Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1907)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CHANGEMENT DE VARIABLE DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE

Autor: Porter, M. B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10152

Il n'est pas douteux qu'il y ait encore beaucoup de choses à faire dans l'étude du rôle que les fonctions multiformes jouent dans la Dynamique ; c'est là un domaine où des théories importantes de l'analyse moderne trouvent des applications intéressantes.

Georges RÉMOUNDOS (Athènes).

CHANGEMENT DE VARIABLE DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE

Les démonstrations ordinaires pour l'opération bien connue du changement de variable dans une intégrale multiple sont non seulement artificielles, mais aussi difficiles à comprendre pour des étudiants qui n'ont pas une grande expérience des démonstrations de ce genre.

La démonstration de M. GOURSAT pour 2 variables, donnée dans son *Cours d'Analyse* n'est pas artificielle et est suffisamment simple, mais elle emploie la formule de Green.

Dans l'édition de 1893 du *Cours d'Analyse* de M. JORDAN, § 148 T. 1, il y a un aperçu d'une démonstration ingénieuse que l'on rend facilement parfaitement rigoureuse et qui peut être appliquée au cas d'un nombre quelconque de variables.

L'énoncé rigoureux de cette démonstration est :

Etant donné l'intégrale $\iint\limits_{A} f(x, y)\, da$.

Admettons que

$$\left.\begin{array}{l} X = X(u, v) \\ Y = Y(u, v) \end{array}\right\} \quad (1)$$

sont des fonctions, continues de (u, v) dans toute une région $\overline{A}$ (limites comprises) et, telles qu'à chaque point (u, v) de $\overline{A}$ corresponde un point et un seul (x, y) de A.

De plus X'_u, X'_v, Y'_u, Y'_v sont des fonctions continues de $(u\,.\,v)$ dans tout l'espace $\overline{A}$, et le déterminant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} X'_u & X'_v \\ Y'_u & Y'_v \end{vmatrix}$$

est de signe *invariable* dans tout l'espace $\overline{A}$, ou s'évanouit tout au plus en un point fixe de contenu (signification de Cantor) zéro dans $\overline{A}$.

Puisque la région A peut être subdivisée en petites régions d'une manière arbitraire, pourvu que *toutes* les dimensions de ces régions tendent vers zéro, nous pouvons diviser A en triangles de type Δ_i dont les sommets sont les points $(X_1 Y_1)$ $(X_2 Y_2)$ $(X_3 Y_3)$.

A ce triangle correspond, dans la région $\overline{A}$, un triangle $\overline{\Delta}_i$ dont les sommets sont u_1, v_1, u_2, v_2 ; u_3, v_3.

Si les lettres des sommets de Δ_i sont bien ordonnées, nous avons

$$\text{aire } \Delta_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ Y_1 - Y_2 & Y_2 - Y_3 \end{vmatrix}$$

et par le *premier théorème de la moyenne*

$$\text{aire } \overline{\Delta}_i = \frac{1}{2\,!} \begin{vmatrix} \overline{X}'_u \Delta_1 u + \overline{X}'_v \Delta_1 v & \overline{\overline{X}}'_u \Delta_2 u + \overline{\overline{X}}'_v \Delta_2 v \\ \overline{Y}'_u \Delta_1 u + \overline{Y}'_v \Delta_1 v & \overline{\overline{Y}}'_u \Delta_2 u + \overline{\overline{Y}}'_v \Delta_2 v \end{vmatrix},$$

où

$$\Delta_1 u = u_1 - u_2 \;, \quad \Delta_2 u = u_2 - u_3 \;, \text{ etc.}$$

et où $\overline{X}'_u$, $\overline{\overline{X}}'_u$; $\overline{Y}'_u$, $\overline{\overline{Y}}'_u$ ... sont aussi voisins que nous le voulons de $X'_u(u_1 v_1)$; $Y'_u(u_1 v_1)$ etc. ; pour $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u$ ... assez petits.

Nous avons alors, à cause de la continuité de X'_u, Y'_u ... ,

$$\text{aire } \overline{\Delta}_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_2 u \\ \Delta_1 v & \Delta_2 v \end{vmatrix} J(u_1, v_1)(1 + \varepsilon) \;, \tag{2}$$

où ε tend uniformément vers zéro lorsque $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u$, $\Delta_1 v$, $\Delta_2 v$, tendent vers zéro.

(2) nous montre que puisque $J(u, v)$ est de signe invariable lorsque nous circulons sur le contour du triangle Δ_i dans le sens positif, nous circulerons toujours sur le contour de $\overline{\Delta}_i$

dans le sens positif si J est positif dans $\overline{A}$ et nous circulerons toujours sur le contour de $\overline{\Delta_i}$ dans le sens négatif si J est négatif dans $\overline{A}$.

Ainsi les triangles $\overline{\Delta_i}$ couvrent la région $\overline{A}$ *sans en sortir*, si les triangles Δ_i couvrent la région A *sans en sortir*. (2) montre que en appliquant le principe de substitution des infiniments petits, nous avons

$$\iint_{A} f(x, y)\, da = \iint_{\overline{A}} f[X(u, v), Y(u, v)] \mid J \mid d\overline{a}$$

quand $d\overline{a}$ est l'élément d'aire de $\overline{A}$.

Dans le cas de trois variables notre élément de volume serait naturellement le tétraèdre.

M. B. PORTER (Austin, Texas).

(Traduction de Mlle R. MASSON, Genève).

CAS PARTICULIERS D'EMPLOI DISSIMULÉ DE LA MÉTHODE EXPÉRIMENTALE DANS LES TEMPS LES PLUS RÉCENTS

I. — Dans la science moderne, outre les résultats indiqués précédemment[1] et obtenus par le développement de la méthode des essais et de sa forme particulière, il existe aussi des théories qui se servent directement de ces deux méthodes. Si cet emploi paraît actuellement un peu obscur, cela ne tient qu'à la forme de l'exposition ordinairement en usage dans les manuels et non à la nature du problème. Parmi ces théories-là, dans l'arithmétique élémentaire et dans l'algèbre supérieure on peut indiquer *la division des nombres entiers, l'extraction des racines, et la détermination des valeurs numériques des racines d'une équation.*

---

[1] V. L'*Ens. Math.*, 8e année, p. 177-150, 1906. 7e année, p. 343-356, 1905.