

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 9 (1907)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE ROLE DES FONCTIONS MULTIFORMES EN DYNAMIQUE  
**Autor:** Rémondos, Georges  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10151>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LE ROLE DES FONCTIONS MULTIFORMES EN DYNAMIQUE

---

1. — INTRODUCTION. Lorsqu'un point matériel est sollicité par une force, dont les composantes  $X$  et  $Y$  sont des fonctions des coordonnées  $x$  et  $y$  du point, il y a lieu à distinguer deux cas fondamentaux, 1<sup>o</sup> — la force ne dépend que de la position du point matériel, 2<sup>o</sup> — la force peut avoir plusieurs valeurs à la même position du point matériel, parce qu'elle est donnée par des fonctions multiformes des coordonnées  $x$  et  $y$ . Nous nous proposons d'examiner ici le rôle que jouent les fonctions multiformes en Mécanique rationnelle. L'existence de théorèmes importants découverts par les mathématiciens dans l'hypothèse restrictive que la force ne dépend que de la position du mobile justifie bien notre recherche et rend ce sujet extrêmement intéressant : je me borne à citer ici les théorèmes de Bertrand, Halphen, de MM. Darboux et Koenigs ; ils se rattachent aux célèbres problèmes de Bertrand sur les lois des forces donnant lieu à des trajectoires ayant une propriété donnée, quelles que soient les conditions initiales.

Parmi les résultats contenus dans ce travail, celui auquel j'attribue la plus grande importance consiste dans le théorème suivant :

« *Une force centrale quelconque est toujours uniforme sur la trajectoire décrite par le mobile, quelles que soient les conditions initiales; il n'y a d'exception que pour les points de la trajectoire présentant des singularités géométriques comme les points multiples. Ainsi, la force centrale (intensité, sens) ne dépend que de la position du mobile, pourvu que cette position ne soit pas un point multiple de la courbe trajectoire.* »

## LES FORCES MULTIFORMES PAR RAPPORT AU TEMPS.

2. — Supposons qu'un point matériel soit sollicité par une force, dont les composantes  $X$  et  $Y$  sont données par des fonctions *multiformes* des coordonnées  $x$  et  $y$ .

$$X = \sigma(x, y) , \quad Y = \varphi(x, y) ,$$

et considérons une trajectoire du mobile correspondant à des conditions initiales déterminées. Lorsque le mouvement est périodique, le mobile passant plusieurs fois par le même point de la trajectoire, la force est, en général, multiforme sur la trajectoire, puisqu'elle peut prendre dans une certaine position une détermination différente de la précédente, grâce au principe bien connu de la permutation des branches d'une fonction multiforme. La force considérée  $F$  deviendra uniforme (c'est-à-dire aura une valeur) sur la trajectoire, si aux coordonnées  $X$  et  $Y$  on adjoint une troisième variable *mécanique*, le temps  $t$ ; il est en effet clair que la force  $F$  aura en chaque point de la trajectoire une valeur unique et bien déterminée, pourvu que l'on se donne *le temps* au bout duquel le mobile se trouve à chaque position. Nous supposons, bien entendu, que la trajectoire ne passe pas par des points critiques<sup>1</sup> des fonctions  $\sigma(x, y)$  et  $\varphi(x, y)$  qui donnent les composantes  $X$  et  $Y$  de la force; nous appelons *points critiques* d'une fonction multiforme des coordonnées  $x$  et  $y$ , les points où plusieurs déterminations de la fonction coïncident. Ainsi la notion de continuité combinée avec le principe bien connu de la permutation des diverses branches d'une fonction multiforme effectuée par un mouvement continu du point  $M(x, y)$  revenant à la position de départ, nous permet d'énoncer le théorème suivant :

« *Une force multiforme, fonction multiforme des coordonnées  $x$  et  $y$ , peut sur chaque trajectoire du mobile être exprimée par une fonction uniforme de trois variables : les coordonnées  $x$  et  $y$  du mobile et le temps  $t$ . »*

---

<sup>1</sup> En général, points singuliers (discontinuités, coïncidence de branches) des fonctions  $\sigma(x, y)$  et  $\varphi(x, y)$ .

On peut donc écrire pour toute trajectoire du mobile :

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}(x, y, t) \quad (1)$$

$\mathbf{H}(x, y, t)$  désignant une fonction uniforme des variables  $x, y$  et  $t$ , qui peut varier, bien entendu, avec la trajectoire, lorsque les conditions initiales changent.

Il en est de même des composantes  $X$  et  $Y$  de la force  $\mathbf{F}$ .

La détermination de cette fonction  $\mathbf{H}(x, y, t)$ , lorsque la force est donnée par une fonction multiforme  $f(x, y)$  est un problème mécanique, puisque l'équation nous donnerait, en général, le temps  $t$  comme fonction des coordonnées  $x$  et  $y$ ; elle pourrait donc nous déterminer l'instant  $t$ , auquel le point mobile  $(x, y)$  se trouve dans une position donnée. Mais l'étude des variations qu'éprouve la force  $\mathbf{F}$ , lorsque le mobile revient à la position initiale après avoir décrit un certain chemin continu, est un problème d'analyse qui se ramène à l'étude des singularités multiformes et surtout des points critiques (points de ramifications); pour nous ça sera ici un principe pour une étude de quelques quantités mécaniques multiformes, c'est-à-dire ayant plusieurs valeurs à chaque position du mobile.

Si les composantes  $X$  et  $Y$  sont données par des fonctions uniformes des  $x$  et  $y$ , il est clair que tous les éléments de la force (intensité, direction, sens) ne dépendent que de la position du mobile; il ne dépendent pas du tout du temps et du chemin suivi par le mobile pour arriver à chaque position; c'est le cas qui a été supposé dans les problèmes que nous avons mentionnés dans l'Introduction de ce travail<sup>1</sup>. Le cas général est celui où, les composantes  $X$  et  $Y$  étant données par des fonctions multiformes des  $x$  et  $y$ , la force ne dépend pas seulement de la position du mobile; sur une trajectoire donnée elle dépend aussi *du temps d'une façon indépendante de la position du mobile* de sorte qu'elle peut changer de valeur, lorsque le mobile revient à une certaine position après quelque temps.

---

<sup>1</sup> Dans un travail publié récemment dans le *Journal de Crelle* (1906, Heft 2) M. STEPHANOS indique une voie par laquelle un théorème de Bertrand est affranchi de la restriction que comporte ce cas.

On se rend aisément compte du rôle remarquable que les fonctions multiformes doivent jouer en Mécanique, si l'on se rappelle que la permutation des branches se fait par un mouvement continu du point M ( $x, y$ ), qui ramène ce point à la position de départ : le mouvement exige, en effet, du temps et suppose l'existence d'une cause, que l'on appelle *force* en Mécanique. Le rôle spécial des fonctions multiformes en Mécanique tient à la nature des choses et nous pouvons dire qu'elles se rattachent à la Mécanique d'une façon intrinsèque et non seulement par la nécessité des applications.

3. — Si le point ( $x, y$ ) part d'une position initiale ( $x_0, y_0$ ) les accroissements de temps les plus intéressants pour nous seront ceux, pour lesquels le point mobile M ( $x, y$ ) revient à la position initiale. Nous appellerons *période* un tel accroissement du temps  $t$ ; d'une façon plus claire, nous appellerons *période* tout intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages du mobile par la même position de la trajectoire et nous remarquerons que la période ainsi définie est, en général, une quantité variable. Les autres accroissements du temps  $t$ , qui entraînent le changement de la position du mobile, nous intéressent peu ici, parce que le but principal de ce travail consiste en l'étude des variations des forces et, en général, de quantités multiformes, qui ne sont causées que par les changements du temps et non par la position du mobile.

Avant d'aborder l'étude des problèmes mécaniques, nous devons remarquer que les fonctions multiformes utilisées dans nos théories seront particulièrement intéressantes si elles sont harmoniques par rapport aux coordonnées  $x$  et  $y$  ou bien analytiques en  $z = x + i y$ , grâce aux progrès spéciaux accomplis dans la théorie des singularités de ces fonctions et de la permutation de leurs branches.

#### LES INVARIANTS.

4. — Nous allons supposer que les composantes X et Y de la force agissant sur un point matériel M ( $x, y$ ) soient données par des fonctions multiformes des  $x$  et  $y$ , soit :

$$X = \sigma(x, y) , \quad Y = \varphi(x, y).$$

Nous appellerons *invariant absolu* toute quantité mécanique concernant le mouvement d'un point mobile sollicité par la force et ayant la propriété d'être une fonction *uniforme des coordonnées x et y sur tout le plan*.

L'importance des invariants absolus consiste en ce que ces quantités ne dépendent que de la position du mobile pour toutes les trajectoires possibles, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales; d'une façon plus claire, à chaque position du mobile ces quantités n'ont qu'une valeur unique ne dépendant ni des conditions initiales ni du temps mis par le mobile pour y arriver. Le caractère d'invariance, que nous considérons pour ces quantités se rapporte non seulement aux accroissements du temps, mais encore aux changements des conditions initiales, c'est-à-dire de la courbe suivie par le mobile pour arriver à une certaine position. Nous ne pouvons pas citer dans ce travail des exemples d'invariants absolus valables d'une façon générale, mais nous allons envisager aussi une autre espèce d'invariants, dont nous présenterons des exemples remarquables.

Une quantité mécanique  $Q$  sera appelée *invariant relatif* à une trajectoire du mobile, lorsqu'elle ne dépend que de la position du mobile sur *cette trajectoire* et nullement du temps mis par le mobile pour arriver à chaque point de la trajectoire; si le mouvement est périodique, toutes les fois que le mobile passe par un point de la trajectoire, cette quantité  $Q$  prend toujours la même valeur: si nous considérons deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  avec l'hypothèse que la différence  $\Delta t$  soit égale à une ou plusieurs périodes, la valeur de  $Q$  à l'instant  $t$  est égale à sa valeur à l'instant  $t + \Delta t$ . Donc le caractère d'invariance que nous avons en vue ici, se rapporte seulement aux accroissements du temps égaux à une ou plusieurs périodes.

5. La force  $F$  n'est jamais un invariant *général*, puisque notre hypothèse fondamentale consiste en ce que les composantes  $X$  et  $Y$  ne sont pas toutes les deux fonctions uniformes des coordonnées  $x$  et  $y$  du mobile; d'une façon plus précise, les trois éléments de la force  $F$ : intensité, direction et sens ne peuvent être tous les trois des invariants généraux, conformément à notre hypothèse.

Si, par exemple, nous avons :

$$X = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{2xy} .$$

l'intensité de la force sera égale à :

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x+y)^2} = x+y .$$

Elle est donc uniforme par rapport aux coordonnées  $x$  et  $y$  et, par conséquent, c'est un invariant général, mais il n'en est pas de même de l'angle formé par la direction de la force avec l'axe des  $x$ .

Mais il est bien possible que tous les éléments de la force soient des invariants *relatifs* par rapport à une trajectoire, pourvu que cette trajectoire remplisse certaines conditions par rapport aux singularités des fonctions  $\sigma(x, y)$  et  $\varphi(x, y)$  donnant les composantes  $X$  et  $Y$  de la force. L'étude de ce rapport entre les trajectoires d'invariance pour la force et les singularités des fonctions  $\sigma(x, y)$  et  $\varphi(x, y)$  s'offre plus avantageuse dans le cas, où la fonction  $A(z) = X + iY$  est analytique en  $z = x + iy$ , les fonctions  $X = \sigma(x, y)$  et  $Y = \varphi(x, y)$  étant harmoniques conjuguées ; pour bien nous en rendre compte, remarquons que tous les éléments de la force seront des invariants relatifs à toute trajectoire, qui ne renferme aucun point singulier de la fonction analytique  $A(z)$  ; si  $A(z)$  n'admet qu'un point critique  $z = \alpha$ , tel que :

$$A(z) = \sqrt{z - \alpha} B(z) ,$$

où  $B(z)$  désigne une fonction holomorphe dans le voisinage du point  $z = \alpha$  la force sera un invariant relatif à toute trajectoire qui ne renferme pas le point  $z = \alpha$  ; ces exemples nous donnent une idée des services que peut rendre à notre problème mécanique la théorie de la permutation des branches d'une fonction analytique, lorsque le point d'affixe  $z = x + iy$  tourne autour d'un ou plusieurs points singuliers (critiques) de cette fonction.

Si nous désignons par  $\alpha(x, y)$  la fonction donnant l'intensité de la force, elle sera un invariant relatif à toute trajectoire qui ne renferme à son intérieur aucun point singulier des dérivées premières.

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} .$$

En d'autres termes, nous supposons qu'à l'intérieur de cette trajectoire les dérivées partielles  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial y}$  soient continues, finies et bien déterminées<sup>1</sup>.

### EXEMPLES D'INVARIANTS : FORCES QUELCONQUES.

6. Après les considérations générales du chapitre précédent, nous allons signaler d'abord quelques exemples d'invariants relatifs à une trajectoire et valables pour une force quelconque. La recherche des invariants, que nous tenons à citer ici, s'appuie sur le principe suivant. *Une quantité mécanique Q sera certainement un invariant relatif à une trajectoire T, si la quantité Q est égale à un élément géométrique de la courbe de la trajectoire qui a naturellement une valeur unique et bien déterminée en chaque point de la courbe. Il en est de même des quantités Q qui peuvent être exprimées en fonction uniforme de plusieurs éléments géométriques de la trajectoire.* Nous admettons que ces éléments géométriques peuvent avoir plusieurs valeurs en quelques points singuliers de la trajectoire, mais nous excluons toujours toute singularité de la trajectoire qui entraînerait des singularités pour la quantité Q, considérée comme fonction des coordonnées x et y sur la trajectoire ; cela tient à ce que la notion des invariants suppose pour eux une succession de valeurs continue et bien déterminée le long de la trajectoire relative.

Si nous appelons  $F_n$  et  $F_t$  les composantes normale et tangentielle d'une force agissant sur un point matériel M(x, y), nous avons les formules classiques

$$F_n = m \frac{V^2}{\rho}, \quad F_t = m \frac{dV}{dt},$$

V désignant la vitesse et  $\rho$  le rayon de courbure de la trajectoire.

Si la masse  $m$  est constante ou fonction uniforme des coor-

---

<sup>1</sup> C'est une conséquence immédiate d'un théorème classique de la théorie des intégrales curvilignes prises le long d'une courbe fermée.

données  $x$  et  $y$ , ces formules nous donnent les invariants suivants :

$$\frac{V^2}{F_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_t} \cdot \frac{dV}{dt},$$

parce que nous avons :

$$\frac{V^2}{F_n} = \frac{\rho}{m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_t} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}.$$

Si la masse  $m$  est une fonction quelconque des coordonnées  $x$  et  $y$ , nous n'avons que l'invariant  $\frac{mV^2}{F_n}$ , qui est égal au rayon de courbure de la trajectoire. Ce sont là *des invariants relatifs à toute trajectoire correspondante à des conditions initiales quelconques; nous faisons exception des trajectoires passant par des points singuliers des quantités considérées*<sup>1</sup>.

#### FORCES CENTRALES.

7. Nous allons maintenant présenter un autre invariant beaucoup plus intéressant que les précédents et concernant seulement les forces centrales ; son importance consiste en ce qu'il s'exprime par la force elle-même qui est donnée comme une fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  du mobile, contrairement aux invariants signalés au paragraphe précédent, qui sont exprimés par des composantes de la force suivant la normale et la tangente de la trajectoire. C'est, en effet, un inconvénient d'avoir les invariants exprimés par des composantes de la force qui exigent une certaine connaissance d'une trajectoire, généralement inconnue ; cela tient à ce que nous nous proposons comme but principal des applications des invariants à la recherche géométrique des trajectoires, lorsque la force est donnée comme fonction des coordonnées  $x$  et  $y$ .

Le mathématicien RESAL a communiqué autrefois à l'Académie des sciences de Paris (*Comptes rendus*, tome XC ; page 769) un théorème intéressant sur une loi relative à une force centrale. Ce théorème est le suivant :

---

<sup>1</sup> Ces points singuliers sont les points d'une trajectoire possédant plusieurs rayons de courbure (points multiples à tangentes distinctes ou non).

« La force centrale produisant le mouvement d'un point est proportionnelle à la quantité:  $\frac{V^3 \cdot r}{\rho}$ , V désignant la vitesse du mobile, r sa distance au centre des forces,  $\rho$  le rayon de courbure de la trajectoire. »

Nous arrivons très aisément à ce théorème par une comparaison des formules donnant l'intensité d'une force centrale et la vitesse du mobile en coordonnées polaires, avec la formule bien connue qui donne le rayon de courbure d'une trajectoire plane en coordonnées polaires, en prenant comme pôle le centre fixe de la force. Nous savons, en effet, que le rayon  $\rho$  de courbure d'une courbe plane est donné par la formule :

$$(2) \quad \rho = \frac{\left( u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{u^3 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)}, \quad \left[ u = \frac{1}{r} \right]$$

$r$  et  $\theta$  désignant les coordonnées polaires, quel que soit le point pris comme pôle.

En prenant comme pôle le centre de la force centrale, nous avons les formules classiques suivantes, qui donnent l'intensité de la force et la vitesse du mobile aussi en coordonnées polaires, savoir :

$$(3) \quad V^2 = K^2 \left( u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2} \right), \quad F = -mK^2 u^2 \left[ u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right],$$

où  $V$  désigne la vitesse du mobile,  $F$  l'intensité de la force, et  $K$  la constante des aires. Nous n'avons qu'à éliminer les quantités

$$u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2} \quad \text{et} \quad u + \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

entre les formules (2) et (3) pour obtenir la formule suivante :

$$(4) \quad \rho = -\frac{m}{K} \frac{V^3}{uF} \quad \text{ou} \quad \rho = -\frac{m}{K} \frac{V^3 \cdot r}{F}$$

qui est la conséquence des égalités :

$$\left( u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V^3}{K^3}, \quad u^3 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) = -\frac{Fu}{mK^2}.$$

La formule (4) qui nous conduit immédiatement au théorème de Resal énoncé plus haut, peut s'écrire aussi de la façon suivante :

$$(5) \quad \frac{-K\rho}{mr} = \frac{V^3}{F}$$

et nous permet de conclure que la quantité mécanique  $V^3 F$  est un *invariant relatif à toute trajectoire du mobile*, quelles que soient les conditions initiales, si la masse  $m$  est supposée constante ou bien une fonction uniforme des coordonnées  $x$  et  $y$  du mobile; cela tient à ce que les quantités géométriques  $\rho$  et  $Y$  n'ont qu'une valeur bien déterminée à chaque point de la trajectoire, tandis que  $K$  est une constante.

8. Nous allons maintenant simplifier beaucoup cet invariant  $V^3 F$  en appliquant la formule classique suivante :

$$(6) \quad P V = K ,$$

qui exprime le théorème des aires,  $P$  désignant la distance du centre de la force à la tangente de la trajectoire en chaque point et  $K$  la constante des aires; cette formule nous permet de conclure que la vitesse  $V$  est aussi un invariant relatif à la trajectoire, puisque la quantité géométrique  $P$  n'a qu'une valeur unique à chaque point de la trajectoire, sauf quelques points singuliers de la courbe.

Nous en concluons que, lorsque le mouvement est périodique, il n'est jamais rétrograde, et, en général, le mobile revient à un point de la trajectoire toujours avec la même vitesse.

Mais l'invariant le plus important pour le but que nous poursuivons, est celui que nous déduisons par la combinaison des deux invariants précédents, c'est l'intensité  $F$  de la force; il n'y a qu'à éliminer la vitesse  $V$  entre les égalités (5) et (6) pour avoir la formule suivante : .

$$(7) \quad F = - mK^2 \frac{r}{\rho P^3}$$

qui nous donne l'intensité  $F$  de la force en fonction rationnelle de quantités, qui n'ont qu'une valeur unique et bien déter-

minée à chaque point de la trajectoire. Si nous excluons donc les trajectoires ayant des points *singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes*, pour toutes les autres nous aurons pour l'intensité  $F$  une succession de valeurs continue et bien déterminée et le théorème suivant :

**THÉORÈME.** « *L'intensité d'une force centrale est un invariant relatif à toute trajectoire du mobile n'ayant aucun point singulier à plusieurs rayons de courbure<sup>1</sup> ou bien plusieurs tangentes.* »

L'existence de points de la trajectoire, où la force  $F$  devient infinie ne gêne pas ; il suffit que l'intensité de la force y soit *toujours* infinie.

L'importance de ce théorème consiste en ce que j'ai en vue des problèmes où la force est donnée comme fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  et, par conséquent, la connaissance de cet invariant nous donne des renseignements quelquefois précieux sur la trajectoire inconnue. Ainsi, si l'intensité de la force n'est pas un invariant par rapport à une trajectoire, cette trajectoire, doit avoir des points singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes. *Les points de la trajectoire, où l'intensité de la force prend plusieurs valeurs pendant le mouvement supposé périodique, coïncident avec les points singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes.* Des tels points singuliers sont, par exemple, les points multiples à tangentes distinctes ou non. La même formule (7) montre que le sens de la force est aussi un invariant relatif à la trajectoire, puisque le signe du second membre de (7) ne change pas d'après nos hypothèses.

#### APPLICATIONS.

9. — Pour comprendre l'intérêt de la théorie exposée dans les chapitres précédents, nous citerons quelques applications se rapportant aux problèmes où la force est donnée par une fonction multiforme des  $x$  et  $y$  et nous nous propo-

<sup>1</sup> La formule (7) montre, en effet, que la force  $F$  ne saurait avoir plusieurs valeurs qu'aux points singuliers de la trajectoire, où il en est ainsi du rayon  $\rho$  ou de la quantité  $P$ . Nous ne parlons pas de la direction de la force, parce que elle reste évidemment invariable.

serons d'étudier les diverses trajectoires tracées par un mobile sollicité par cette force. Supposons que l'on ait :

$$F = m \cdot \omega(x, y)^1$$

( $m$  désigne la masse),  $F$  désignant l'intensité de la force, et que la fonction  $\omega(x, y)$  admette un point singulier  $x = a$  et  $y = b$  tel que, lorsque le point  $M(x, y)$  part d'une position initiale et y revient après avoir tourné autour du point  $M$ , la fonction change de valeur; dans cette hypothèse, la courbe ainsi suivie par le point  $M(x, y)$  ne saurait jamais être une trajectoire du mobile sollicité par la force  $F$ ; c'est une conséquence immédiate de notre théorème du paragraphe précédent.

Prenons l'exemple suivant :

$$F = r e^\theta.$$

Lorsque le point  $M(r, \theta)$ , partant d'une position quelconque  $M(r, \theta)$ , y revient après avoir décrit une courbe quelconque renfermant le pôle (origine des coordonnées), la fonction  $r e^\theta$  ne reprend pas la même valeur et se multiplie par  $e^{2\pi}$ ; pour cette raison, grâce à notre théorème, aucune trajectoire d'un mobile sollicité par la force  $F = r e^\theta$  ne saurait renfermer le pôle (origine des coordonnées).

D'une façon plus générale, si l'intensité de la force  $F$  est donnée par une fonction  $P(r, \theta)$  n'ayant pas par rapport à la variable  $\theta$  la période  $2\pi$ , alors l'équation :

$$P(r, \theta + 2\pi) = P(r, \theta)$$

ne sera pas satisfaite identiquement. Cela posé, l'application de notre théorème nous permet de conclure que les trajectoires d'un point matériel sollicité par cette force ne sauraient jamais renfermer le pôle ( $r = 0$ ). Il n'y a que les trajectoires ayant des points singuliers à plusieurs rayons de courbure<sup>2</sup> que nous devons exclure dans cette conclusion; nous devons même remarquer qu'en ces points singuliers

<sup>1</sup> La fonction  $\omega(x, y)$  détermine non seulement l'intensité mais encore le sens de la force centrale.

<sup>2</sup> Ou bien à plusieurs tangentes.

les trajectoires exceptionnelles doivent, en général, avoir une infinité de rayons de courbure ou de tangentes parce que la fonction  $P(r, \theta)$  quand elle n'est pas périodique en  $\theta$ , admet une infinité de déterminations. Il en résulte que, dans le cas général, les trajectoires exceptionnelles présentant des singularités très compliquées doivent être considérées comme très rares. Elles doivent présenter des points multiples où se croisent une infinité de branches ; à chaque branche correspond une valeur du rayon de courbure  $\rho$  et à chaque tangente correspond une valeur de la quantité  $P$  ; aussi, à deux valeurs différentes de  $\rho$  correspondent deux tangentes différentes et à deux valeurs différentes de  $\rho$  correspondent, en général, deux branches différentes. Si le point multiple est à tangentes distinctes, il devient critique pour l'intensité  $F$  de la force à cause de la multiplicité du rayon  $\rho$  et de la distance  $P$  simultanément ; dans le cas contraire, ce n'est que le rayon de courbure  $\rho$  qui a plusieurs valeurs, en général, et rend le point critique pour l'intensité de la force  $F$ .

10. Les applications de notre théorème deviennent particulièrement intéressantes dans le cas où nous ne pouvons pas effectuer l'intégration de l'équation différentielle.

$$(8) \quad F = -mK^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right),$$

et déterminer les trajectoires du mobile, lorsque la force  $F$  est donnée comme fonction des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .

Si nous tenons compte d'un théorème classique cité plus haut, nous remarquons que ce sont les points singuliers des dérivées partielles,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta},$$

qui nous intéressent au point de vue des invariants de ce travail, puisque ce ne sont que ces points qui entraînent la permutation des diverses branches des fonctions  $\omega(x, y)$  et  $P(r, \theta)$  lorsqu'on tourne autour d'eux. Nous savons, en effet, que l'intégrale

$$\int \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$$

le long d'une courbe fermée est nulle, si à l'intérieur de la courbe les dérivées  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \omega}{\partial y}$  sont continues, finies et bien déterminées.

Dans l'exemple examiné plus haut où

$$F = re^\theta$$

le pôle, qui ne doit pas être renfermé par les trajectoires, est, en effet, un point singulier de la dérivée  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = re^\theta$ , dont les déterminations coïncident en ce point.

Nous ne voulons pas nous étendre davantage, dans ce travail, sur les applications de notre invariant à la théorie des forces centrales, nous nous bornerons seulement à examiner le cas, où la force  $F$  est donnée par une fonction  $f(z)$  analytique en  $z = x + iy$ .

Si nous posons :

$$f(z) = R(x, y) + i\Phi(x, y),$$

la seule trajectoire possible est celle qui est définie par l'équation  $\Phi(x, y) = 0$ .

Il est vrai que nous pouvons immédiatement constater par l'équation différentielle (8) si cette courbe est effectivement une trajectoire, mais il est quelque fois possible d'éviter cette preuve par l'application de notre invariant. Pour nous en rendre bien compte, laissons toute généralité, et prenons un exemple particulier, soit :

$$F = -i \log z = \theta - i \log r,$$

$r$  et  $\theta$  désignant les coordonnées polaires, et remarquons que la seule trajectoire possible est une circonférence de cercle ayant son centre au pôle ( $r = 0$ ) et son rayon égal à l'unité. L'application de notre théorie nous permet de voir immédiatement que cette courbe n'est pas du tout une trajectoire effective, parce que cette courbe ne passant par aucun point singulier (n'ayant aucune singularité géométrique) renferme un seul point critique transcendant de la fonction analytique  $-i \log z$ , le point  $z = 0$ ; lorsque le point mobile tourne

une fois autour de l'origine des coordonnées, la fonction  $-i \log z$  augmente de  $2\pi$  et, par conséquent, la force ne serait pas un invariant par rapport à la trajectoire n'ayant aucune singularité géométrique. *Il est donc impossible qu'un mobile soit sollicité par une force centrale, dont l'intensité est donnée par la fonction  $-i \log z$ .*

On pourrait aussi se poser la question suivante : Est-il possible que les composantes  $X$  et  $Y$  d'une force centrale soient données par des fonctions harmoniques conjuguées de façon que  $X + iY$  soit une fonction analytique en  $z = x + iy$  ?

Supposons qu'il en soit ainsi et appliquons l'égalité  $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$  qui caractérise les forces centrales ayant comme centre l'origine des coordonnées.

Nous aurons :

$$\begin{aligned} X + iY &= X + i \frac{y}{x} X = X \left(1 + i \frac{y}{x}\right) = \frac{X}{x} (x + iy) = \frac{X}{x} z, \\ \text{et } \frac{X + iY}{z} &= \frac{X}{x}. \end{aligned}$$

Si donc  $X + iY$  est une fonction analytique de  $z$ , il en sera de même du premier et du second membre de cette égalité, ce qui n'est possible que dans le cas où la fonction réelle  $\frac{X}{x}$  est une constante  $C$ . On doit donc avoir :

$$X = Cx \quad \text{et} \quad Y = Cy,$$

c'est-à-dire chacune des composantes  $X$  et  $Y$  doit être proportionnelle à la coordonnée correspondante et l'on aura

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = Cr.$$

C'est là un cas où tous les éléments de la force ne dépendent que de la position du mobile et dans lequel la théorie des invariants n'a pas à intervenir.

C'est la raison pour laquelle le cas, où  $X + iY$  est une fonction analytique de  $z = x + iy$ , n'intéresse pas les forces centrales au point de vue de nos invariants.

Il n'est pas douteux qu'il y ait encore beaucoup de choses à faire dans l'étude du rôle que les fonctions multiformes jouent dans la Dynamique ; c'est là un domaine où des théories importantes de l'analyse moderne trouvent des applications intéressantes.

Georges RÉMOUNDOS (Athènes).

---

## CHANGEMENT DE VARIABLE DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE

---

Les démonstrations ordinaires pour l'opération bien connue du changement de variable dans une intégrale multiple sont non seulement artificielles, mais aussi difficiles à comprendre pour des étudiants qui n'ont pas une grande expérience des démonstrations de ce genre.

La démonstration de M. GOURSAT pour 2 variables, donnée dans son *Cours d'Analyse* n'est pas artificielle et est suffisamment simple, mais elle emploie la formule de Green.

Dans l'édition de 1893 du *Cours d'Analyse* de M. JORDAN, § 148 T. 1, il y a un aperçu d'une démonstration ingénieuse que l'on rend facilement parfaitement rigoureuse et qui peut être appliquée au cas d'un nombre quelconque de variables.

L'énoncé rigoureux de cette démonstration est :

Etant donné l'intégrale  $\iint_A f(x, y) da$ .

Admettons que

$$\left. \begin{array}{l} X = X(u, v) \\ Y = Y(u, v) \end{array} \right\} \quad (1)$$

sont des fonctions, continues de  $(u, v)$  dans toute une région  $\bar{A}$  (limites comprises) et, telles qu'à chaque point  $(u, v)$  de  $\bar{A}$  corresponde un point et un seul  $(x, y)$  de  $A$ .