Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1907)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE ROLE DES FONCTIONS MULTIFORMES EN DYNAMIQUE
Autor: Rémoundos, Georges
Kapitel: forces multiformes par rapport au temps.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10151

Les forces multiformes par rapport au temps.

2. — Supposons qu'un point matériel soit sollicité par une force, dont les composantes X et Y sont données par des fonctions *multiformes* des coordonnées x et y.

$$X = \sigma(x, y) \quad , \quad Y = \varphi(x, y) ,$$

et considérons une trajectoire du mobile correspondant à des conditions initiales déterminées. Lorsque le mouvement est périodique, le mobile passant plusieurs fois par le même point de la trajectoire, la force est, en général, multiforme sur la trajectoire, puisqu'elle peut prendre dans une certaine position une détermination différente de la précédente, grâce au principe bien connu de la permutation des branches d'une fonction multiforme. La force considérée F deviendra uniforme (c'est-à-dire aura une valeur) sur la trajectoire, si aux coordonnées X et Y on adjoint une troisième variable *mécanique*, le temps t; il est en effet clair que la force F aura en chaque point de la trajectoire une valeur unique et bien déterminée, pourvu que l'on se donne *le temps* au bout duquel le mobile se trouve à chaque position. Nous supposons, bien entendu, que la trajectoire ne passe pas par des points critiques [1] des fonctions $\sigma(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ qui donnent les composantes X et Y de la force; nous appelons *points critiques* d'une fonction multiforme des coordonnées x et y, les points où plusieurs déterminations de la fonction coïncident. Ainsi la notion de continuité combinée avec le principe bien connu de la permutation des diverses branches d'une fonction multiforme effectuée par un mouvement continu du point M (x, y) revenant à la position de départ, nous permet d'énoncer le théorème suivant :

« *Une force multiforme, fonction multiforme des coordon-*
« *nées* x *et* y, *peut sur chaque trajectoire du mobile être*
« *exprimée par une fonction uniforme de trois variables : les coordonnées* x *et* y *du mobile et le temps* t. »

[1] En général, points singuliers (discontinuités, coïncidence de branches) des fonctions $\sigma(x, y)$ et $\varphi(xy)$.

On peut donc écrire pour toute trajectoire du mobile :

$$F = H(x, y, t) \tag{1}$$

H (x, y, t) désignant une fonction uniforme des variables x, y et t, qui peut varier, bien entendu, avec la trajectoire, lorsque les conditions initiales changent.

Il en est de même des composantes X et Y de la force F.

La détermination de cette fonction H (x, y, t), lorsque la force est donnée par une fonction multiforme $f(x, y)$ est un problème mécanique, puisque l'équation nous donnerait, en général, le temps t comme fonction des coordonnées x et y ; elle pourrait donc nous déterminer l'instant t, auquel le point mobile (x, y) se trouve dans une position donnée. Mais l'étude des variations qu'éprouve la force F, lorsque le mobile revient à la position initiale après avoir décrit un certain chemin continu, est un problème d'analyse qui se ramène à l'étude des singularités multiformes et surtout des points critiques (points de ramifications) ; pour nous ça sera ici un principe pour une étude de quelques quantités mécaniques multiformes, c'est-à-dire ayant plusieurs valeurs à chaque position du mobile.

Si les composantes X et Y sont données par des fonctions uniformes des x et y, il est clair que tous les éléments de la force (intensité, direction, sens) ne dépendent que de la position du mobile ; il ne dépendent pas du tout du temps et du chemin suivi par le mobile pour arriver à chaque position ; c'est le cas qui a été supposé dans les problèmes que nous avons mentionnés dans l'Introduction de ce travail [1]. Le cas général est celui où, les composantes X et Y étant données par des fonctions multiformes des x et y, la force ne dépend pas seulement de la position du mobile ; sur une trajectoire donnée elle dépend aussi *du temps d'une façon indépendante de la position du mobile* de sorte qu'elle peut changer de valeur, lorsque le mobile revient à une certaine position après quelque temps.

---

[1] Dans un travail publié récemment dans le *Journal de Crelle* (1906, Heft 2) M. STEPHANOS indique une voie par laquelle un théorème de Bertrand est affranchi de la restriction que comporte ce cas.

On se rend aisément compte du rôle remarquable que les fonctions multiformes doivent jouer en Mécanique, si l'on se rappelle que la permutation des branches se fait par un mouvement continu du point M (x, y), qui ramène ce point à la position de départ : le mouvement exige, en effet, du temps et suppose l'existence d'une cause, que l'on appelle *force* en Mécanique. Le rôle spécial des fonctions multiformes en Mécanique tient à la nature des choses et nous pouvons dire qu'elles se rattachent à la Mécanique d'une façon intrinsèque et non seulement par la nécessité des applications.

3. — Si le point (x, y) part d'une position initiale $(x_0\ y_0)$ les accroissements de temps les plus intéressants pour nous seront ceux, pour lesquels le point mobile M (x, y) revient à la position initiale. Nous appellerons *période* un tel accroissement du temps t ; d'une façon plus claire, nous appellerons *période* tout intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages du mobile par la même position de la trajectoire et nous remarquerons que la période ainsi définie est, en général, une quantité variable. Les autres accroissements du temps t, qui entraînent le changement de la position du mobile, nous intéressent peu ici, parce que le but principal de ce travail consiste en l'étude des variations des forces et, en général, de quantités multiformes, qui ne sont causées que par les changements du temps et non par la position du mobile.

Avant d'aborder l'étude des problèmes mécaniques, nous devons remarquer que les fonctions multiformes utilisées dans nos théories seront particulièrement intéressantes si elles sont harmoniques par rapport aux coordonnées x et y ou bien analytiques en $z = x + i\, y$, grâce aux progrès spéciaux accomplis dans la théorie des singularités de ces fonctions et de la permutation de leurs branches.

Les Invariants.

4. — Nous allons supposer que les composantes X et Y de la force agissant sur un point matériel M (x, y) soient données par des fonctions multiformes des x et y, soit :

$$X = \sigma(x, y) \quad , \quad Y = \varphi(x, y).$$