Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 8 (1906)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSTRUCTION ET GÉNÉRATION DES COURBES du \$(n + 1)^e\$

degré et de la \$(n + 1)^e\$ classe 1

Autor: Chelier, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9283

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 30.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

De (4) et (5) résulte aussitôt

$$\frac{Q_i}{Q_i'} = \frac{Q_j}{Q_j'}, \quad (i,j = 1, 2, \dots l).$$

Ceci démontre la proposition que nous venons d'énoncer. Celle-ci, pour les mêmes raisons que tout à l'heure, est vraie quelle que soit la nature des éléments considérés.

Remarque. Dans le cas où les équations (1), au lieu d'être homogènes, admettent un second membre et sont de la forme

(6)
$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,n}x_n = d_k$$
, $(k = 1, 2, \ldots r)$

leur solution la plus générale, s'il en existe une, est de la forme

$$x_j = b_{j,1}t_1 + b_{j,2}t_2 + \ldots + b_{j,s}t_s + a_j$$
, $(j = 1, 2, \ldots n)$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ représentent alors l'un quelconque des systèmes de valeurs vérifiant (6).

La démonstration est immédiate. Nous ne nous y arrêtons pas.

G. Dumas (Zurich).

CONSTRUCTION ET GÉNÉRATION DES COURBES du (n + 1)° degré et de la (n + 1)° classe 1.

Nous commencerons par les définitions suivantes :

Groupe du $(n + 1)^e$ degré.

Un faisceau dont chaque rayon correspond à n rayons d'un autre faisceau alors que chaque rayon de celui-ci correspond à un seul rayon du précédent, détermine avec le deuxième, un groupe du (n + 1) e degré.

Groupe de la (n + 1) e classe.

Etant donné deux divisions de points, telles que chaque point de la première correspond à n de la deuxième et chaque point de la deuxième à un seul de la première, ces divisions forment un groupe de la $(n+1)^e$ classe.

¹ Voir C. R. 1906 (nº 24, 11 juin et nº 1, 2 juillet).

Equations:

Les origines sont arbitraires.

 α et β étant les abscisses des points des divisions ou les coefficients angulaires des angles des rayons des faisceaux, on a l'équation:

(1)
$$\alpha (A\beta^{n} + B\beta^{n-1} + ... + M\beta + N) + A'\beta^{n} + B'\beta^{n-1} + ... + M'\beta + N' = 0$$
,

ou

(2)
$$\alpha F_1^n(\beta) + F_2^n(\beta) \equiv 0.$$

Il y a 2 (n + 1) ou 2 n + 2 termes. Donc (2n + 1) paires de points homologues ou de rayons homologues permettent de déterminer les coefficients.

Théorème. Le lieu des points de coupe des rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe du (n + 1)^e ordre est une courbe du (n + 1)^e degré. Le sommet du premier faisceau est un point simple de la courbe et le sommet du second un point multiple d'ordre n.

Soit $S_1(k, o)$ le premier sommet et $S_2(o, o)$ l'autre. Tout rayon du premier faisceau donne:

 $y = \alpha (x - k)$ et ceux de l'autre : $y = \beta x$.

En éliminant α et β on obtient

$$\beta = \frac{y}{x}$$

$$\alpha = -\frac{F_2^n(\beta)}{F_1^n(\beta)} = -\frac{F_2^n(x,y)}{F_1^n(x,y)},$$

puis enfin

$$y = -\frac{F_2^n(x,y)}{F_1^n(x,y)}(x-k)$$
,

ou $yF_1^n(xy) + xF_2^n(x, y) - kF_2^n(x, y) = 0$.

Théorème. L'enveloppe des droites joignant les points homologues de deux divisions de points formant un groupe du $(n+1)^e$ ordre est une courbe de la $(n+1)^e$ classe. La première base est une tangente simple et la seconde une tangente multiple d'ordre n.

Désignons une des droites en question par:

$$\begin{aligned} x\mu + y\nu + 1 &= 0 \ , \\ \text{avec} \\ \mu &= -\frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \nu = -\frac{1}{\beta} \ . \end{aligned}$$

En faisant varier μ et ν et en introduisant leurs valeurs en fonctions de α et de β dans l'équation principale on trouvera l'équation de l'enveloppe. On a

$$-\frac{1}{\mu} \left\{ \frac{A(-1)^n}{v^n} + \frac{B(-1)^{n-1}}{v^n} + \dots + \frac{M(-1)}{v} + N \right\} + \dots$$

$$\left\{ A' \frac{(-1)^n}{v^n} + \dots + \frac{M'(-1)}{v^n} + N' \right\} = 0$$

Le terme de degré inférieur étant du nº degré donc l'origine est un point multiple d'ordre n et le point (k, o) un point simple de la courbe. C. q. f. d.

Corollaire. Quand les faisceaux ont deux rayons homologues confondus la courbe se ramène à une courbe du ne degré. Le sommet du deuxième faisceau est un point multiple d'ordre (n — 1) et celui du premier n'est plus sur la courbe. La droite formée par les rayons confondus s'est détachée de la courbe.

Dans ce cas la ligne des sommets est confondue avec les rayons homologues considérés. En la prenant comme axe on aura la solution $\alpha = o$ qui entraine $\beta = o$ et par conséquent on aura aussi

$$N'=0$$
,

L'équation du lieu sera:

$$a + bv + cv^{2} + \dots + mv^{n-1} + nv^{n} + \mu \left\{ a' + b'v + \dots + m'v^{n-1} + n'v^{n} \right\} = 0 ,$$

ou encore:

$$v^{n}(n'\mu + n) + v^{n-1}(m'\mu + m) + \dots$$

$$+ v^{2}(c'\mu + c) + v(b'\mu + b)$$

$$+ a'\mu + a = 0.$$

L'équation étant du $(n + 1)^n$ degré la courbe est de la $(n + 1)^n$ classe.

$$v = \infty$$
 donne $\mu = -\frac{n}{n'}$ et $\mu = \infty$ donne n solutions en v ,

donc la première base est une tangente simple et l'autre une tangente multiple d'ordre n.

Corollaire. Quand les deux divisions ont un point homologue commun la courbe se ramène à une courbe de la ne classe. La première base se détache de l'enveloppe et n'est plus tangente tandis que la seconde est encore une tangente multiple d'ordre. (n-1)

En prenant le point commun comme origine on a : $\alpha = o$ qui entraîne $\beta = o$ et par la suite:

$$N'=0$$
.

L'enveloppe prend alors la forme

$$v^n \cdot n + v^{n-1}(m'\mu + m) + \dots + a'\mu + a = 0$$
,

Donc l'enveloppe est de la n^e classe.

$$yF_{1}^{n}(xy) + x (A'y^{n} + B'xy^{n-1} + \dots + M'x^{n-1}y) - k (A'y^{n} + B'xy^{n-1} + \dots + M'x^{n-1}y) = 0.$$
ou

$$F_1^n(xy) + xF_3^{n-1}(xy) - kF_3^{n-1}(x,y) = 0$$
.

Le terme de degré inférieur est du $(n-1)^e$.

L'origine est un point multiple d'ordre n-1. D'autre part y=o amène

$$x = \frac{M'}{M' + N} k .$$

Done le point (k, o) n'est plus sur la courbe.

 $v=\infty$ ne donne plus de solutions en μ autre que $\mu=\infty$, par conséquent la première base n'est plus une tangente; par contre $\mu=\infty$ donne (n-1) solutions en ν différentes et différentes de $\nu=\infty$ ce qui prouve que la deuxième base est une tangente multiple d'ordre (n-1)

Application des théories précédentes a la construction des courbes.

Les deux théorèmes précédents et leurs cas spéciaux permettent de construire par points et par tangentes les courbes du 3^e degré à point double ou de la 3^e classe à tangente double quand on connaît 5 paires d'éléments homologues dans les groupes générateurs.

Les cas spéciaux déterminent des coniques auxiliaires au moyen desquelles on peut trouver tous les éléments des groupes et par conséquent les courbes considérées.

Courbes du 3e degré.

Le groupe primitif du 3^e degré sera formé par un faisceau S (α, b, c) et un un faisceau S₁ $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1)$ contenant les rayons homologues nécessaires.

Le rayon c détermine sur S₄ une division A₄, A₂, B₄, B₂, C₄ et le rayon C₄ sur S une division A B C; celles-ci ont le point CC₄ commun. Elles ont pour enveloppe une courbe de 2^e degré Courbes de la 3^e classe.

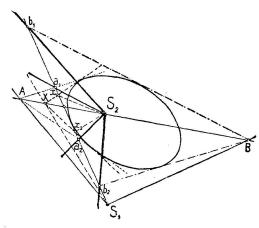
Désignons par A, B, C des points de la 1^{re} division et par A₁ A₂, B₁ B₂, C₁ les points homologues nécessaires de la 2^e. Les tangentes sont avec les deux bases:

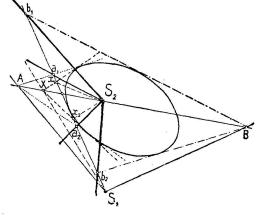
 AA_1 , AA_2 , BB_1 , BB_2 , CC_1 .

En considérant les points C et C₁ comme sommet de deux fais-

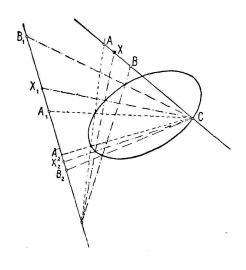
déterminée par les tangentes AA_1 , AA_2 , BB_4 , BB_2 et la base cde la division.

Par tout point $X de c_1$ on peut mener deux tangentes arbitraires à cette conique. Elle déterminent 2 points X₄ et X₂ sur c. Donc S X et S₁ X₁ puis S₁ X₂ ceaux et en joignant C avec les points de la 2e base, C, avec ceux de la 1re base, on obtient un groupe du 3º degré dans lequel CC, représente 2 rayons confondus. homologues groupe détermine une conique





sont des rayons homologues du groupe primitif et ils déterminent deux points nouveaux de la courbe. En laissant X décrire C₄ on forme l'ensemble des tangentes de la conique auxiliaire et l'ensemble des points de la courbe du 3e degré. (Voir fig. 1)



que l'on construit par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 connus.

Tout rayon passant par C₁ et coupant la conique donne deux points que l'on joint à C et qui sont les rayons homologues du 2^e faisceau. Les 3 rayons sont prolongés jusqu'aux bases et déterminent ainsi 2 nouvelles paires de points du groupe primitif de 3e classe et par conséquent deux nouvelles tangentes. Donc la courbe peut être construite par tangentes en menant par C des rayons arbitraires qui coupent la conique auxiliaire. (Voir fig. 2).

Remarque. Le 2^e faisceau ou la 2^e ponctuelle forme une involution du 2e degré, qui est homographique avec l'autre faisceau ou l'autre ponctuelle. La construction précédente donne une démonstration des théorèmes suivants très connus.

Quand le sommet d'un faisceau involutif est sur une conique, les sécantes déterminées

Quand une tangente d'une conique est considérée comme base d'une involution, les points par chàque paire de rayons homologues sont concourantes.

de coupe de chaque paire de tangentes menées par deux points homologues sont sur une même ligne droite.

Courbes du $(n + 1)^e$ degré.

Courbes de la $(n + 1)^c$ classe.

- 1) Etant donné deux faisceaux S_n , S_4 formant un groupe du $(n+1)^e$ degré, celui-ci est déterminé par (2 n + 1) paires de rayons homologues fournissant (2 n + 1) points de la courbe en dehors du point multiple d'ordre n et du point simple considérés aux sommets des deux faisceaux.
- 2). Soient maintenant deux rayons homologues a et a' coupant les deux faisceaux a coupe S_4 et a' coupé S_n . Ceux-ci donnent deux divisions de points du $(n+1)^e$ degré avec un point homologue commun. Ces divisions entraînent une courbe auxiliaire de la n^e classe dans laquelle la base a' est tangente d'ordre (n-1) tandis que a n'est pas tangente.
- 3) Si nous supposons cette courbe auxiliaire construite; par tous les points de a' on peut lui mener une tangente mais une seule qui donne un point sur la division a, mais par contre par le point trouvé on peut mener (n-1) tangentes, nouvelles qui donnent les n-1 autres points correspondant à celui-là, de telle sorte par les points ainsi considérés, on peut toujours mener les rayons homo-

- 1) Etant donné deux divisions de points D_n et D_4 , formant un groupe de la $(n+1)^e$ classe celle-ci est déterminée par (2n+1) paires de points, c'est-à-dire par (2n+1) tangentes en dehors de la tangente multiple d'ordre n et de la tangente simple considérées comme bases des divisions.
- 2) Si maintenant nous prenons deux points homologues A A' et que nous joignons tous les points de D_n avec A' et tous ceux de D_1 avec A nous formons deux faisceaux en A' et A tels qu'à tout rayon de A' en correspondent un de A et à tout rayon de A on en trouve n de A'. On a un groupe de la $(n + 1)^e$ classe avec un rayon homologue commun; la courbe correspondante est du n^e degré, le sommet A' est un point multiple d'ordre n-1, l'autre est extérieur.
- 3) Si nous supposons cette courbe auxiliaire construite, à tout rayon arbitraire issu de Λ correspondent n points de coupe avec cette courbe, c'est-à-dire n rayons issus de Λ' (réels ou imaginaires). Le rayon par Λ donne un point sur D_1 et les n rayons par Λ' donnent les n points correspondants sur D_n . Ceux-ci déterminent n nouvelles tangentes de la courbe primitive de la $(n + 1)^e$ classe. Par

logues correspondants, n en S_n et un en S₄. Ces rayons donnent des nouveaux points de la courbe du $(n+1)^e$ degré, et par conséquent, cette courbe peut être construite au moyen de la courbe auxiliaire correspondante de la n e classe.

conséquent cette courbe peut être construite au moyen des points de la courbe inférieure du nº degré.

CONSTRUCTION DE LA COURBE AUXILIAIRE.

Pour déterminer cette courbe de ne classe qui correspond à un groupe de $(n + 1)^e$ classe ayantune paire de points homologues confondus, nous remarquons que l'on a 2 n tangentes différentes, une d'ordre (n-1)et une droite non tangente.

Si maintenant, nous prenons une quelconque des 2 n tangentes simples différentes, celle-ci est coupée par les (2n-1) autres en 2 n - 1 points. A chaque point de la tangente d'ordre (n — 1) correspond un seul point de cette tangente simple et à chaque point de celle-ci correspondent (n-1) points homologues sur la tangente multiple, car, par chaque point de la tangente simple on peut mener (n -1) autres tangentes simples.

Il en résulte donc que la construction de la courbe de la ne classe se ramène à deux divisions formant un groupe de la ne classe, donc telle qu'à tout point de l'une correspondent (n-1)points de l'autre et à tout point de cette autre un seul de la première.

On peut également ramener cette courbe à celle résultant d'un groupe de ne degré. Cette courbe comporte le point A' comme point multiple d'ordre (n-1) et en plus 2 n + 1 - 1ou 2n autres points simples.

En joignant un quelconque de ces points avec les 2n-1autres puis ceux-ci avec A', on forme deux faisceaux, tels qu'à chaque rayon du premier en correspondent n-1 du 2^{e} et chaque rayon du 2e un du premier; car tout rayon par le point simple en question a encore (n-1) points de coupe possible avec la courbe.

Il en résulte également que la construction de cette courbe se ramène à celle résultant de deux faisceaux formant groupe du ne degré d'après les formules précédentes appliquées au nombre des points nécessaires.

Si dans la formule

on fait n = n - 1, on trouve 2n - 1.

comme nombre des tangentes nécessaires en dehors de la tangente d'ordre n-1 et d'une tangente simple.

Conclusions.

A. Une courbe de $(n+1)^e$ degré avec un point multiple d'ordre n se ramène à

Une courbe de ne classe avec une tangente multiple d'ordre (n-1), puis à

Une courbe de degré (n-1) avec un point d'ordre n-2, puis à

Une courbe de $(n-2)^e$ classe avec une tangente d'ordre n-1, puis à

Une courbe du 3^e degré avec un point double ou de 3^e classe avec une tangente double, et enfin à

Une courbe du 2º degré ou de la 2º classe avec 5 points ou 5 tangentes simples.

B. Il en résulte a priori le théorème suivant particulièrement connu dans les coniques.

Théorème. Si un point multiple d'ordre (n — 1) d'une courbe du ne degré est considéré comme sommet d'un faisceau involutif du ne degré les points de coupe de n rayons homologes avec la courbe sont en ligne droite et les droites correspondant à chaque groupe de n rayons sont concourantes.

A. Une courbe de la $(n + 1)^e$ classe avec une tangente d'ordre n se ramène à

Une courbe du ne *degré* avec un point d'ordre n-1e puis à

Une courbe de $(n-1)^e$ classe avec une tangente d'ordre (n-2) puis à

Une courbe de 3° classe ou de 3° degré avec une tangente double ou un point double, et enfin à

Une courbe de 2^e degré ou de 2^e classe avec 5 points simples ou 5 tangentes simples.

B. Ceci donne le théorème dualistique suivant dont le cas particulier des coniques est bien connu.

Théorème. Si une tangente multiple d'ordre (n — 1) d'une courbe de n° classe est considérée comme base d'une division involutive de n° classe, les n tangentes issues de n points homologues sont concourantes, et les points de concours de chaque groupe sont en ligne droite.

L. CRELIER, (Bienne-Berne).