes dans la notation et le maniement des déterminants, il est essentiel de ne pas perdre de vue l'observation V.

7. — *Tous les covanescents de l'abaque* (1) (*quelconque, sauf des lignes et colonnes en nombre* $M \leqq N$) *s'obtiennent en prenant la somme des déterminants* δ', δ'', ... *des abaques*

partiels carrés (12), *multipliés respectivement par des constantes indéterminées*, Γ', Γ'' ... Conséquence immédiate de ce qui a été dit au n° **5**, VI, puis ci-dessus (**6**, II).

Cette proposition confère à ces polynomes δ', δ'', .., le rôle de covanescents *fondamentaux* de l'abaque en question, en ramenant à leur seule considération celle de tous. Effectivement, ceux-ci se forment au moyen d'eux, comme nous venons de le dire ; et la nullité de tous, en même temps qu'elle comprend celle des déterminants puisque ceux-ci figurent dans leur groupe général, est entraînée par elle, parce que δ' δ'', ... servent de coefficients aux indéterminées Γ', Γ'',..., dans l'expression générale des covanescents.

On remarquera que *l'abaque considéré est invanescent quand* δ', δ'',..., *ne sont pas tous* $= 0$. Car ils le seraient tous, s'il y avait vanescence.

Ces polynomes δ' δ'' ..., sont les *déterminants (majeurs)* de l'abaque (1). Leur nombre est visiblement $[N\,(N-1)\,\ldots\,(N-M+1)] : [1.\,2.\,3\ldots\,M]$.

8. — Un abaque peut être vanescent de plusieurs manières qu'il est temps de préciser.

L'entier $\mathbf{v}$ étant $\leqq M$, nous dirons que l'abaque (1) est $\mathbf{v}$ *fois vanescent,* si on peut y assigner $\mathbf{v}$ lignes dont chacune soit composée des $M-\mathbf{v}$ autres, ces dernières formant un abaque partiel invanescent.

Nous nommerons encore *déterminants de classe* $\mathbf{c}$ du même abaque *(mineurs, si* $\mathbf{c} > 0$, *majeurs, si* $\mathbf{c} = 0$), ceux majeurs) des abaques partiels, laissés dans le proposé par la suppression successive de toutes les associations possibles de $\mathbf{c}$ de ses lignes (**7**). Leurs ordre et nombre sont $M-\mathbf{c}$ et

$$\left\{ [M(M-1)\ldots(M-\mathbf{c}+1)] : [1\,.\,2\ldots\mathbf{c}] \right\}$$
$$\times \left\{ [N(N-1)\ldots(N-M+\mathbf{c}+1)] : [1\,.\,2\ldots(M-\mathbf{c})] \right\}.$$

9. — *Pour que l'abaque* (1) *soit* $\mathbf{v}$ *fois vauescent* (par ses lignes), *il faut et il suffit que ses déterminants soient tous nuls dans les classes* $< \mathbf{v}$, *mais non dans la classe* $\mathbf{v}$ (**8**).

I. *Si cette vanescence multiple a lieu, tous les déterminants mineurs en question sont nuls.*

1° *Etant données* ω, $< \omega'$, *files parallèles, de* ω' *éléments chacune,*

$$(27) \qquad (1)\,,\ (2)\,,\ \ldots\,,\ (\omega)\,,$$

tout déterminant d'ordre ω' *est nul, quand son abaque est formé de files*

$$(28) \qquad (1')\,,\ (2')\,,\ \ldots\,,\ (\omega')$$

dont chacune est composée de celles du groupe précédent (27).

Ceci est vrai :

α. — Si le déterminant considéré $|\,[\omega],\ (1')\,|$ comporte ω files (différentes ou non) dont chacune appartient au groupe (27) avec une seulement de l'autre (28). Car les relations de la composition supposée pour celle-ci peuvent être écrites symboliquement.

$$(1') = \lambda_1\,(1) + \lambda_2\,(2) + \ldots + \lambda_\omega\,(\omega)$$

et donnent (5, *in init.*).

$$|\,[\omega]\,,\,(1')\,| = \lambda_1\,|\,[\omega]\,,\,(1)\,| + \lambda_2\,|\,[\omega]\,,\,(2)\,| + \ldots + \lambda_\omega\,|\,[\omega]\,,\,(\omega)\,|\,,$$

où les multiplicateurs λ_1, λ_2, ... , λ_ω affectent des détermi nants tous nuls comme comportant chacun deux files au moins identiques dans un même sens ;

β. — Si, comme $|\,[\omega - 1],\ (1'),\ (2')]\,|$, son abaque contient $\omega - 1$ files (27) avec deux autres de (28); car les relations de composition propres à l'une de ces dernières, permettent comme ci-dessus (α) de lui donner une forme homolinéaire par rapport à ω déterminants nuls encore parce qu'ils rentrent dans le type précédent *(Ib.)*;

γ. — Si, comme $|\,[\omega - 2],\ (1'),\ (2'),\ (3')]\,|$, il comporte $\omega - 2$ et 3 files des groupes (27) et (28); raisonnement tout semblable, appuyé sur (β) ; ...

Et ainsi de suite, jusqu'au bout, en modifiant chaque fois l'abaque du déterminant par la suppression d'une file (27) et son remplacement par une file (28).

2° Si, dans l'abaque en question, (M — **v**) représente le groupe des lignes dont est composée chacune de celles du surplus ($\mathbf{v}$), une ligne quelconque est toujours composée des $M - \mathbf{v}$ de ce groupe, ceci ayant lieu de soi si elle en fait partie, par hypothèse si elle appartient au surplus. Tout déterminant d'une classe $\varphi < \mathbf{v}$ est donc nul, parce que, son ordre $M - \varphi$ étant $> M - \mathbf{v}$, ses $M - \varphi$ lignes sont ainsi composées de mêmes autres en nombre $M - \mathbf{v} < M - \varphi$ (1°).

II. *Soient $\mu > \nu$ deux entiers, quelconques autrement, puis*

$$(29) \qquad \alpha_0\,,\ \beta_0\,,\ \ldots\,,\ \delta_0\,,\ \varepsilon_0\,,\ \varphi_0\,,\ \ldots\,,\ \eta_0$$

une ligne de ν éléments, puis

$$(30) \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\,,\ \beta_1\,,\ \ldots\,,\ \delta_1\,,\ \varepsilon_1\,,\ \varphi_1\,,\ \ldots\,,\ \eta_1\,, \\ \alpha_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ \eta_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ \alpha_\mu\,,\ \beta_\mu\,,\ \ldots\,,\ \delta_\mu\,,\ \varepsilon_\mu\,,\ \varphi_\mu\,,\ \ldots\,,\ \eta_\mu\,, \end{array}\right.$$

μ autres, chacune de ν éléments encolonnés entre eux ainsi qu'avec les précédents, et formant, par leur réunion, un abaque dont les déterminants (majeurs) ne sont pas tous $= 0$. *Si la ligne* (29) *est composée des autres* (30), *l'abaque de hauteur $\mu + 1$ formé par leur réunion totale a ses déterminants (majeurs) tous nuls, et réciproquement.*

1° Si une telle composition a lieu, l'abaque en question est vanescent, d'où la nullité de tous ses déterminants (7).

2° Si ces déterminants (d'ordre $\mu + 1$) sont tous nuls, il en est ainsi, en particulier, pour les $\nu - \mu$ d'entre eux où μ mêmes colonnes de $\{(29), (30)\}$ sont respectivement associées à chacune des $\nu - \mu$ autres. En outre, il en est encore ainsi pour les μ donnés par le groupement de ces μ colonnes immuables avec chacune d'elles-mêmes répétée successivement, puisque un quelconque d'entre eux comporte toujours deux colonnes identiques.

Dans ces $(\nu - \mu) + \mu = \nu$ déterminants, indistinctement, les $(\mu + 1)^{\text{emes}}$ colonnes sont toutes celles de l'abaque $\{(29), (30)\}$; mais, dans leurs ordinations par rapport aux éléments d'indices $0, 1, 2, \ldots, \mu + 1$ de la colonne volante, les coefficients de ces éléments restent les mêmes, parce qu'ils ne dépendent que des μ colonnes immuables qui sont communes à tous ces déterminants. Ils forment la suite

$$\Delta_0, -\Delta_1, -\Delta_2, \ldots, -\Delta_\mu,$$

où sont représentés : par Δ_0 le déterminant de l'abaque carré d'ordre μ, laissé dans celui des μ colonnes immuables par la suppression de sa ligne 0, par Δ_i généralement, ce qui devient Δ_0, quand, à sa ligne i, on substitue cette ligne 0 (6, VI). La nullité des ν déterminants précités (d'ordre $\mu + 1$) donnera ainsi les ν relations

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_0 \alpha_0 - \Delta_1 \alpha_1 - \Delta_2 \alpha_2 - \ldots - \Delta_\mu \alpha_\mu = 0, \\ \Delta_0 \beta_0 - \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta_\mu \beta_\mu = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_0 \delta_0 - \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta_\mu \delta_\mu = 0, \\ \Delta_0 \varepsilon_0 - \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta_\mu \varepsilon_\mu = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_0 \eta_0 - \Delta_1 \eta_1 - \Delta_2 \eta_2 - \ldots - \Delta_\mu \eta_\mu = 0. \end{array} \right.$$

Si maintenant μ colonnes de l'abaque (30) donnent un déterminant non nul, on pourra faire en sorte que Δ_0 soit celui-ci, c'est-à-dire prendre pour les μ colonnes immuables de $\{(29), (30)\}$, celles précisément dont les précédentes font partie. La division des relations (31) par $\Delta_0 \neq 0$ est alors possible, et les met sous une forme montrant immédiatement, que la ligne (29) est bien composée de celles de l'abaque (30).

III. Si dans la classe $\mathbf{v}$, quelque déterminant de l'abaque proposé (1) est $\neq 0$, il appartient à titre majeur, à l'abaque des $M - \mathbf{v}$ lignes qui ont formé les siennes, et cet abaque est invanescent (7). Si, en outre, tous sont nuls dans la classe $\mathbf{v} - 1$, où leur ordre est $M - \mathbf{v} + 1$, il en est ainsi en particulier, pour les déterminants (majeurs) de l'abaque formé par les $M - \mathbf{v}$ lignes ci-dessus et une autre quelconque. Cette dernière est donc composée des premières (II).

10. — *Quand* $M = N$, *l'abaque* (1), *alors carré, est vanescent par ses files d'un sens, autant de fois que par celles de l'autre* (8).

A cause de la réciprocité existant entre les lignes et les colonnes de tout abaque carré (**6**, IV), un déterminant mineur, de classe quelconque **c**, d'ordre M — **c** par suite, du proposé *considéré comme formé de lignes,* est majeur, aussi bien pour l'abaque des M — **c** colonnes dont les siennes font partie, que pour celui des M — **c** lignes qui ont formé les siennes. Le mineur en question en est donc un de même classe **c** pour le proposé *considéré comme formé de colonnes,* ceci entraînant immédiatement l'exactitude de notre énoncé (**9**).

11. — *Quand* M > N, *l'abaque* (1) *est vanescent par ses lignes,* M — N *fois au moins.*

Car il l'est autant de fois que l'abaque carré obtenu en lui ajoutant M — N colonnes de zéros (**4**, II 3°), et celui-ci est vanescent M — N fois au moins : par ses colonnes, parce que ses déterminants de classes < M — N, d'ordres > N par suite, comportent tous une colonne au moins de zéros, par ses lignes aussi, en conséquence (**10**), *(Cf.* **5**, V*).*

12. — On *réduit* un abaque donné, *relativement à ses lignes,* par exemple, en en extrayant quelques unes de nature et en nombre tels, *que leur abaque partiel, dit réduit, soit invanescent, et que, d'elles seulement, toutes celles du proproposé soient composées.* A cette fin, on trie d'après la règle suivante, les lignes de l'abaque, passées en revue dans un ordre de succession quelconque :

Chaque nouvelle ligne examinée est placée dans l'abaque réduit, si les lignes antérieurement conservées pour lui sont en nombre inférieur à la largeur N *de l'abaque, et si, avec celle en question, elles forment un abaque dont les déterminants ne sont pas tous* = 0. *Elle est au contraire rejetée, si ce nombre est* = N, *ou bien si ces déterminants sont tous nuls.*

En effet, on aperçoit immédiatement : qu'au moment de l'essai d'une ligne quelconque, l'abaque de celles antérieurement conservées est invanescent (**7**) ; qu'en cas de rejet cette ligne était bien composée de celles qui forment cet abaque (**9**, II, 2°), (**11**).

On notera que : *la hauteur de l'abaque réduit ne peut* *surpasser la largeur du proposé (Ib.) ; une ligne comprenant exclusivement des éléments* $= 0$ *est toujours à rejeter ; quand toutes sont de cette nature, l'abaque réduit disparaît.*

13. — Nous passons aux équations du premier degré, dont nous considérerons un système comportant des inconnues $x, y, z, \dots, s, t, \dots, u, v$, des équations, en nombres quelconques n, M, ces dernières étant

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z + \dots + e_1\, t + f_1\, u + \dots g_1\, v + h_1\, w + k_1 = 0\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{\mathrm{M}} x + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + k_{\mathrm{M}} = 0\ , \end{array}\right.$$

dont les coefficients $a_1, \dots, \dots, \dots, k_{\mathrm{M}}$ doivent être conçus en un abaque à M lignes, à $n + 1$ colonnes.

I. *Au système* (32), *on peut substituer son réduit, c'est-à-dire celui qui a pour coefficients les éléments de l'abaque laissé par la réduction de celui du proposé, opéré relativement aux lignes* (**12**).

Car tout groupe de solutions du proposé appartient à son réduit ne comprenant que des équations du premier. Et, comme il est visible que les premiers membres du proposé sont tous composés homolinéairement de ceux du réduit, tout groupe de solutions de celui-ci, puisqu'il annule ces derniers, annulera aussi les premiers, vérifiera en conséquence la totalité des équations considérées.

Désormais donc, nous raisonnerons exclusivement sur un système réduit, comportant ainsi dans son abaque, des lignes en nombre $m \overline{\overline{<}}\ n + 1$, m équations par conséquent. Nous l'écrirons

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1\, x + b_1\, y + \dots + e_1\, t + f_1\, u + \dots + g_1\, v + h_1\, w + k_1 = 0\ , \\ a_2\, x + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + h_2\, w + k_2 = 0\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m x + b_m y + \dots + e_m t + f_m u + \dots + g_m v + h_m w + k_m = 0\ . \end{array}\right.$$

et nous le dirons *surabondant*, *complet* ou *incomplet*, selon que m sera $= n + 1$, $= n$ ou $< n$.

Nous figurerons encore son abaque

$$
(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \ , \ b_1 \ , \ c_1 \ . \ \dots \ , \ e_1 \ , \ f_1 \ , \ \dots \ , \ g_1 \ , \ h_1 \ , \ k_1 \ . \\ a_2 \ , \ b_2 \ , \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ g_2 \ , \ h_2 \ , \ k_2 \ , \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_m, \ b_m, \ c_m, \ \dots \ , \ e_m, \ f_m, \ \dots \ , \ g_m, \ h_m, \ k_m . \end{array} \right.
$$

II. *Le système réduit* (33) *est impossible quand il est surabondant.*

Car l'existence de solutions x', y',..., v', w' entraînerait la vanescence de l'abaque (34) par les colonnes, sa dernière étant alors composée des autres au moyen des multiplicateurs $-x'$, $-y'$, ..., $-v'$, $-w'$, par les lignes en même temps, puisqu'il est carré (**10**). Or ceci n'a pas lieu, puisqu'il est supposé réduit.

III. *Non surabondant, il est impossible encore, quand l'abaque partiel* $\{ a, b, \dots, g, h \}$ *formé dans* (34) *par les seuls* n *colonnes de coefficients des inconnues est vanescent.*

S'il possédait quelque groupe de solutions x', y',..., la colonne k de l'abaque total (34) serait composée des autres avec les multiplicateurs $-x'$ $-y'$, ... Moyennant quoi, chacun des déterminants (majeurs) de cet abaque, où la colonne k intervient, pourrait être mis sur forme d'une expression homolinéaire par rapport à n déterminants du même abaque auxquels cette colonne est étrangère, les coefficients de cette expression étant $-x'$, $-y'$,... Les déterminants indépendants de la colonne k étant $= 0$, puisque l'abaque $\{ a, b, \dots, g, h \}$ est supposé vanescent, les autres le seraient encore, tous ceux de l'abaque (34) aussi, et, contrairement à l'hypothèse, le système (33) ne serait pas réduit.

IV. *Non surabondant, il est possible quand l'abaque* $\{ a, b, \dots, g, h \}$ (III) *est invanescent. Il est alors déterminé s'il est complet, indéterminé s'il est incomplet, cette indétermination consistant en ce qu'on peut choisir arbitrairement les valeurs de tout groupe de* $n - m$ *inconnues, tel, que les coefficients des* m *autres soient les éléments d'un déterminant* $\neq 0$, *en ce que, de plus, les valeurs correspondantes de* *ces m autres inconnues s'expriment par des fonctions linéaires déterminées des $n - m$ premières.*

1° Si le système est complet, l'adjonction d'une ligne de zéros à son abaque (34) rend celui-ci vanescent par les lignes, par les colonnes en même temps, puisqu'il est devenu carré (**10**). Comme, en outre, la suppression de sa colonne k laisse un abaque partiel invanescent (par les colonnes) parce que le déterminant des colonnes $a, b, \ldots, g, h$ de (34) est supposé $\neq 0$, cette colonne k est composée des autres (**9**, II, 2°), et il suffit évidemment de multiplier par -1 les multiplicateurs de cette composition pour en déduire un groupe de solutions du système considéré.

Ce groupe $x', y', \ldots w'$ est unique. Car si un autre x'', $y'', \ldots, w''$ existait encore, l'une au moins des différences $x'' - x' = \xi$, $y'' - y' = \eta, \ldots, w'' - w' = \psi$, la première pour fixer les idées, serait $\neq 0$; les substitutions successives de l'un et l'autre groupes dans chacune des équations du système, suivies de la soustraction des résultats, conduiraient à

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \xi + b_1 \eta + \ldots + h_1 \psi = 0 \, , \\ a_2 \xi + b_2 \eta + \ldots + h_2 \psi = 0 \, , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_m \xi + b_m \eta + \ldots + h_m \psi = 0 \, , \end{array}\right.$$

et la division de ces égalités par ξ supposé $\neq 0$, montrerait, dans l'abaque $\{ a, b, \ldots, g, h \}$, ici carré, que la colonne a est composée des autres, qu'il est ainsi vanescent par les colonnes, par les lignes en conséquence, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les multiplicateurs des colonnes $a, b, \ldots, g, h$ de l'abaque (34) agrandi d'une ligne de zéros, dans les formules exprimant la composition de la colonne k au moyen de celles-ci, se calculeront comme au n° **9**, II, 2°. Puisqu'il suffit de les multiplier par -1 pour obtenir x' $y' \ldots$, on aura les formules

$$x' = -\frac{\Delta_a}{\Delta_k}, \; y' = -\frac{\Delta_b}{\Delta_k}, \; \ldots\ldots, \; w' = -\frac{\Delta_h}{\Delta_k}, \tag{35}$$

où ont été représentés : par Δ_k, le déterminant de l'abaque

$\{a, b, \ldots, g, h\}$, par $\Delta_a, \Delta_b, \ldots, \Delta_h$ ce qu'il devient par la substitution de sa colonne k faite successivement à chacune des autres $a, b, \ldots, h$.

2° Si le système (33) est incomplet, soient $a, b, \ldots, e$ un des groupes de m colonnes de son abaque (34), qui, par hypothèse, donnent des déterminants $\neq 0$, et représentons par $K_1, K_2, \ldots, K_m$, les groupes de termes, linéaires en $u, \ldots, v, w$, qui, dans les diverses équations, ont des coefficients notés au moyen des autres lettres $f, \ldots, g, h, k$. Ce système peut être écrit

$$(36) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots + e_1 t + K_1 = 0 , \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_m x + b_m y + \ldots + e_m t + K_m = 0 , \end{array} \right.$$

et sa résolution par rapport à $x, y, \ldots, t$, faisable comme ci-dessus (1°) parce qu'il est complet à ce point de vue, conduit bien facilement à ce qui nous reste à établir, observation faite que, dans les formules (35), Δ_k est indépendant des k, que $\Delta_a, \Delta_b, \ldots, \Delta_h$ en sont des fonctions homolinéaires.

3° Il n'est pas sans intérêt de remarquer que le cas d'un système incomplet comprend à la rigueur celui où il est complet. Pour cette cause, il serait facile de traiter les deux ensemble, de fondre notamment le sous-alinéa 1° dans le suivant (2°). C'est ce que nous ferons pour la démonstration suivante.

14. *Le système* (33) *étant réduit et possible, toute équation du premier degré* $(E)_0$ *que ses solutions vérifient aussi, est composées homolinéairement des siennes.*

Supposant $\neq 0$, le déterminant Δ des coefficients des m inconnues $x, y, \ldots t$, nous mettrons le système sous la forme (36), l'équation $(E)_0$ sous une forme analogue en marquant ses coefficients de l'indice commun 0, et nous considérons l'abaque carré, d'ordre $m + 1$,

$$(37) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_0 , b_0 , \ldots , e_0 , K_0 , \\ a_1 , b_1 , \ldots , e_1 , K_1 , \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_m , b_m , \ldots , e_m , K_m . \end{array} \right.$$

Le fait que toutes les solutions du système satisfont à l'équation $(E)_0$, assure, quelles que soient les valeurs attribuées à $u, \ldots, v, w$, la composition de la colonne K de l'abaque (37) au moyen des autres ; d'où sa vanescence par les colonnes, puis par les lignes (**10**), puis la composition de la première de celles-ci au moyen des autres, puisque le déterminant Δ est $\neq 0$ (**9**, II, 2°) ; et, en nommant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les multiplicateurs de cette composition, on a

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \;, \\ b_0 = \lambda_1 b_1 + \quad . \quad . \quad . \quad + \lambda_m b_m \;, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ e_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m \;, \end{array} \right.$$

$$(39) \quad K_0 = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \ldots \lambda_m K_m \,.$$

En ayant égard à ce que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ne dépendent que des éléments des m colonnes $a, b, \ldots, e$ de l'abaque (37) *(loc. cit.)*, puis égalant les coefficients de $u, \ldots, v, w$ dans les deux membres de (39), cette équation se décompose en les égalités

$$\begin{array}{l} f_0 = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m \;, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ g_0 = \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m \;, \\ h_0 = \lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_m h_m \;, \\ k_0 = \lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_m k_m \;, \end{array}$$

constituant avec (38) toutes celles que nous avions à établir.

15. — Dans le développement général du déterminant d'un abaque carré, d'ordre quelconque M, (**5**, II), la transposition de deux lignes produit sur la notation, le même effet que celle des indices correspondants, les lettres restant immobiles *(Ib.* III) ; celle de deux colonnes équivaut de même à celle des lettres correspondantes, les indices conservant cette fois leurs places primitives. Appuyés sur ces observations, des raisonnements tout semblables à ceux du n° **6**, I conduisent bien facilement à *l'ordination du déterminant par rapport à ceux d'abaques partiels en nombre quelconque i, formés par la décomposition de celui du proposé en des grou-*

pes déterminés de m_1, m_2, ... , m_i files toutes parallèles dans un sens donné, ces i entiers étant quelconques aussi, sous la seule condition de donner M *par somme.*

Pour $i = 2$, cette opération a une grande importance, mais dans des questions sur lesquelles il n'y a pas lieu de revenir ici. Pour $i = \mathrm{M}$, entraînant $m_1 = m_2 = ,..., = m_i = 1$, elle fournit le développement général du déterminant, obtenu par de simples manipulations d'un seul terme arbitrairement choisi ; pour $2 < i < \mathrm{M}$, elle conduit à des formules variées. Comme ces dernières sont inutiles, comme le développement général, qui ne l'est pas moins en théorie quand on se place à notre point de vue, ne sert à rien pour les calculs numériques à cause de sa prolixité, il serait tout à fait oiseux d'entrer dans les détails.

16. — Terminons par un théorème fort simple, mais indispensables dans des questions importantes.

Tout déterminant est un polynome premier.

Si celui de l'abaque (15) que nous représentons par Δ, est décomposable en deux facteurs entiers δ', δ'', et si l'élément a_1 par exemple, entre effectivement dans δ', ni lui, ni aucun autre élément d'une file φ contenant a_1 ne peuvent entrer dans δ''. Car autrement $\Delta = \delta' \delta''$ ne serait pas homolinéaire par rapport aux éléments de cette file. De même, et puisque ainsi tous les éléments de φ entrent dans δ', aucun autre d'une file contenant un de ceux-ci, aucun élément de l'abaque en conséquence, ne peut entrer dans δ''. Ce facteur δ'' se réduit donc à une constante, moyennant quoi, tout diviseur δ' de Δ lui est égal à un facteur constant près ; c'est ce qu'il y avait à prouver.

Ch. MÉRAY (Dijon).