

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	8 (1906)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	CONSTRUCTION ET GÉNÉRATION DES COURBES du \$(n + 1)^{e}\$ degré et de la \$(n + 1)^{e}\$ classe 1
<b>Autor:</b>	Chelier, L.
<b>Kapitel:</b>	Application des théories précédentes a la construction des COURBES.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-9283">https://doi.org/10.5169/seals-9283</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\begin{aligned} & yF_1^n(xy) + x(A'y^n + B'xy^{n-1} + \\ & \dots + M'x^{n-1}y) - k(A'y^n + \\ & B'xy^{n-1} + \dots + M'x^{n-1}y) = 0 . \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & F_1^n(xy) + xF_3^{n-1}(xy) - \\ & kF_3^{n-1}(x, y) = 0 . \end{aligned}$$

Le terme de degré inférieur est du  $(n - 1)$ <sup>e</sup>.

L'origine est un point multiple d'ordre  $n - 1$ . D'autre part  $y = o$  amène

$$x = \frac{M'}{M' + N} k .$$

Donc le point  $(k, o)$  n'est plus sur la courbe.

#### APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A LA CONSTRUCTION DES COURBES.

Les deux théorèmes précédents et leurs cas spéciaux permettent de construire par points et par tangentes les courbes du 3<sup>e</sup> degré à point double ou de la 3<sup>e</sup> classe à tangente double quand on connaît 5 paires d'éléments homologues dans les groupes générateurs.

Les cas spéciaux déterminent des coniques auxiliaires au moyen desquelles on peut trouver tous les éléments des groupes et par conséquent les courbes considérées.

##### Courbes du 3<sup>e</sup> degré.

Le groupe primitif du 3<sup>e</sup> degré sera formé par un faisceau  $S(\alpha, b, c)$  et un autre faisceau  $S_1(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1)$  contenant les rayons homologues nécessaires.

Le rayon  $c$  détermine sur  $S_1$  une division  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  et le rayon  $C_1$  sur  $S$  une division  $A B C$ ; celles-ci ont le point  $C C_1$  commun. Elles ont pour enveloppe une courbe de 2<sup>e</sup> degré

$\nu = \infty$  ne donne plus de solutions en  $\mu$  autre que  $\mu = \infty$ , par conséquent la première base n'est plus une tangente; par contre  $\mu = \infty$  donne  $(n - 1)$  solutions en  $\nu$  différentes et différentes de  $\nu = \infty$  ce qui prouve que la deuxième base est une tangente multiple d'ordre  $(n - 1)$

##### Courbes de la 3<sup>e</sup> classe.

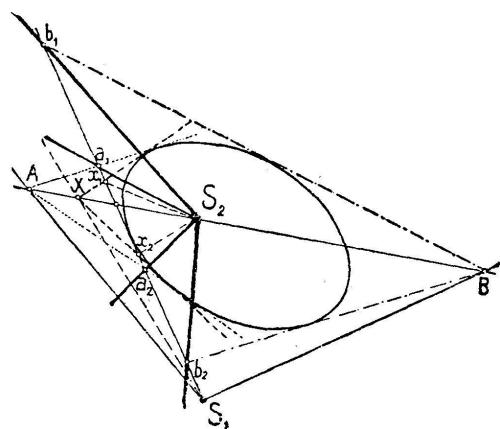
Désignons par  $A, B, C$  des points de la 1<sup>re</sup> division et par  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  les points homologues nécessaires de la 2<sup>e</sup>. Les tangentes sont avec les deux bases :

$$AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1 .$$

En considérant les points  $C$  et  $C_1$  comme sommet de deux fais-

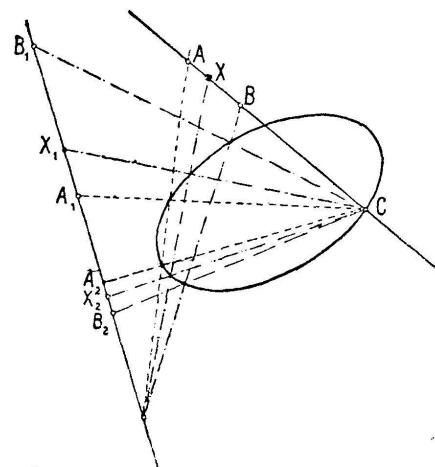
déterminée par les tangentes  $AA_1$ ,  $AA_2$ ,  $BB_1$ ,  $BB_2$  et la base  $c$  de la division.

Par tout point  $X$  de  $c$ , on peut mener deux tangentes arbitraires à cette conique. Elles déterminent 2 points  $X_1$  et  $X_2$  sur  $c$ . Donc  $SX$  et  $S_1X_1$  puis  $S_1X_2$



sont des rayons homologues du groupe primitif et ils déterminent deux points nouveaux de la courbe. En laissant  $X$  décrire  $C_1$ , on forme l'ensemble des tangentes de la conique auxiliaire et l'ensemble des points de la courbe du 3<sup>e</sup> degré. (Voir fig. 1)

ceaux et en joignant  $C$  avec les points de la 2<sup>e</sup> base,  $C_1$  avec ceux de la 1<sup>re</sup> base, on obtient un groupe du 3<sup>e</sup> degré dans lequel  $CC_1$  représente 2 rayons homologues confondus. Ce groupe détermine une conique



que l'on construit par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 connus.

Tout rayon passant par  $C_1$  et coupant la conique donne deux points que l'on joint à  $C$  et qui sont les rayons homologues du 2<sup>e</sup> faisceau. Les 3 rayons sont prolongés jusqu'aux bases et déterminent ainsi 2 nouvelles paires de points du groupe primitif de 3<sup>e</sup> classe et par conséquent deux nouvelles tangentes. Donc la courbe peut être construite par tangentes en menant par  $C$  des rayons arbitraires qui coupent la conique auxiliaire. (Voir fig. 2).

**REMARQUE.** Le 2<sup>e</sup> faisceau ou la 2<sup>e</sup> ponctuelle forme une involution du 2<sup>e</sup> degré, qui est homographique avec l'autre faisceau ou l'autre ponctuelle. La construction précédente donne une démonstration des théorèmes suivants très connus.

*Quand le sommet d'un faisceau involutif est sur une conique, les sécantes déterminées*

*Quand une tangente d'une conique est considérée comme base d'une involution, les points*

*par chaque paire de rayons homologues sont concourantes.*

*de coupe de chaque paire de tangentes menées par deux points homologues sont sur une même ligne droite.*

### *Courbes du $(n + 1)$ ° degré.*

1) Etant donné deux faisceaux  $S_n$ ,  $S_1$  formant un groupe du  $(n + 1)$ ° degré, celui-ci est déterminé par  $(2n + 1)$  paires de rayons homologues fournissant  $(2n + 1)$  points de la courbe en dehors du point multiple d'ordre  $n$  et du point simple considérés aux sommets des deux faisceaux.

2) Soient maintenant deux rayons homologues  $\alpha$  et  $\alpha'$  coupant les deux faisceaux  $\alpha$  coupe  $S_1$  et  $\alpha'$  coupé  $S_n$ . Ceux-ci donnent deux divisions de points du  $(n + 1)$ ° degré avec un point homologue commun. Ces divisions entraînent une courbe auxiliaire de la  $n$ ° classe dans laquelle la base  $\alpha'$  est tangente d'ordre  $(n - 1)$  tandis que  $\alpha$  n'est pas tangente.

3) Si nous supposons cette courbe auxiliaire construite ; par tous les points de  $\alpha'$  on peut lui mener une tangente mais une seule qui donne un point sur la division  $\alpha$ , mais par contre par le point trouvé on peut mener  $(n - 1)$  tangentes, nouvelles qui donnent les  $n - 1$  autres points correspondant à celui-là, de telle sorte par les points ainsi considérés, on peut toujours mener les rayons homo-

### *Courbes de la $(n + 1)$ ° classe.*

1) Etant donné deux divisions de points  $D_n$  et  $D_1$ , formant un groupe de la  $(n + 1)$ ° classe celle-ci est déterminée par  $(2n + 1)$  paires de points, c'est-à-dire par  $(2n + 1)$  tangentes en dehors de la tangente multiple d'ordre  $n$  et de la tangente simple considérées comme bases des divisions.

2) Si maintenant nous prenons deux points homologues  $A$   $A'$  et que nous joignons tous les points de  $D_n$  avec  $A'$  et tous ceux de  $D_1$  avec  $A$  nous formons deux faisceaux en  $A'$  et  $A$  tels qu'à tout rayon de  $A'$  en correspondent un de  $A$  et à tout rayon de  $A$  on en trouve  $n$  de  $A'$ . On a un groupe de la  $(n + 1)$ ° classe avec un rayon homologue commun ; la courbe correspondante est du  $n$ ° degré, le sommet  $A'$  est un point multiple d'ordre  $n - 1$ , l'autre est extérieur.

3) Si nous supposons cette courbe auxiliaire construite, à tout rayon arbitraire issu de  $A$  correspondent  $n$  points de coupe avec cette courbe, c'est-à-dire  $n$  rayons issus de  $A'$  (réels ou imaginaires). Le rayon par  $A$  donne un point sur  $D_1$  et les  $n$  rayons par  $A'$  donnent les  $n$  points correspondants sur  $D_n$ . Ceux-ci déterminent  $n$  nouvelles tangentes de la courbe primitive de la  $(n + 1)$ ° classe. Par

logues correspondants,  $n$  en  $S_n$  et un en  $S_1$ . Ces rayons donnent des nouveaux points de la courbe du  $(n + 1)$ <sup>e</sup> degré, et par conséquent, cette courbe peut être construite au moyen de la courbe auxiliaire correspondante de la  $n$ <sup>e</sup> classe.

conséquent cette courbe peut être construite au moyen des points de la courbe inférieure du  $n$ <sup>e</sup> degré.

### CONSTRUCTION DE LA COURBE AUXILIAIRE.

Pour déterminer cette courbe de  $n$ <sup>e</sup> classe qui correspond à un groupe de  $(n + 1)$ <sup>e</sup> classe ayant une paire de points homologues confondus, nous remarquons que l'on a  $2n$  tangentes différentes, une d'ordre  $(n - 1)$  et une droite non tangente.

Si maintenant, nous prenons une quelconque des  $2n$  tangentes simples différentes, celle-ci est coupée par les  $(2n - 1)$  autres en  $2n - 1$  points. A chaque point de la tangente d'ordre  $(n - 1)$  correspond un seul point de cette tangente simple et à chaque point de celle-ci correspondent  $(n - 1)$  points homologues sur la tangente multiple, car, par chaque point de la tangente simple on peut mener  $(n - 1)$  autres tangentes simples.

Il en résulte donc que la construction de la courbe de la  $n$ <sup>e</sup> classe se ramène à deux divisions formant un groupe de la  $n$ <sup>e</sup> classe, donc telle qu'à tout point de l'une correspondent  $(n - 1)$  points de l'autre et à tout point de cette autre un seul de la première.

On peut également ramener cette courbe à celle résultant d'un groupe de  $n$ <sup>e</sup> degré. Cette courbe comporte le point  $A'$  comme point multiple d'ordre  $(n - 1)$  et en plus  $2n + 1 - 1$  ou  $2n$  autres points simples.

En joignant un quelconque de ces points avec les  $2n - 1$  autres puis ceux-ci avec  $A'$ , on forme deux faisceaux, tels qu'à chaque rayon du premier en correspondent  $n - 1$  du  $2^{\text{e}}$  et chaque rayon du  $2^{\text{e}}$  un du premier; car tout rayon par le point simple en question a encore  $(n - 1)$  points de coupe possible avec la courbe.

Il en résulte également que la construction de cette courbe se ramène à celle résultant de deux faisceaux formant un groupe du  $n$ <sup>e</sup> degré d'après les formules précédentes appliquées au nombre des points nécessaires.

Si dans la formule

$$2n + 1$$