Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1907)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE ROLE DES FONCTIONS MULTIFORMES EN DYNAMIQUE
Autor: Rémoundos, Georges
Kapitel: Invariants.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10151

On se rend aisément compte du rôle remarquable que les fonctions multiformes doivent jouer en Mécanique, si l'on se rappelle que la permutation des branches se fait par un mouvement continu du point M (x, y), qui ramène ce point à la position de départ : le mouvement exige, en effet, du temps et suppose l'existence d'une cause, que l'on appelle *force* en Mécanique. Le rôle spécial des fonctions multiformes en Mécanique tient à la nature des choses et nous pouvons dire qu'elles se rattachent à la Mécanique d'une façon intrinsèque et non seulement par la nécessité des applications.

3. — Si le point (x, y) part d'une position initiale $(x_0\ y_0)$ les accroissements de temps les plus intéressants pour nous seront ceux, pour lesquels le point mobile M (x, y) revient à la position initiale. Nous appellerons *période* un tel accroissement du temps t ; d'une façon plus claire, nous appellerons *période* tout intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages du mobile par la même position de la trajectoire et nous remarquerons que la période ainsi définie est, en général, une quantité variable. Les autres accroissements du temps t, qui entraînent le changement de la position du mobile, nous intéressent peu ici, parce que le but principal de ce travail consiste en l'étude des variations des forces et, en général, de quantités multiformes, qui ne sont causées que par les changements du temps et non par la position du mobile.

Avant d'aborder l'étude des problèmes mécaniques, nous devons remarquer que les fonctions multiformes utilisées dans nos théories seront particulièrement intéressantes si elles sont harmoniques par rapport aux coordonnées x et y ou bien analytiques en $z = x + i\,y$, grâce aux progrès spéciaux accomplis dans la théorie des singularités de ces fonctions et de la permutation de leurs branches.

Les Invariants.

4. — Nous allons supposer que les composantes X et Y de la force agissant sur un point matériel M (x, y) soient données par des fonctions multiformes des x et y, soit :

$$X = \sigma(x, y) \quad , \quad Y = \varphi(x, y).$$

Nous appellerons *invariant absolu* toute quantité mécanique concernant le mouvement d'un point mobile sollicité par la force et ayant la propriété d'être une fonction *uniforme des coordonnées* x *et* y *sur tout le plan.*

L'importance des invariants absolus consiste en ce que ces quantités ne dépendent que de la position du mobile pour toutes les trajectoires possibles, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales; d'une façon plus claire, à chaque position du mobile ces quantités n'ont qu'une valeur unique ne dépendant ni des conditions initiales ni du temps mis par le mobile pour y arriver. Le caractère d'invariance, que nous considérons pour ces quantités se rapporte non seulement aux accroissements du temps, mais encore aux changements des conditions initiales, c'est-à-dire de la courbe suivie par le mobile pour arriver à une certaine position. Nous ne pouvons pas citer dans ce travail des exemples d'invariants absolus valables d'une façon générale, mais nous allons envisager aussi une autre espèce d'invariants, dont nous présenterons des exemples remarquables.

Une quantité mécanique Q sera appelée *invariant relatif* à une trajectoire du mobile, lorsqu'elle ne dépend que de la position du mobile sur *cette trajectoire* et nullement du temps mis par le mobile pour arriver à chaque point de la trajectoire; si le mouvement est périodique, toutes les fois que le mobile passe par un point de la trajectoire, cette quantité Q prend toujours la même valeur : si nous considérons deux instants t et $t + \Delta t$ avec l'hypothèse que la différence Δt soit égale à une ou plusieurs périodes, la valeur de Q à l'instant t est égale à sa valeur à l'instant $t + \Delta t$. Donc le caractère d'invariance que nous avons en vue ici, se rapporte seulement aux accroissements du temps égaux à une ou plusieurs périodes.

5. La force F n'est jamais un invariant *général*, puisque notre hypothèse fondamentale consiste en ce que les composantes X et Y ne sont pas toutes les deux fonctions uniformes des coordonnées x et y du mobile ; d'une façon plus précise, les trois éléments de la force F : intensité, direction et sens ne peuvent être tous les trois des invariants généraux, conformément à notre hypothèse.

Si, par exemple, nous avons :

$$X = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad Y = \sqrt{2xy} \ .$$

l'intensité de la force sera égale à :

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x + y)^2} = x + y \ .$$

Elle est donc uniforme par rapport aux coordonnées x et y et, par conséquent, c'est un invariant général, mais il n'en est pas de même de l'angle formé par la direction de la force avec l'axe des x.

Mais il est bien possible que tous les éléments de la force soient des invariants *relatifs* par rapport à une trajectoire, pourvu que cette trajectoire remplisse certaines conditions par rapport aux singularités des fonctions $\sigma(x, y)$ et $\varphi(x,y)$ donnant les composantes X et Y de la force. L'étude de ce rapport entre les trajectoires d'invariance pour la force et les singularités des fonctions $\sigma(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ s'offre plus avantageuse dans le cas, où la fonction $A(z) = X + iY$ est analytique en $z = x + iy$, les fonctions $X = \sigma(x, y)$ et $Y = \varphi(x, y)$ étant harmoniques conjuguées ; pour bien nous en rendre compte, remarquons que tous les éléments de la force seront des invariants relatifs à toute trajectoire, qui ne renferme aucun point singulier de la fonction analytique $A(z)$; si $A(z)$ n'admet qu'un point critique $z = \alpha$, tel que :

$$A(z) = \sqrt{z - \alpha}\, B(z) \ ,$$

où $B(z)$ désigne une fonction holomorphe dans le voisinage du point $z = \alpha$ la force sera un invariant relatif à toute trajectoire qui ne renferme pas le point $z = \alpha$; ces exemples nous donnent une idée des services que peut rendre à notre problème mécanique la théorie de la permutation des branches d'une fonction analytique, lorsque le point d'affixe $z = x + iy$ tourne autour d'un ou plusieurs points singuliers (critiques) de cette fonction.

Si nous désignons par $\alpha(x, y)$ la fonction donnant l'intensité de la force, elle sera un invariant relatif à toute trajectoire qui ne renferme à son intérieur aucun point singulier des dérivées premières.

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} \, , \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} \ .$$

En d'autres termes, nous supposons qu'à l'intérieur de cette trajectoire les dérivées partielles $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ soient continues, finies et bien déterminées[1].

Exemples d'invariants : Forces quelconques.

6. Après les considérations générales du chapitre précédent, nous allons signaler d'abord quelques exemples d'invariants relatifs à une trajectoire et valables pour une force quelconque. La recherche des invariants, que nous tenons à citer ici, s'appuie sur le principe suivant. *Une quantité mécanique Q sera certainement un invariant relatif à une trajectoire T, si la quantité Q est égale à un élément géométrique de la courbe de la trajectoire qui a naturellement une valeur unique et bien déterminée en chaque point de la courbe. Il en est de même des quantités Q qui peuvent être exprimées en fonction uniforme de plusieurs éléments géométriques de la trajectoire.* Nous admettons que ces éléments géométriques peuvent avoir plusieurs valeurs en quelques points singuliers de la trajectoire, mais nous excluons toujours toute singularité de la trajectoire qui entraînerait des singularités pour la quantité Q, considérée comme fonction des coordonnées x et y sur la trajectoire ; cela tient à ce que la notion des invariants suppose pour eux une succession de valeurs continue et bien déterminée le long de la trajectoire relative.

Si nous appelons F_n et F_t les composantes normale et tangentielle d'une force agissant sur un point matériel $M(x, y)$, nous avons les formules classiques

$$F_n = m\,\frac{V^2}{\rho}, \quad F_t = m\,\frac{dV}{dt},$$

V désignant la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire.

Si la masse m est constante ou fonction uniforme des coor-

[1] C'est une conséquence immédiate d'un théorème classique de la théorie des intégrales curvilignes prises le long d'une courbe fermée.