

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 9 (1907)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CHANGEMENT DE VARIABLE DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE  
**Autor:** Porter, M. B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10152>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Il n'est pas douteux qu'il y ait encore beaucoup de choses à faire dans l'étude du rôle que les fonctions multiformes jouent dans la Dynamique ; c'est là un domaine où des théories importantes de l'analyse moderne trouvent des applications intéressantes.

Georges RÉMOUNDOS (Athènes).

## CHANGEMENT DE VARIABLE DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE

Les démonstrations ordinaires pour l'opération bien connue du changement de variable dans une intégrale multiple sont non seulement artificielles, mais aussi difficiles à comprendre pour des étudiants qui n'ont pas une grande expérience des démonstrations de ce genre.

La démonstration de M. GOURSAT pour 2 variables, donnée dans son *Cours d'Analyse* n'est pas artificielle et est suffisamment simple, mais elle emploie la formule de Green.

Dans l'édition de 1893 du *Cours d'Analyse* de M. JORDAN, § 148 T. 1, il y a un aperçu d'une démonstration ingénieuse que l'on rend facilement parfaitement rigoureuse et qui peut être appliquée au cas d'un nombre quelconque de variables.

L'énoncé rigoureux de cette démonstration est :

Etant donné l'intégrale  $\iint_A f(x, y) da$ .

Admettons que

$$\left. \begin{aligned} X &= X(u, v) \\ Y &= Y(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

sont des fonctions, continues de  $(u, v)$  dans toute une région  $\bar{A}$  (limites comprises) et, telles qu'à chaque point  $(u, v)$  de  $\bar{A}$  corresponde un point et un seul  $(x, y)$  de  $A$ .

De plus  $X'_u, X'_v, Y'_u, Y'_v$  sont des fonctions continues de  $(u, v)$  dans tout l'espace  $\bar{A}$ , et le déterminant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} X'_u & X'_v \\ Y'_u & Y'_v \end{vmatrix}$$

est de signe *invariable* dans tout l'espace  $\bar{A}$ , ou s'évanouit tout au plus en un point fixe de contenu (signification de Cantor) zéro dans  $\bar{A}$ .

Puisque la région  $A$  peut être subdivisée en petites régions d'une manière arbitraire, pourvu que *toutes* les dimensions de ces régions tendent vers zéro, nous pouvons diviser  $A$  en triangles de type  $\Delta_i$  dont les sommets sont les points  $(X_1 Y_1) (X_2 Y_2) (X_3 Y_3)$ .

A ce triangle correspond, dans la région  $\bar{A}$ , un triangle  $\bar{\Delta}_i$  dont les sommets sont  $u_1, v_1, u_2, v_2; u_3, v_3$ .

Si les lettres des sommets de  $\Delta_i$  sont bien ordonnées, nous avons

$$\text{aire } \Delta_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ Y_1 - Y_2 & Y_2 - Y_3 \end{vmatrix}$$

et par le *premier théorème de la moyenne*

$$\text{aire } \bar{\Delta}_i = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} \bar{X}'_u \Delta_1 u + \bar{X}'_v \Delta_1 v & \bar{X}'_u \Delta_2 u + \bar{X}'_v \Delta_2 v \\ \bar{Y}'_u \Delta_1 u + \bar{Y}'_v \Delta_1 v & \bar{Y}'_u \Delta_2 u + \bar{Y}'_v \Delta_2 v \end{vmatrix},$$

où

$$\Delta_1 u = u_1 - u_2, \quad \Delta_2 u = u_2 - u_3, \text{ etc.}$$

et où  $\bar{X}'_u, \bar{X}'_v; \bar{Y}'_u, \bar{Y}'_v \dots$  sont aussi voisins que nous le voulons de  $X'_u(u_1 v_1); Y'_u(u_1 v_1)$  etc.; pour  $\Delta_1 u, \Delta_2 u \dots$  assez petits.

Nous avons alors, à cause de la continuité de  $X'_u, Y'_u \dots$ ,

$$\text{aire } \bar{\Delta}_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_2 u \\ \Delta_1 v & \Delta_2 v \end{vmatrix} J(u_1, v_1) (1 + \varepsilon), \quad (2)$$

où  $\varepsilon$  tend uniformément vers zéro lorsque  $\Delta_1 u, \Delta_2 u, \Delta_1 v, \Delta_2 v$ , tendent vers zéro.

(2) nous montre que puisque  $J(u, v)$  est de signe invariable lorsque nous circulons sur le contour du triangle  $\Delta_i$  dans le sens positif, nous circulerons toujours sur le contour de  $\bar{\Delta}_i$

dans le sens positif si  $J$  est positif dans  $\bar{A}$  et nous circulerons toujours sur le contour de  $\bar{\Delta}_i$  dans le sens négatif si  $J$  est négatif dans  $\bar{A}$ .

Ainsi les triangles  $\bar{\Delta}_i$  couvrent la région  $\bar{A}$  *sans en sortir*, si les triangles  $\Delta_i$  couvrent la région  $A$  *sans en sortir*. (2) montre que en appliquant le principe de substitution des infiniments petits, nous avons

$$\int_A f(x, y) da = \int_{\bar{A}} f[X(u, v), Y(u, v)] |J| d\bar{a}$$

quand  $d\bar{a}$  est l'élément d'aire de  $\bar{A}$ .

Dans le cas de trois variables notre élément de volume serait naturellement le tétraèdre.

M. B. PORTER (Austin, Texas).

(Traduction de M<sup>lle</sup> R. MASSON, Genève).

---

## CAS PARTICULIERS D'EMPLOI DISSIMULÉ DE LA MÉTHODE EXPÉRIMENTALE DANS LES TEMPS LES PLUS RÉCENTS

---

I. — Dans la science moderne, outre les résultats indiqués précédemment<sup>1</sup> et obtenus par le développement de la méthode des essais et de sa forme particulière, il existe aussi des théories qui se servent directement de ces deux méthodes. Si cet emploi paraît actuellement un peu obscur, cela ne tient qu'à la forme de l'exposition ordinairement en usage dans les manuels et non à la nature du problème. Parmi ces théories-là, dans l'arithmétique élémentaire et dans l'algèbre supérieure on peut indiquer *la division des nombres entiers, l'extraction des racines, et la détermination des valeurs numériques des racines d'une équation*.

---

<sup>1</sup> V. L'Ens. Math., 8<sup>e</sup> année, p. 177-150, 1906. 7<sup>e</sup> année, p. 343-356, 1905.